1

वैदिक गणित
(Vedic Mathematics)

1.01 प्रस्तावना

पिछली कक्षा में हम पढ़ चुके हैं कि स्वामी भारतीकृष्णतीर्थ ने शृंगेरी मठ में रह कर आठ वर्ष कठोर तपस्या की। साधना की उच्च कोटि की सिद्ध अवस्था में उन्होंने वेदग्रन्थों में उल्लेखित गणितीय सूत्रों का अन्तःदर्शन किया और साक्षात्कार की अनुभूति को मंत्रों (सूत्रों) के रूप में प्रकट किया। इन मंत्रों को नाम दिया वैदिक गणितीय सूत्र जो सर्वथा उचित है। वैदिक विद्वानों के अनुसार वेदों के ज्ञान को अपौरूषेय कहते हैं क्योंकि इसे किसी मनुष्य ने विचार कर नहीं बनाया। वेदों का ज्ञान केवल चिन्तन से प्राप्त ज्ञान नहीं है वरन यह साधना की उच्चतम अवस्था में होने वाले साक्षात्कार की अनुभूति का मंत्रों के रूप में प्रकटीकरण है। इस परिप्रेक्ष्य में भी स्वामीजी द्वारा स्थापित सूत्र वैदिक गणितीय सूत्र हैं।

1.02 वैदिक गणित का महत्व :

गणितीय समस्याओं का हल ज्ञात करने में जब वैदिक गणितीय सूत्रों का निरन्तर मौखिक अभ्यास किया जाता है तो मानव की एकाग्रता और स्मृति का विकास होता है और उसके चिन्तन–मनन में प्रखरता आती है। वैदिक गणित की सरलता, सरसता और रोचकता के कारण मानव मन में जिज्ञासा का भाव उत्पन्न होता है। जिज्ञासा उसे जागरूक बनाती है तथा शनैः शनैः उसकी अन्तः चेतना जाग्रत होने लगती है। वास्तव में वैदिक गणित इसी अन्तः चेतना के जाग्रत करने की विधा है। यही अन्तः चेतना मानव के व्यक्तित्व और मस्तिष्क के विकास का आधार बनती है।

1.03 मूल संक्रियाओं का अभ्यास एवं विस्तार :

(i) योग संक्रिया :

पिछली कक्षा में हमने सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा पूर्ण संख्याओं का योग ज्ञात करने का अभ्यास किया था। अभ्यास में पूर्ण संख्याओं और मापन–इकाई दूरी (किमी. – मी.) के प्रश्न लिये थे। वास्तव में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा योग संक्रिया के सभी प्रकार के प्रश्न किये जा सकते हैं जैसे मापन इकाई मुद्रा (रुपये–पैसे), तौल (किग्रा.–ग्राम), धारिता (लीटर–मि.लीटर), समय (घंटा, मिनट, सैकण्ड), दशमलव भिन्न, पूर्ण संख्या और दूरी (किमी.–मी.–सेमी.) आदि।

टिप्पणी : योग करते समय निम्न बिन्दुओं का ध्यान रखना आवश्यक हैं :

1. स्तम्भ संख्या रचना में मापन इकाई के अनुसार लघु इकाई में भी स्तम्भ संख्या निश्चित होती है। जैसे मापन इकाई मुद्रा में 1 रुपया = 100 पैसे तो लघु इकाई पैसे में दो स्तम्भ रहेंगे अर्थात् 5 पैसे को स्तम्भ रचना में 05 पैसे लिखा जायेगा। इसी प्रकार 1 किलोमीटर = 1000 मीटर अतः लघुइकाई मीटर में तीन स्तम्भ रहेंगे अर्थात् 84 मीटर को स्तम्भ रचना में 084 मीटर लिखा जायेगा। देखिए निम्न उदाहरण।

उदाहरण : योग कीजिए।

किग्रा	ग्राम
112	065 ↓
360	$0\ddot{8}5$
$\dot{2}\dot{8}\dot{9}$	$\dot{8}72$
156	345
918	367

संकेत :

(i) 65 ग्राम को 065 ग्राम तथा 85 ग्राम को 085 ग्राम लिखा।
(ii) इकाई स्तम्भ ऊपर से योग प्रारम्भ।
(iii) 5 + 5 = 10 अतः 5 के पूर्व अंक 8 पर एकाधिक चिह्न। शेष **=10–10=0**
(iv) शेष **0+2+5=7** लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर।
(v) इसी प्रकार आगे करें।

2. स्तम्भ संख्या रचना पूरी करने के बाद सूत्र द्वारा पूर्ण संख्याओं की भाँति योग कर दिया जाता है।

3. मापन इकाई समय (घं., मि., सै.) के प्रश्नों में योग करते हुए मिनट व सैकण्ड के प्रथम स्तम्भ में आधार =10 व द्वितीय स्तम्भ में आधार =6 लेना चाहिये। घंटे के स्तम्भों में आधार =10 ही लिया जाता है।

(ii) मौखिक योग संक्रिया : (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण + शून्यान्त संख्या प्रयोग)

अल्प अभ्यास से उपरोक्त सूत्र–प्रयोग आधारित विधि के द्वारा बड़ी–बड़ी संख्याओं का योग द्रुत गति से मौखिक ज्ञात किया जा सकता है। शून्यान्त संख्या प्रयोग भारतीय प्राचीन गणित की एक विशेष विधि है जो बड़ी सरल तथा योग संक्रिया में प्रभावी है। इस विधि में इकाई–दहाई दो–दो अंकों की संख्याओं का विशेष प्रकार से योग किया जाता है। आवश्यकता पड़ने पर तीन–तीन अंकों (इकाई–दहाई–सैकड़ा) वाली संख्याओं का योग भी किया जा सकता है।

विधि :– दो संख्याओं में से एक संख्या को शून्यान्त बनाइए। इसकी न्यूनता को दूसरी संख्या से पूरा कीजिए। दोनों नई संख्याओं को जोड़िये। प्राप्त योगफल यदि 100 से अधिक हो तो निश्चित पूर्व अंक पर एकाधिक चिह्न लगाइये। शेषफल को अगली संख्या में जोड़िये। अन्त में अन्तिम शेषफल को उत्तर के स्थान पर लिखिए। अगले दो स्तम्भों में उपरोक्त क्रिया की आवृत्ति कीजिए। देखिए निम्न उदाहरण।

उदाहरण (1) 35 और 58 को जोड़िये।

हल : 58 को शून्यान्त संख्या 60 बनाने के लिये 2 की आवश्यकता पड़ी। यह 2 की न्यूनता 35 में से पूरी की। अतः

$35+58=33+2+58=33+60=93$

उदाहरण (2) 19 और 65 को जोड़िये।

हल : $19+65=19+1+64=20+64=84$

टिप्पणी : इसी प्रकार अनेक संख्याओं को जोड़ा जा सकता है।

उदाहरण (3) योग कीजिए।

$$\begin{array}{r} 4998 \\ \dot{0}6\dot{7}89 \\ \dot{7}15 \\ \dot{0}4837 \\ \dot{0}8\dot{9}76 \\ \hline 31315 \\ \hline \end{array}$$

संकेत :

(i) $98+89=98+2+87=100+87=187$

अतः 89 से पूर्व अंक 7 पर एकाधिक चिह्न।

(ii) शेष $87+15=87+3+12=90+12=102$

अतः 15 से पूर्व अंक 7 पर एकाधिक चिह्न।

(iii) शेष $02+37=39$

तथा $39+76=35+4+76=35+80$

$=15+20+80=115$

अतः 76 से पूर्व अंक 9 पर एकाधिक चिह्न तथा 15 नीचे उत्तर में लिखा।

(iv) शेष योग संक्रिया उपरोक्त समान।

उदाहरण (4) योग कीजिए।

$$\begin{array}{r} 7534 \\ 2459 \\ \dot{0}1\dot{9}32 \\ 6547 \\ \hline 18472 \\ \hline \end{array}$$

संकेत :

(i) $34+59=33+1+59=33+60=93$

(ii) शेष $93+32=93+7+25=100+25=125$

अतः अंक 9 पर एकाधिक चिह्न।

(iii) शेष $25+47=22+3+47=22+50=72$ लिखा उत्तर के स्थान पर।

(iv) शेष योग संक्रिया उपरोक्त समान।

(iii) व्यवकलन संक्रिया :

पिछली कक्षा में हमने व्यवकलन संक्रिया की दो वैदिक विधियों का अध्ययन किया था।

1. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण परम मित्र अंक आधारित विधि
2. सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण परम मित्र अंक आधारित विधि

प्रथम विधि द्वारा व्यवकलन संक्रिया का मापन इकाई अथवा पूर्ण संख्या का प्रत्येक प्रश्न हल किया जा सकता है।

अतः इसी विधि पर पुनः विचार किया जा रहा है। हमें ज्ञात है कि दो अंक एक दूसरे के परममित्र अंक होते हैं यदि उनका योग दस होता है तथा वियोज्य वह संख्या है कि जिसमें से कोई संख्या घटायी जाती है और घटायी जाने वाली संख्या वियोजक कहलाती है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (1) वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{r} 800 \\ -\,\dot{2}\dot{6}3 \\ \hline 537 \\ \hline \end{array}$$

संकेत :

(i) 0 में से 3 नहीं घटता अतः 3 के परम मित्र अंक 7 को उसी अंक 0 में जोड़ा। योग 7 नीचे लिखा तथा पूर्व वियोजक अंक 6 पर एकाधिक चिह्न।

(ii) 0 में से $\dot{6}=7$ नहीं घटता अतः 7 के परम मित्र अंक 3 को उसी अंक 0 में जोड़ा। योग 3 नीचे लिखा तथा पूर्व वियोजक अंक 2 पर एकाधिक चिह्न।

(iii) $8-\dot{2}=5$ लिखा नीचे अतः शेषफल = 537

उदाहरण (2) वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिए।

किमी.	मी.	सेमी.
37	467	35
$\dot{2}8$	$\dot{3}\dot{7}5$	$\dot{4}6$
09	091	89

संकेत :

(i) मीटर–सेन्टीमीटर मे स्तम्भ संख्या व्यवस्थित।
(ii) सेमी स्तम्भ : 5 में से 6 नहीं घटता अतः 6 का परममित्र अंक 4 को 5 में जोड़ा।
(iii) योग लिख़ा नीचे और पूर्व वियोजक अंक 4 पर एकाधिक चिह्न लगाया।
(iv) 3 में से $\dot{4}=5$ नहीं घटता अतः वियोज्य अंक 3 में 5 जोड़ा।
(v) योग $=8$ लिखा नीचे तथा पूर्व वियोजक अंक 5 पर लगाया एकाधिक चिह्न।
(vi) $7-\dot{5}=1$ लिखा नीचे।
(vii) 6 में से 7 नहीं घटता अतः 6 में 3 जोड़कर योग $=9$ लिखा नीचे तथा वियोजक अंक 3 पर एकाधिक चिह्न।
(viii) $4-\dot{3}=0$ लिखा नीचे।
(ix) आगे की क्रियाएं इसी प्रकार की जायेंगी।
क्रिया पूरी होने पर शेषफल $=9$ किमी. 91 मी. 89 सेमी.

(iv) **गुणन संक्रिया :**

गुणन संक्रिया के चार मुख्य सूत्र आधारित विधियों का हमने पिछली कक्षा में विस्तार से अध्ययन किया था। इन विधियों पर हमारा इतना अच्छा अभ्यास चाहिये कि गुणन संक्रिया का कोई प्रश्न देखते ही शीघ्र हल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का हम चयन कर सकें। देखिए निम्न उदाहरण।

उदाहरण (1) 588×512 का सरलता से गुणनफल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का चयन कीजिए।

प्रथम हल : इस गुणन संक्रिया में क्या सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण श्रेष्ठ सूत्र हो सकता है?

इकाई–दहाई वाले अंकों का योग $=88+12=100$ तथा शेष निखिलम् अंक परस्पर समान $=5$ अतः सूत्र प्रभावी। सूत्रानुसार

$588\times512=5\times6/88\times12$ (दाहिने पक्ष में चार अंक)

$=301056$

द्वितीय हल : गुणन संक्रिया में सूत्र निखिलम्–उपाधार का परीक्षण

$$\begin{aligned} & 588\times512 \\ = \; & \begin{array}{ll} 588 & +88 \\ \times512 & +12 \end{array} \\ \hline & =5(588+12)/88\times12 \\ & =5\times600/_{10}56 \\ & =3000/_{10}56=301056 \end{aligned}$$

संकेत :

(i) आधार $=100$

(ii) उपाधार $=100\times5$

(iii) उपाधार अंक $=5$

(iv) विचलन $=+88$ तथा $+12$

(v) दक्षिण पक्ष में दो अंक तथा सूत्र प्रभावी।

तृतीय हल : 588×512 में सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण प्रभावी ही नहीं है क्योंकि दोनों संख्याओं में एक संख्या 9 अंक वाली नहीं है।

चतुर्थ हल : 588×512 का गुणनफल सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$\begin{array}{r} 5\,8\,8 \\ \times\,5\,1\,2 \\ \hline 2\,5\,5\,8\,4\,6 \\ 4\,5\,2\,1\;\; \\ \hline =3\,0\,1\,0\,5\,6 \end{array}$$

प्रश्न में तीन स्तम्भ हैं। अतः पांच समूह बनेंगे अर्थात् पांच गुणनफल ज्ञात कर विशेष पद्धति से लिखकर, उन्हें जोड़ा जायेगा।

परिणाम 1. प्रथम, द्वितीय तथा चतुर्थ हल देखने पर एक बात निश्चित है कि $588\times512=301056$.

2. प्रथम हल में उत्तर सरलता से ज्ञात हुआ अतः इस प्रश्न में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण का चयन श्रेष्ठ रहेगा।

उदाहरण 2. 842×858 में सरलता से गुणनफल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का चयन कीजिए।

हल : (i) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण प्रभावी नहीं है क्योंकि गुणनफल के दाहिने पक्ष में 42×58 का गुणन सरलता से ज्ञात नहीं हो सकता।

(ii) सूत्र निखिलम् आधार भी प्रभावी नहीं हो सकता क्योंकि आधार 1000 मानने पर विचलन क्रमशः -158 तथा -142 आते हैं। निखिलम्–उपाधार भी प्रभावी नहीं है क्योंकि उपाधार $=800$ मानने पर भी विचलन क्रमशः 42 और 58 आते हैं।

(iii) सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण भी प्रभावी नहीं है।

(iv) सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक गुणन संक्रिया के लिये व्यापक एवं प्रभावी सूत्र है। अंक बड़े होने के कारण गणना कठिन हो सकती है अतः नया विकल्प विचारणीय है।

(v) **नया विकल्प :** 842×858 का गुणनफल ज्ञात करने के लिये प्रारम्भ में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण का प्रयोग तथा बाद में सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक का प्रयोग श्रेष्ठ रहेगा।

संकेत :

$$\begin{aligned} & 842\times858 \\ & =8\times9/42\times58 \\ & =72/2436 \\ & =722436 \end{aligned}$$

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक से मौखिक

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times58 \\ \hline 2436 \\ \hline \end{array}$$

(v) गुणन संक्रिया विस्तार : (सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक + विनकुलम प्रयोग)

बड़े–बड़े अंकों की दो संख्याओं का गुणनफल सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक एवं विनकुलम प्रयोग द्वारा सरलता से प्राप्त किया जा सकता है। विनकुलम प्रयोग (निखिलम् विधि) से 5 से बड़े अंकों की संख्या को छोटे अंकों $(0,1,2,3,4,5)$ की संख्या में बदल कर सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक से गुणा किया जाता है तथा अन्त में प्राप्त ऋणांक युक्त गुणनफल को फिर से सामान्य संख्या में बदल दिया जाता है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (1) 842×858

संकेत :

(i) निखिलम् विधि से बड़े अंकों को छोटे अंकों में बदला।

(ii) ऊर्ध्वतिर्यक विधि से गुणन किया।

(iii) प्राप्त गुणनफल के ऋणांकों को निखिलम् विधि से पुनः सामान्य संख्या में बदला।

$$
\begin{array}{rl}
= & 1\bar{2}42 \times 1\bar{1}\bar{4}\bar{2} \\
= & 1\bar{2}42 \\
 & \times 1\bar{1}\bar{4}\bar{2} \\
= & 1\,\bar{3}\,2\,4\,\bar{4}\;\bar{6}\;\bar{4} \\
 & \qquad\;\; \bar{1}\,\bar{1} \\
= & 1\,\bar{3}\,2\,3\,\bar{5}\;\bar{6}\;\bar{4} \\
= & 7\,2\,3\,\bar{5}\,\bar{6}\,\bar{4} \\
= & 7\,2\,2\,4\,3\,6
\end{array}
$$

उदाहरण (2) 966×973

$$
\begin{array}{rl}
= & 10\bar{3}\bar{4} \times 10\bar{3}3 \\
= & 10\bar{3}\bar{4} \\
 & \times 10\bar{3}3 \\
\hline
= & 10\bar{6}\bar{1}93\bar{2} \\
 & \qquad\quad \bar{1} \\
\hline
= & 10\bar{6}\bar{1}92\bar{2} \\
= & 939918
\end{array}
$$

संकेत :

(i) निखिलम् विधि द्वारा

$$
\begin{array}{lcl}
0973 & & 0966 \\
= \dot{0}0\bar{3}3 & \text{तथा} & = \dot{0}0\bar{3}4 \\
= 10\bar{3}3 & & = 10\bar{3}\bar{4}
\end{array}
$$

(ii) इसी प्रकार

$2\bar{2} = 18$ तथा $10\bar{6}\bar{1} = 939$

ध्यातव्य : सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक द्वारा बड़ी–बड़ी संख्याओं का गुणनफल मौखिक ज्ञातकर उसे एक पंक्ति में लिखने का अभ्यास करना चाहिये

(v) भाग संक्रिया

पिछली कक्षा में हमने निम्न तीन सूत्रों पर आधारित भाग की विधियों का विस्तार से अध्ययन किया था।

1. सूत्र निखिलम्
2. सूत्र परावर्त्य योजयेत्
3. सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक

जब भाजक में 5 से बड़े अंक होते हैं तथा आधार 10 या 10 की घात (उपाधार नहीं) के सापेक्ष भाजक की पूरक संख्या ज्ञात हो सकती है, तब ही सूत्र निखिलम् आधारित भाग की विधि प्रभावी होती है। इस विधि में मुख्य क्रिया भाजक की पूरक संख्या द्वारा ही होती है। यदि भाजक में 5 से छोटे अंक होते हैं अथवा लाये जा सकते हैं तथा बांयी ओर से भी अंक 1 होता है अथवा लाया जा सकता है और आधार = 10 या 10 की घात (उपाधार नहीं) के सापेक्ष भाजक का विचलन ज्ञात किया जा सकता है, तब ही सूत्र परावर्त्य योजयेत् आधारित भाग की विधि प्रभावी होती है। तीनों विधियों में से केवल यही भाग की विधि बीजगणित में प्रयोग में लायी जाती है। सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक आधारित ध्वजांक विधि द्वारा भाग संक्रिया का प्रत्येक प्रश्न हल किया जा सकता है। इस विधि में किसी भी भाजक के मुख्यांक तथा ध्वजांक का चयन बड़ा महत्वपूर्ण है। ध्वजांक कितने भी अंकों का हो सकता है। मुख्यांक में भी अनेक अंक हो सकते हैं यदि उसका भाग भाज्य–संशोधित भाज्य में सरलता से जाता है। ध्वजांक में जितने अंक हैं उतने ही इकाई की तरफ से भाज्य के अंक तृतीय खण्ड में तथा शेष अंक मध्य खण्ड में रखे जाने चाहिये। निम्न उदाहरणों से विधि को स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (1) $98765 \div 87$ **(ध्वजांक विधि)**

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
7 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\
8 & & 1 & 3 & 6 & 5 \\
\hline
 & 1 & 1 & 3 & 5 & 55 - 5 \times 7 = 20
\end{array}
$$

संकेत :

(I) भाजक $= 87$, मुख्यांक $= 8$, ध्वजांक $= 7$

(ii) तृतीय खण्ड में भाज्य का एक अंक $= 5$

(iii) 9 ÷ 8, भागफल प्रथम अंक =1, शेषफल =1

(iv) नयाभाज्य =18, संशोधित भाज्य

(v) 11 ÷ 8, भागफल द्वितीय अंक =1, शेषफल =3

(vi) नयाभाज्य = 37, संशोधित भाज्य

(vii) 30 ÷ 8, भागफल तृतीय अंक = 3, शेषफल = 6

(viii) नया भाज्य 66, संशोधित भाज्य

(ix) 45 ÷ 8, भागफल चतुर्थ अंक = 5, शेषफल = 5

(x) नया भाज्य 55,

संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल

भागफल = 1135, शेषफल = 20

उदाहरण (2) 13579 ÷ 975 (ध्वजांक विधि)

$$\begin{array}{r|rr|l} 75 & 13 & 5 & \quad 79 \\ 9 & & 4 & 11 \\ \hline & 1 & 3 & 1179-260-15=904 \end{array}$$

संकेत : (i) 13 ÷ 9, भागफल प्रथम अंक = 1, शेषफल = 4

(ii) नया भाज्य = 45, संशोधित भाज्य $= 45 - 1 \times 7 = 38$

(iii) 38 ÷ 9, भागफल द्वितीय अंक= 4, शेषफल = 2

(iv) नया भाज्य = 27,

संशोधित भाज्य $= 27 - (4 \times 7 + 1 \times 5) = 27 - 33 = -6$

क्योंकि संशोधित भाज्य ऋणात्मक आया है अतः भागफल द्वितीय अंक 4 न लेकर 3 लेना सुविधाजनक रहेगा। इसी कारण क्रिया पद (iii) एवं (iv) निरस्त करने योग्य हैं।

(v) पुनः 38 ÷ 9, भागफल द्वितीय अंक = 3, शेषफल = 11

(vi) नया = 1179 भाज्य अतः संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल

$= 1179 - (3 \times 7 + 1 \times 5) \times 10 - 3 \times 5 = 1179 - 260 - 15 = 904$

अतः भागफल = 13, शेषफल = 904

उदाहरण (3) 21015 ÷ 879 (ध्वजांक विधि)

भाजक = 879, मुख्यांक = 8, ध्वजांक = 79

क्योंकि ध्वजांक में बड़े अंक हैं, भाग की गणना कठिन हो जायेगी अतः भाजक 879 को विनकुलम (निखिलम्) विधि से छोटे अंकों में बदला।

$879 = \dot{8}\bar{2}\bar{1} = 9\bar{2}\bar{1}$

अब मुख्यांक = 9 तथा ध्वजांक = $\bar{2}\bar{1}$

$$\begin{array}{r|rr|l} \bar{2}\,\bar{1} & 21 & 0 & \quad 15 \\ 9 & & 3 & 7 \\ \hline & 2 & 3 & 715+80+3=798 \end{array}$$

संकेत :

(I) 21 ÷ 9, भागफल प्रथम अंक = 2, शेषफल = 3

;ii) नया भाज्य = 30, संशोधित भाज्य $= 30 - 2 \times \bar{2} = 34$

(iii) 34 ÷ 9, भागफल द्वितीय अंक = 3, शेषफल = 7

(iv) नया भाज्य = 715, संशोधित भाज्य अथवा

अन्तिम शेषफल $=715-\left(3\times\bar{2}+2\times\bar{1}\right)10-3\times\bar{1}$

$=715+80+3=798$

अत: भागफल = 23, शेषफल = 798

उदाहरण (4) 7453 ÷ 79

$\bar{1}$	74 5	3
8	2	2
	9 4	$23+4=27$

संकेत :

(i) भाजक $79=8\bar{1}$, मुख्यांक = 8, ध्वजांक = $\bar{1}$

(ii) $74\div 8$, भागफल प्रथम अंक = 9, शेषफल = 2

(iii) नया भाज्य = 25, संशोधित भाज्य= $25+9=34$

(iv) $34\div 8$, भागफल द्वितीय अंक = 4, शेषफल = 2

(v) नया भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल

भागफल = 94, शेषफल = 27

टिप्पणी : 1. क्रिया पद (iii) देखिए।

नया भाज्य = 25, संशोधित भाज्य $=25-9\times\bar{1}=25+9=34$

= नया भाज्य + पिछला भागफल अंक

2. जिसभी भाजक में इकाई अंक 9 हो, उस प्रश्न में संशोधित भाज्य = नया भाज्य + पिछला भागफल अंक लिया जा सकता है। मुख्यांक के चयन में सावधानी रखना आवश्यक है।

3. जिस भाजक में इकाई अंक 1 हो, उस प्रश्न में संशोधित भाज्य = नया भाज्य – पिछला भागफल अंक लिया जाता है।

4. उपरोक्त दोनों प्रकार के प्रश्नों में संकेत लिखने की आवश्यकता नहीं है।

उदाहरण (5) 43758972÷ 81

मुख्यांक = 8, ध्वजांक = 1, देखिए ध्यातव्य बिन्दु क्र. (3)

1	43 7 5 8 9 7	2
8	3 0 1 2 3	2
	5 40 2 3 4	$22-4=18$

भागफल = 540234 शेषफल = 18

पुनरावृत्ति

प्रश्नमाला 1.1

योग कीजिए। (शून्यान्त संख्या विधि)

1.
837873
658470
746854
983289
493075
565401

2.
329736
465728
623999
554321

वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिए।

3.
$$\begin{array}{r} 98356 \\ 70467 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{ccc} \text{घ·} & \text{मि·} & \text{से·} \\ 31 & 26 & 25 \\ 18 & 58 & 57 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

गुणा कीजिए :

5.	$31\frac{1}{6}\times 31\frac{5}{6}$	6.	103×197	सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण
7.	54×56	8.	108×112	सूत्र निखिलम्
9.	137×9999	10.	46×99	सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण
11.	362×143	12.	2413×3124	सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक

भाग दीजिए :

13.	$111034\div 889$	14.	$3994\div 97$	सूत्र निखिलम्
15.	$2112\div 97$	16.	$13385\div 131$	सूत्र परावर्त्य
17.	$592837\div 119$	18.	$58764\div 59$	सूत्र ध्वजांक
19.	$92358\div 151$	20.	$12345\div 91$	सूत्र ध्वजांक

1.04 वर्ग संक्रिया

वर्ग एक विशेष गुणन संक्रिया है कि जिसमें एक संख्या का उसी संख्या से एक बार गुणा होता है जैसे $x\times x = x^2 = x$ वर्ग, गुणन संक्रिया के जिस सूत्र का छात्र को अच्छा अभ्यास हो, उसी सूत्र से वह किसी भी संख्या का वर्ग ज्ञात कर सकता है। वर्ग संक्रिया निम्न सूत्र–उपसूत्रों द्वारा सम्पन्न की जा सकती है।

1. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण
2. उपसूत्र आनुरुप्येण
3. सूत्र निखिलम् (आधार–उपाधार) अथवा यावदूनम् तावदूनी कृत्य वर्ग च योजयेत्
4. सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक (द्वन्द्वयोग विधि)
5. सूत्र संकलन–व्यवकलन (इष्ट संख्या विधि)

उपरोक्त सूत्र–उपसूत्रों में से पिछली कक्षा में हमने सूत्र निखिलम्–आधार तथा सूत्र निखिलम् –उपाधार तथा सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक आधारित विधियों का विस्तार से अध्ययन किया है। यावदूनम् तावूदनी कृत्य वर्ग च योजयेत् सूत्र निखिलम् का ही एक उपसूत्र है जो किसी आधार अथवा उपाधार के निकट की संख्याओं का वर्ग ज्ञात करने के काम आता है। सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक आधारित द्वन्द्वयोग विधि द्वारा किसी भी संख्या का वर्ग ज्ञात किया जा सकता है।

1. **सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण** आधारित विधि उन्हीं संख्याओं का वर्ग ज्ञात कर सकती है, जिनका इकाई अंक या चरमंअंक 5 होता है। वर्ग ज्ञात करने में इस सूत्र का प्रयोग सीमित है।

उदाहरण : **(1)** $15^2 = 1\times 2/5\times 5 = 225$

(2) $35^2 = 3\times 4/5\times 5 = 1225$

(3) $95^2 = 9\times 10/5\times 5 = 9025$

(4) $205^2 = 20\times 21/5\times 5 = 42025$

2. **उपसूत्र आनुरुप्येण** का अर्थ 'समानुपात अथवा अनुरूपता द्वारा' 1 उपसूत्र द्वारा दो अंकों की संख्या का वर्ग ज्ञात करना ही सुविधाजनक होता है।

विधि को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (1) 41 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

$$
\begin{array}{lccc}
41^2 = & 16 & 4 & 1 \\
 & & +4 & \\
\hline
= & 16 & 8 & 1 \\
=1681 & & &
\end{array}
$$

संकेत :

(i) उत्तर के लिए तीन खण्ड बनाइए।

;(ii) प्रथम खण्ड में दहाई अंक का वर्ग = 16

(iii) तृतीय खण्ड में इकाई अंक का वर्ग = 1

(iv) मध्य खण्ड में दोनों अंकों का गुणनफल $=1\times 4=4$

(v) मध्य खण्ड में प्राप्त गुणनफल को फिर एक बार नीचे लिखिए

(vi) योगफल ही संख्या का अभीष्ट वर्ग है। मध्य खण्ड और तृतीय खण्ड में एक–एक अंक ही लिखा जायेगा।

उदाहरण (2)

$$
\begin{array}{lccc}
74^2 = & 49 & 28 & 16 \\
 & & +28 & \\
= & 49 & 56 & 16 \\
=5476 & & &
\end{array}
$$

उदाहरण (3) 27, 51 व 83 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

$$
\begin{array}{lcccl}
27^2 = & 4 & 14 & 49 & \\
 & & +14 & & \\
= & 4 & 28 & 49 & \\
= & 729 & & & \\
51^2 = & 25 & 5 & 1 & \\
 & & +5 & & \\
= & 26 & 0 & 1 & =2601 \\
83^2 = & 64 & 24 & 9 & \\
 & & +24 & & \\
= & 68 & 8 & 9 & =6889
\end{array}
$$

3. **उपसूत्र यावदूनम् तावदूनी कृत्य वर्ग च योजयेत्** का अर्थ है कि आधार अथवा उपाधार के सापेक्ष किसी संख्या में जो न्यूनता अथवा अधिकता हो,उस न्यूनता अथवा अधिकता को उस संख्या में से कम–अधिक कर उसमें उसका वर्ग जोड़ दीजिए। न्यूनता अथवा अधिकता को विचलन भी कहा जाता है।

विचलन = संख्या – आधार अथवा उपाधार

न्यूनता को ऋण विचलन तथा अधिकता को धन विचलन कहा जाता है। उपसूत्र की आधार विधि तथा उपाधार विधि को पुनः उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (1) उपसूत्र यावदूनम् द्वारा 17, 95, 32 तथा 225 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

आधार विधि :

(i) $17^2 = 17+7/7^2$ आधार = 10, विचलन $=+7$

$= 24/_4 9 = 289$

(ii) $95^2 = 95-05/(-05)^2$ आधार = 100, विचलन $=-05$

$=9025$

उपाधार विधि :

(iii) $32^2 = 3(32+2)/(2)^2$ आधार = 10,

$= 3 \times 34/4$ उपाधार $= 10 \times 3$

$= 1024$ विचलन $= +2$

(iv) $225^2 = 2(225+25)/25^2$ आधार = 100,

$= 500/_6 25$ उपाधार $= 100 \times 2$

$= 50625$ विचलन = +25

4. **सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक आधारित द्वन्द्वयोग विधि** से कितने भी अंकों की संख्या का वर्ग सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक द्वारा दो संख्याओं के गुणन में समूह के अनुसार जो गुणनफल प्राप्त होता है, वहीं द्वन्द्वयोग का मान होता है। जैसे

(i) एक अंक की संख्या का द्वन्द्वयोग = उस संख्या का वर्ग

जैसे 4 का द्वन्द्वयोग $= 4^2 = 16$

(ii) दो अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग = दोनों अंकों का गुणा $\times 2$

जैसे 26 का द्वन्द्वयोग $= 2 \times 6 \times 2 = 24$

(iii) तीन अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग

= प्रथम अंक $\times$ तृतीय अंक $\times 2 +$ (मध्य अंक)^2

जैसे 234 का द्वन्द्वयोग $= 2 \times 4 \times 2 + 3^2 = 25$

(iv) चार अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग

= प्रथम अंक $\times$ चौथा अंक $\times 2 +$ द्वितीय अंक $\times$ तृतीय अंक $\times 2$

जैसे 7156 का द्वन्द्वयोग $= 7 \times 6 \times 2 + 1 \times 5 \times 2 = 84 + 10 = 94$

(v) पांच अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग

= प्रथम अंक $\times$ पंचम अंक $\times 2 +$ द्वितीय अंक $\times$ चतुर्थ अंक

$\times 2 +$ (मध्य अंक)^2

जैसे 23456 का द्वन्द्वयोग $= 2 \times 6 \times 2 + 3 \times 5 \times 2 + 4^2$

$= 24 + 30 + 16 = 70$

वर्ग ज्ञात करने की द्वन्द्वयोग विधि :

(1) सर्व प्रथम वर्ग ज्ञात करने वाली संख्या के अंक समूह बनाइए।

(2) अंक समूहों के द्वन्द्वयोग ज्ञात कर उन्हें उसी क्रम में लिखिए।

(3) इकाई अंक की ओर से योग कीजिए। एक खण्ड में एक अंक रखिये। योगफल ही अभीष्ट संख्या का वर्ग है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण : द्वन्द्वयोग विधि से निम्न संख्याओं का वर्ग कीजिए।

(i) 27   (ii) 354   (iii) 1234   (iv) 24501

हल : (i) 27 के अंक समूह बने तीन 2, 27 तथा 7 इन अंक समूहों के द्वन्द्वयोग तीन खण्डों में लिखने पर

$$27^2 = 2^2/2 \times 7 \times 2/7^2$$
$$= 4/_2 8/_4 9 = 729$$

(ii) 354 के अंक समूह बने पांच जैसे 3, 35, 354, 54 तथा 4 अतः इन अंक समूहों के द्वन्द्वयोग पांच खण्डों में लिखने पर

$$354^2 = 3^2/3 \times 5 \times 2/3 \times 4 \times 2 + 5^2/5 \times 4 \times 2/4^2$$
$$= 9/_3 0/_4 9/_4 0/_1 6 = 125316$$

(iii) 1234 के अंक समूह बने सात 1, 12, 123, 1234, 234, 34 तथा 4

इन अंक समूहों के द्वन्द्वयोग सात खण्डों में लिखने पर

$$1234^2 = 1^2/1\times2\times2/1\times3\times2+2^2/1\times4\times2+2\times3\times2/2\times4\times2+3^2/3\times4\times2/4^2$$

$$=1/4/_1 0/_2 0/_2 5/_2 4/_1 6$$

$$=1522756$$

(iv) 24501 के अंक समूह बने नौ। इन नौ अंक समूहों के द्वन्द्वयोग नौ खण्डों में लिखने पर

$$24501^2 = 4/_1 6/_3 6/_4 0/2\times1\times2+4\times0\times2+5^2/8/_1 0/0/1$$

$$=4/_1 6/_3 6/_4 0/_2 9/8/_1 0/0/1$$

$$=600299001$$

5. **इष्ट संख्या विधि :** यदि संख्या x तथा इष्ट a संख्या हो तो $x^2=(x+a)(x-a)+a^2$ सूत्र द्वारा किसी भी संख्या का वर्ग ज्ञात किया जा सकता है। भास्कराचार्य द्वितीय रचित 'लीलावती' में किसी संख्या का वर्ग ज्ञात करने की इस विधि को 'इष्ट संख्या विधि' का नाम दिया गया है। वैदिक गणित में यह विधि सूत्र संकलन–व्यवकलन आधारित विधि भी मानी जाती है। जब संख्या में इष्ट संख्या जोड़ने या घटाने से एक शून्यान्त संख्या प्राप्त होती है तब यह विधि अधिक, प्रभावी होती है तथा उपसूत्र यावदूनम् तावदूनी कृत्य वर्ग च योजयेत् का रूप ले लेती है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण : इष्ट संख्या विधि से वर्ग ज्ञात कीजिए।

(1) $12^2=(12+2)(12-2)+2^2$ इष्ट संख्या $=2$

$$=14\times10+4$$

$$=144$$

(2) $107^2=(107+7)(107-7)+7^2$ इष्ट संख्या $=7$

$$=114\times100+49$$

$$=11449$$

(3) $39^2=(39+1)(39-1)+1^2$ इष्ट संख्या $=1$

$$=40\times38+1$$

$$=1520+1=1521$$

(4) $247^2=(247+3)(247-3)+3^2$ इष्ट संख्या $=3$

$$=250\times244+9$$

$$=61000+9$$

$$=61009$$

1.05 घनफल संक्रिया

वैदिक गणित में किसी संख्या का घनफल ज्ञात करने की सरल एवं महत्वपूर्ण विधियाँ निम्न सूत्र–उपसूत्र आधारित हैं।

(1) सूत्र निखिलम् (आधार–उपाधार)

(2) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण

(3) उपसूत्र आनुरुप्येण

(1) सूत्र निखिलम् (आधार–उपाधार)

पिछली कक्षा में सूत्र निखिलम् आधारित विधियों द्वारा आधार अथवा उपाधार के निकट की संख्याओं का घनफल ज्ञात करना सिखाया गया था। इन विधियों को उपसूत्र ''यावदूनम् तावदूनी'' आधारित विधियाँ भी कहते हैं।

आधार विधि : इस विधि में गुणन संक्रिया के तीन खण्ड किये जाते हैं। बांयी तरफ से प्रथम खण्ड में संख्या विचलन का दुगना लिखा जाता है। मध्य खण्ड में विचलन के वर्ग में तीन का गुणा किया जाता है। तृतीय खण्ड में विचलन का घन लिखा जाता है। मध्य व तृतीय खण्ड में आधार के सापेक्ष अंक संख्या रखी जाती है जैसे आधार 10 हो तो एक–एक अंक अथवा आधार 100 हो तो दो–दो अंक। तीनों खण्डों को एक साथ लेने पर प्राप्त सूत्र

$$\text{घनफल} = \text{संख्या} + (\text{विचलन})\times 2/3\times(\text{विचलन})^2/(\text{विचलन})^3$$

जबकि विचलन = संख्या – आधार अथवा उपाधार

विधि को निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण : संख्याएँ 15, 98, 109 तथा 1011 का घनफल ज्ञात कीजिए।

(1) 15^3

$= 15 + 2\times 5/3\times 5^2/5^3$

$= 25/_7 5/_{12} 5$

$= 3375$

संकेत :

(i) आधार = 10, विचलन $= +5$

(ii) मध्य व तृतीय खण्ड में एक–एक अंक

(2) 98^3

$= 98 + (-02)\times 2/3\times(-02)^2/(-02)^3$

$= 94/12/-08$

$= 94/11/100-08$

$= 941192$

संकेत :

(i) आधार = 100, विचलन $= -02$

(ii) मध्य व तृतीय खण्ड में दो–दो अंक

(iii) मध्य खण्ड का अंक 1 = आधार 100 तृतीय खण्ड में।

(3) 109^3

$= 109 + (09)\times 2/3\times(09)^2/(09)^3$

$= 127/_2 43/_7 29$

$= 1295029$

(4) 1011^3

$= 1011 + 2\times(011)/3\times(011)^2/(011)^3$

$= 1033/363/_1 331$

$= 1033364331$

संकेत :

(i) आधार = 1000

(ii) विचलन = + 01

(iii) मध्य व तृतीय खण्ड में तीन–तीन अंक

उपाधार विधि : आधार विधि के समान इस विधि में भी गुणन संक्रिया के तीन खण्ड होते हैं।

(1) प्रथम खण्ड $=$ (उपाधार अंक)^2 (संख्या $+$ विचलन $\times 2$)

(2) मध्य खण्ड $=$ उपाधार अंक $\times 3 \times$ (विचलन)^2

(3) तृतीय खण्ड $=$ (विचलन)^3

(4) आधार में जितने शून्य, उतने ही अंक मध्य एवं तृतीय खण्ड में रखे जाते हैं।

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण : संख्याएँ 24, 305 तथा 401 के घनफल ज्ञात कीजिए।

(1) 24^3

$= 2^2\,(24+4\times 2)/2\times 3\times 4^2/4^3$

$= 4\times 32/6\times 16/64$

$= 128/_9 6/_6 4$

$= 13824$

संकेत :

(i) आधार = 10, उपाधार $= 10\times 2$

(ii) उपाधार अंक = 2, विचलन $= +4$

(2) 305^3

$= 3^2\,(305+2\times 05)/3\times 3\times (05)^2/(05)^3$

$= 9\times 315/_2 25/_1 25$

$= 2835/_2 25/_1 25$

$= 28372625$

संकेत :

(i) आधार = 100, उपाधार $= 100\times 3$

(ii) उपाधार अंक = 3, विचलन $= +05$

(iii) मध्य व तृतीय खण्ड में दो–दो अंक

(3) 401^3

$= 4^2\,(401+2\times 01)/4\times 3\times (01)^2/(01)^3$

$= 16\,(403)/12/01$

$= 64481201$

संकेत :

(i) आधार $= 100$, उपाधार $= 100\times 4$

(ii) उपाधार $= 4$, अंक विचलन $= +01$

(2) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण :

सूत्र द्वारा दो अंकों की किसी भी संख्या का घनफल ज्ञात किया जा सकता है।

विधि : गुणन संक्रिया को चार खण्डों में लिखिए।

बांये से प्रथम खण्ड = दहाई अंक का वर्ग $\times$ उसका एकाधिक

द्वितीय खण्ड = दहाई अंक का वर्ग $\times$ विचलन

तृतीय खण्ड = $3\times$ दहाई अंक $\times$ (इकाई अंक)^2

चतुर्थ खण्ड =(इकाई अंक)^3 जहाँ विचलन = इकाई अंक $\times 3-10$

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण : सूत्र द्वारा 43, 67 तथा 105 का घनफल ज्ञात कीजिए।

(1) $43^3 = 4^2\times 5/4^2\,(3\times 3-10)/3\times 4\times 3^2/3^3$

$= 80/-16/108/27$

$= 78/20-16/_{10}8/_{2}7$

$= 78/4/_{10}8/_{2}7$

$= 79507$

संकेत :

(i) आधार = 10,
विचलन $= 3\times 3-10 = -1$

(ii) प्रथम खण्ड में 2 का मान
= द्वितीय खण्ड के 20

(2) $67^3 = 6^2\times 7/6^2\times 11/3\times 6\times 7^2/7^3$

$= 36\times 7/36\times 11/18\times 49/343$

$= 252/_{39}6/_{88}2/_{34}3$

$= 300\ 763$

संकेत :
विचलन $= 7\times 3-10 = 11$

(3) $105^3 = 10^2\times 11/10^2\times 5/3\times 10\times 5^2/5^3$

$= 1100/500/750/125$

$= 1100/_{50}0/_{75}0/_{12}5$

$= 1157625$

(3) उपसूत्र आनुरुप्येण :

उपसूत्र आनुरुप्येण का अर्थ है अनुरूपता अथवा समानुपात द्वारा। घनफल संक्रिया में चार खण्ड होते हैं। उपसूत्र के अनुसार प्रथम तथा द्वितीय खण्ड में लिखी संख्याओं का वही अनुपात होता है जो द्वितीय तथा तृतीय खण्ड में लिखी संख्याओं का। तृतीय और चतुर्थ खण्ड के लिये भी यही अनुपात सत्य होता है। खण्डों में संख्याएं विधि अनुसार लिखें।

विधि :

1. उत्तर के लिए चार खण्ड बनाइए।
2. बाँयी ओर से प्रथम खण्ड में संख्या के दहाई अंक का घन तथा चतुर्थ खण्ड में संख्या के इकाई अंक का घन लिखें।
3. दूसरे खण्ड में दहाई अंक का वर्ग इकाई अंक लिखें।
4. तीसरे खण्ड में दहाई अंक इकाई अंक का वर्ग लिखें।
5. दूसरे एवं तीसरे खण्ड में प्राप्त गुणनफल का दुगना उन्हीं खण्डों में और जोड़िए।
6. द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थखण्ड में एक–एक अंक रहेगा। सबका योगफल ही अभीष्ट घनफल है।

   विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण : (1) उपसूत्र द्वारा 31 का घनफल ज्ञात कीजिए।

खण्ड		I	II	III	IV
31^3	=	3^3	$3^2\times 1$	3×1^2	1^3
	=	27	9	3	1
			+18	+6	
	=	27	27	9	1
	=	29791			

टिप्पणी : $27:9=9:3=3:1$ सदैव अनुपात समान

(2) 47 का घनफल ज्ञात कीजिए।

खण्ड	I	II	III	IV
47^3 =	64	112	196	343
		+224	+392	
	64	336	588	343

$= 64/_{33}6/_{58}8/_{34}3$

$= 103823$

(3) उपसूत्र द्वारा 92 का घनफल ज्ञात कीजिए।

खण्ड	I	II	III	IV
92^3 =	729	162	36	8
		+324	+72	
	729	486	108	8

$= 729/_{48}\ 6/_{10}\ 8/8$

$= 778688$

प्रश्नमाला 1.2

उपसूत्र यावदूनम् तावदूनी द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए।

1. 93 2. 106 3. 211 4. 405

उपसूत्र आनुरुप्येण द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए।

5. 16 6. 31 7. 24 8. 56

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए।

9. 45 10. 85 11. 115 12. 125

सूत्र संकलन–व्यवकलन द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए।

13. 23 14. 38 15. 69 16. 89

द्वन्द्वयोग द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए।

17. 362 18. 453 19. 4312 20. 2456

सूत्र निखिलम् द्वारा घनफल ज्ञात कीजिए।

21. 14 22. 97 23. 27 24. 395

उपसूत्र आनुरुप्येण द्वारा घनफल ज्ञात कीजिए।

25. 16 26. 33 27. 41 28. 52

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा घनफल ज्ञात कीजिए।

29. 45 30. 73 31. 24 32. 106

1.06 वर्गमूल

वर्गमूल संक्रिया वर्ग संक्रिया का विलोम है जैसे 10 का वर्ग = 100,

तो 100 का वर्गमूल $= \pm 10 = 10$ (निरपेक्ष मान)

वर्गमूल का गणितीय चिह्न :–

(i) $\sqrt{}$ वर्गमूल का चिह्न माना जाता है जैसे $\sqrt{100} = 10.$

(ii) किसी संख्या पर $\frac{1}{2}$ घातांक लगाने का अर्थ भी उस संख्या के वर्गमूल से है जैसे $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} =$ वर्गमूल x

अथवा $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} =$ वर्गमूल $100 = \pm 10$

वर्गमूल संख्या में अंक :–

अंक वाली पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल में $\frac{n}{2}$ अंक अथवा $\frac{n+1}{2}$ अंक होते हैं। जैसे चार अंक वाली पूर्ण वर्ग संख्या तथा तीन अंक वाली पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल में भी दो अंक होते हैं।

पूर्ण वर्ग संख्या की पहिचान :–

1. पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 1,4,5,6, अथवा 9 होता है।
2. पूर्ण वर्ग संख्या का बीजांक 1,4,7 अथवा 9 होता है।
3. जिस संख्या का इकाई अंक 2 या 8 तथा 3 या 7 हो, वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।
4. जिस संख्या का बीजांक 2,3,5,6 या 8 हो, वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।
5. जिस संख्या के अंत में एक या तीन या पाँच शून्य हों, तो वह संख्या भी पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।

वर्गमूल ज्ञात करने की वैदिक विधियाँ :–

प्रचलित गणित में किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने की भाग विधि भी वैदिक विधि है। यह विधि व्यापक, सरल, तथा शीघ्र वर्गमूल बताने में सक्षम है। यह भाग विधि और वैदिक गणित की द्वन्द्वयोग विधि दोनां एक ही समान सिद्धान्त पर आधारित हैं।

वर्गमूल ज्ञात करने की भाग विधि :–

उदाहरण (1) पूर्ण वर्ग संख्या 6889 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

		83 =	भागफल
	8	68 $\underline{89}$	
	× 8	64	
संशोधित भाजक	= 163	4 89	
	× 3	4 89	
		×	

संकेत :

(i) संख्या में चार अंक अतः: वर्गमूल में दो अंक

(ii) प्रथम वर्गमूल अंक = 8

(iii) $68 - 8^2 = 4 =$ शेषफल

(iv) 4 के आगे अंकों का जोडा 89 उतारा अतः नया भाज्य $= 489$

(v) भाजक $= 8 \times 2 = 16$ अर्थात् वर्गमूल अंक का दुगना।

(vi) 48 में 16 का भाग 3 बार अतः भागफल अंक 8 के आगे 3 लिखा।

(vii) भाजक 16 के आगे भी 3 लिखा अतः संशोधित भाजक = 163

(viii) $489\text{-}163 \times 3 = 489 - 489 = 0,$

शेषफल = 0, वर्गमूल = भागफल = 83

(2) पूर्ण वर्ग संख्या 10329796 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	3214
3	10 32 97 96
×3	9
62	132
×2	124
641	897
×1	641
6424	25696
×4	25696
	×

संकेत :

(i) संख्या में चार जोड़े अतः वर्गमूल में 4 अंक

(ii) प्रथम वर्गमूल अंक = 3

(iii) शेषफल $= 10 - 3^2 = 1,$ उतारा 32 अतः नया भाज्य = 132

(iv) भाजक = 3 का दुगना = 6

(v) 132 के 13 में 6 का भाग 2 बार अतः भागफल अंक 3 के आगे 2 लिखा

(vi) भाजक 6 के आगे भी 2 लिखा

अतः संशोधित भाजक = 62

(vii) $132 - 62 \times 2 = 132 - 124 = 8 =$ शेषफल

(viii) नया भाज्य = 897 तथा नया भाजक = 32 का दुगना = 64

(ix) 89 में 64 का भाग 1 बार अतः भागफल अंक 32 के आगे 1 लिखा

(x) भाजक 64 के आगे भी 1 लिखा अतः संशोधित भाजक = 641

(xi) $897 - 641 \times 1 = 897 - 641 = 256,$ उतारा 96

(xii) अतः नया भाज्य नया भाजक = 321 का दुगना = 642

(xiii) 2569 में 642 का भाग 4 बार अतः भागफल अंक 321 के आगे 4 लिखा

(xiv) भाजक 642 के आगे भी 4 लिखा

अतः संशोधित भाजक = 6424

(xv) $25696 - 6424 \times 4 = 0,$ अतः शेषफल = 0

वर्गमूल = भागफल = 3214

(3) पूर्ण वर्ग संख्या 4473225 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	2115
2	4 47 32 25
×2	4
41	47
×1	41
421	632
×1	421
4225	21125
×5	21125
	×

अतः वर्गमूल 2115

वर्गमूल ज्ञात करने की द्वन्द्वयोग विधि :—

उदाहरण (1) पूर्ण वर्ग संख्या 389376 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	3 8	9 3 7 6
12		2 5 1 1
	6	2 4·00

संकेत :

(i) संख्या में तीन जोड़े अतः वर्गमूल में 3 अंक

(ii) प्रथम वर्गमूल अंक = 6

(iii) शेषफल $= 38 - 6^2 = 2$ लिखा 9 से पूर्व

(iv) नया भाज्य = 29, संशोधित भाज्य भी = 29, भाजक

(v) $29 \div 12$, भागफल अंक = 2, लिखा नीचे 6 के आगे

(vi) शेषफल = 5, लिखा 9 व 3 के मध्य थोडा सा नीचे

(vii) नया भाज्य = 53, संशोधित भाज्य $= 53 - 2^2 = 49$

(viii) $49 \div 12$, भागफल अंक = 4, लिखा नीचे 2 के आगे

(ix) शेषफल = 1, लिखा 3 व 7 के मध्य थोड़ा सा नीचे।

अब अन्तिम शेषफल ज्ञात करना है क्योंकि वर्गमूल में तीन अंक आ चुके हैं।

(x) नया भाज्य = 16, शेषफल $= 17 - 2 \times 4 \times 2 = 1$ लिखा 7 व 6 के मध्य।

(xi) नया भाज्य = 16, अन्तिम शेषफल $= 16 - 4^2 = 0$ $\therefore$ वर्गमूल = 624

(2) द्वन्द्वयोग विधि से 41254929 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	4 1	2 5 4 9 2 9
12		5 4 5 2 1 0
	6	4 2 3 ·0 0 0

संकेत :

(i) वर्गमूल में चार अंक

(ii) $41 - 6^2 = 5$ लिखा 2 से पूर्व

(iii) = 52, नया भाज्य संशोधित भाज्य भी = 52,

(iv) $52 \div 12$, भागफल अंक = 4, शेषफल अंक = 4 लिखा 2 व 5 के मध्य

(v) नया भाज्य = 45, संशोधित भाज्य $= 45 - 4^2 = 29$

(vi) $29 \div 12$, भागफल अंक शेषफल अंक 5 लिखा 5 व 4 के मध्य

(vii) नया भाज्य = 54, संशोधित भाज्य $= 54 - 4 \times 2 \times 2 = 38$

(viii) $38 \div 12$, भागफल अंक शेषफल अंक 2 लिखा 4 व 9 के मध्य।

वर्गमूल में चार अंक आ चुके हैं, अब अन्तिम शेषफल ज्ञात करना है। पूरा वर्गमूल ज्ञात होने के बाद दशमलव बिन्दु तथा शून्य लिखे जा सकते है। अन्तिम शेषफल ज्ञात करने के लिये जितनी बार नये भाज्य को संशोधित किया जाता है, उतने ही शून्य दशमलव बिन्दु के बाद लिखे जाते हैं।

(ix) शेषफल $= 29 - 4 \times 3 \times 2 - 2^2 = 1$ लिखा 9 व 2 के मध्य

(x) नया भाज्य = 12, शेषफल $= 12 - 2 \times 3 \times 2 = 0$ लिखा 9 के पूर्व

(xi) नया भाज्य = 9, अन्तिम शेषफल $= 09 - 3^2 = 0$ $\therefore$ वर्गमूल = 6423

;

टिप्पणी : वर्गमूल ज्ञात करने की क्रिया के मध्य जब संशोधित भाज्य ऋणात्मक आता है तब ध्वजांक भाग संक्रिया के समान भागफल अंक (वर्गमूल अंक) एक या दो अंक कम लेना पड़ता है।

देखिए निम्न उदाहरण :–

(3) द्वन्द्वयोग विधि से 14047504 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	1 4	0 4 7 5 0 4
6		5 8 11 13 7 6
	3	7 4 8 ·0 0 0

वर्गमूल = 3748

संकेत :

संशोधित भाज्य ऋणात्मक आने के कारण बॉयी तरफ से द्वितीय वर्गमूल अंक 8 के स्थान पर 7, तृतीय वर्गमूल अंक 5 के स्थान पर 4 तथा चतुर्थ वर्गमूल अंक 10 के स्थान पर 8 लिया गया। तथ्य की सत्यता की जाँच स्वंय कीजिए।

;4) द्वन्द्वयोग विधि से 25745476 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	2 5	7 4 5 4 7 6
10		0 7 4 5 5 1
	5	0 7 4· 0 0 0

वर्गमूल = 5074

1.07 घनमूल

घनफल संक्रिया का विलोम घनमूल संक्रिया होती है जैसे 7 का घनफल 343 है तो 343 का घनमूल =7 हुआ।

घनमूल के गणितीय चिह्न :–

$\sqrt[3]{\;}$ अथवा $(\;)^{\frac{1}{3}}$ घनमूल के गणितीय संकेत कहलाते हैं।

जैसे $(343)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{343}$ = घनमूल 343 = 7

घनमूल संख्या के अंक :–

किसी पूर्ण घन संख्या के दाहिनी ओर से अर्थात् इकाई अंक से तीन–तीन अंकों के जितने समूह बनते हैं उतने ही अंक संख्या के घनमूल में होते हैं। अन्तिम समूह में तीन अंक न होकर दो या एक अंक भी हो सकते हैं जैसे संख्या 13824 के घनमूल में दो अंक होते हैं।

पूर्णघन संख्या की पहिचान :–

1. घन संख्या के बीजांक 1, 8, व 9 (अथवा 0) ही हो सकते हैं।
   जैसे संख्या 314432 का बीजांक =3+1+4+4+3+2=8 (योग में से 9 घटाने पर) अतः संख्या 314432 एक पूर्णघन संख्या हो सकती है। उपरोक्त बीजांकों के अतिरिक्त किसी अन्य बीजांक वाली संख्या पूर्ण घन नहीं हो सकती है।
2. जिस पूर्णघन संख्या का चरमं (इकाई) अंक 1, 4, 5, 6, 9 अथवा 0 होता है तो,उसके घनमूल का इकाई अंक भी वही होता है।
3. जिस पूर्ण संख्या का चरमं (इकाई) अंक 2,8,3 अथवा 7 होता है तो उसके घनमूल का इकाई अंक इस दिये हुए अंक का परम मित्र अंक होता है।
4. घन संख्या के घनमूल का अन्तिम अंक संख्या के अन्तिम समूह से ज्ञात किया जा सकता है।

क्र.सं.	संख्या का अन्तिम समूह	घनमूल का अन्तिम अंक
1	1– 7	1
2	8 – 26	2
3	27 – 63	3
4	64 – 124	4
5	125 – 215	5
6	216 – 342	6
7	343 – 511	7
8	512 – 728	8
9	729 – 999	9

टिप्पणी : यदि किसी पूर्णघन संख्या में छः अंक हों तो उसका घनमूल विलोकनम् विधि द्वारा मौखिक ज्ञात किया जा सकता है। घनमूल का इकाई अंक तो उपरोक्त बिन्दु क्र. 2 व 3 से ज्ञात किया जा सकता है तथा घनमूल का दहाई अंक बिन्दु क्र. 4 में दी गई सारणी से। देखिए निम्न उदाहरण :

क्रमांक	पूर्ण घनसंख्या	घनमूल
1	493039	79
2	42 875	35
3	636 056	86
4	941 152	98
5	250 047	63

सात से नौ अंक वाली पूर्णघन संख्या का घनमूल

यदि किसी पूर्णघन संख्या के तीन या उससे अधिक समूह बनते हैं तो स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ द्वारा प्रतिपादित विधि द्वारा उसका घनमूल ज्ञात किया जा सकता है। विधि को निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (1) पूर्णघन संख्या 387420489 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} 387420489 \\ -729 \\ \hline 38741976\cancel{0} \end{array}$$

संकेत :

(i) तीन अंकों के तीन समूह अतः घनमूल में तीन अंक।

(ii) प्रथम समूह 489 में इकाई अंक = 9 अतः घनमूल का इकाई अंक = 9

(iii) अन्तिम समूह 387 में सबसे बड़े अंक 7 का घन समाहित अतः घनमूल में सैकड़े का अंक = 7

(iv) घनमूल का मध्य अंक ज्ञात करना है। माना कि यह x है अतः घनमूल $= 7x9$

(v) संख्या में से इकाई अंक 9 का घनफल घटाइये। इकाई स्थान का 0 निरस्त कीजिए।

(vi) शेषफल में इकाई अंक = 6

(vii) $3x9^2 = 243x$ में भी इकाई अंक 6 आना चाहिये ताकि घटाने पर फिर 0 प्राप्त हो।

(viii) $243x$ में x=2 रखने पर ही यह संभव है। अतः घनमूल = 729

टिप्पणी : संकेत (i), (ii) व (iii) को मौखिक भी ज्ञात किया जा सकता है।

(2) पूर्णघन संख्या 105823817 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} 105823817 \\ -27 \\ \hline 10582379\cancel{0} \end{array}$$

संकेत :–

(i) घनमूल में तीन अंक। इकाई अंक = 3, सैकड़े का अंक = 4

(ii) माना कि घनमूल का मध्य अंक $= x$ अतः घनमूल $= 4x3$

(iii) संख्या में से इकाई अंक 3 का घन घटाने तथा इकाई स्थान का 0 निरस्त करने पर

(iv) शेषफल में इकाई अंक = 9

(v) $3 \times x \times 3^2 = 27x$ में भी इकाई अंक 9 आना चाहिए ताकि घटाने पर पुनः 0 प्राप्त हो।

(vi) 27^x में $x = 7$ रखने पर ही यह संभवः है। अतः घनमूल = 473

(3) पूर्णघन संख्या 9800344 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} 9800344 \\ -64 \\ \hline 980028\cancel{0} \end{array}$$

संकेत :–

(i) घनमूल में तीन अंक। इकाई अंक = 4, सैकड़े का अंक = 2,

मान कि मध्य अंक $=x$ अतः घनमूल $2x4$

(ii) संख्या में से इकाई अंक 4 का घन घटाने पर प्राप्त संख्या के इकाई स्थान का 0 निरस्त करने से

(iii) शेषफल का इकाई अंक = 8

(iv) $3\times x\times 4^2=48x$ में भी इकाई अंक 8 आना चाहिये ताकि घटाने पर पुनः 0 प्राप्त हो।

(v) $48x$ में $x=1$ या $x=6$ रखने पर ही यह संभव है।

अतः घनमूल $=214$ या $=264.$ नवांक विधि से उत्तर का परीक्षण करने पर 214 के घनफल का बीजांक और दी हुई संख्या का बीजांक बराबर है $(=1)$ अतः घनमूल $=214$ उत्तर

264 के घनफल का बीजांक 9 या 0 आता है अतः निरस्त।

भाग विधि : यह विधि भी वैदिक विधि है और बड़ी प्राचीन है। इस विधि से अनेक अंकों की संख्या का घनमूल ज्ञात किया जा सकता है। जो संख्याऐं अपूर्ण घन हैं, उनका घनमूल भी दशमलव भिन्न में ज्ञात किया जा सकता है। विधि को निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (1) भाग विधि से पूर्णघन संख्या 849278123 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

↓ क्रिया पद	947	
	8 4 9 2 7 8 1 2 3	
-9^3	729	
$-3\times9^2\times4$	1202	
	972	
$-3\times9\times4^2$	2307	
	432	
-4^3	18758	
	64	
$-3\times94^2\times7$	186941	$343-7^3=0$
	185556	
$-3\times94\times7^2$	13852	
	13818	
-7^3	343	
	343	
	×	

संकेत :

(i) अन्तिम समूह $849-9^3=120$

(ii) घनमूल अंक 9 ऊपर लिखा। नया भाज्य = 1202

(iii) नये भाज्य में $3\times9^2=243$ का भाग दिया

(iv) भागफल अंक = 4, ऊपर लिखा। $3\times9^2\times4$ घटाया।
शेषफल = 230, नया भाज्य = 2307

(v) $2307-3\times9\times4^2=1875$ = शेषफल

(vi) नया भाज्य $18758-4^3=18694$

(vii) 1 उतारा। नया भाज्य = 186941

(viii) $186941\div3\times94^2$ अर्थात् 26508 का भाग 7 बार गया।

(ix) भागफल अंक = 7 ऊपर लिखा।

(x) नये भाज्य 13852 में से $3\times94\times7^2$ घटाया। शेषफल = 34

(xi) पुनः नये भाज्य $343-7^3=0$ $\therefore$ घनमूल = 947

ध्यातव्य : 1. $94^3 = 9^3/3\times9^2\times4/3\times9\times4^2/4^3 =$ क्रिया पद (1) से (4).

2. $947^3 = 94^3/3\times94^2\times7/3\times94\times7^2/7^3 =$ सभी क्रिया पद 9^3 से 7^3 तक

3. घनमूल अंक 9 से अंक 4 ज्ञात किया।

4. घनमूल अंक 94 की सहायता से अंक 7 ज्ञात किया। देखिए संकेत क्र. (iii), (iv) व (viii)

5. घनमूल अंक 94 ज्ञात होने तथा संकेत क्र. (vi) तक क्रिया होने पर आगे भाग क्रिया की आवश्यकता नहीं है। संख्या के इकाई अंक 3 से घनमूल का इकाई अंक 7 भी लिखा जा सकता है।

(2) भाग विधि से पूर्णघन संख्या 355045312441 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

↓ क्रियापद		7081 355045312441	
(I)	-7^3	343	
(ii)	$3\times7^2=147$ का भाग 0 बार गया	120 0	$[140\times0$ घटाया$]$
(iii)	$3\times7\times0^2=0$ घटाया	1204 0	
(iv)	-0^3	12045 0	$[14700\times8$ घटाया$]$
(v)	$3\times70^2=14700$ का 8 बार भाग गया	120453 117600	
(vi)	$3\times70\times8^2=13440$ घटाया	28531 13440	
(vii)	-8^3	150912 512	
(viii)	$3\times708^2=1503792$ का भाग 1 बार गया	1504004 1503792	$[1503792\times1$ घटाया$]$
(ix)	$3\times708\times1^2=2124$ घटाया	2124 2124	
(x)	-1^3	01 1	
	घनमूल = 7081	×	

ध्यातव्य 1. क्रिया पद संख्या = घनमूल अंक संख्या $\times3-2$

2. पूर्णघन संख्या के घनमूल ज्ञात करने में अन्तिम तीन क्रिया पद नहीं निकालें। संख्या का इकाई अंक देखते ही घनमूल का इकाई अंक भी प्राप्त हो जायेगा।

3. द्वन्द्वयोग विधि से अनेक अंकों की संख्या का वर्ग ज्ञात किया जा सकता है।

4. घनमूल में चार अंक हों तो भाग की विधि से दूसरा व तीसरा अंक ज्ञात कीजिए। इकाई अंक और अन्तिम अंक तो मौखिक ही ज्ञात हो जाते हैं।

(3) पूर्णघन संख्या 9800344 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

	21 9800344
-2^3	8
$3\times2^2=12$ का भाग 1 बार गया	18 12
$3\times2\times1^2=6$ घटाया	60 6
$1^3=1$ घटाया	540 1
	539

घनमूल में तीन अंक। संख्या का इकाई अंक = 4

अतः घनमूल का इकाई अंक = 4 अतः घनमूल = 214

(4) पूर्ण घनसंख्या 143055667 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

	52
	143055667
-5^3	125
$3\times5^2=75$	180
का भाग 2 बार गया	150
$3\times5\times2^2=60$	305
घटाया	60
$2^3=8$	2455
घटाया	8
	2447

घनमूल में तीन अंक। संख्या का इकाई अंक = 7

अतः घनमूल का इकाई अंक = 3

∴ घनमूल = 523

टिप्पणी : भाग की विधि से अपूर्ण घन संख्याओं के घनमूल भी ज्ञात किये जा सकते हैं। देखिए निम्न उदाहरण।

(5) 9 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

↓ क्रियापद	208
	9000000
-2^3	8
$3\times2^2=12$	100
का भाग .08 बार गया	$\cdot96$
$3\times2\times(\cdot08)^2$	$\cdot0400$
$=\cdot0384$ घटाया	$\cdot0384$
$(\cdot08)^3$	$\cdot001600$
$=\cdot000512$ घटाया	$\cdot000512$
	$\cdot001088$

प्रश्नमाला 1.3

वैदिक विधियों द्वारा वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

1. 2116 2. 4225 3. 6889

4. 59049 5. 125316 6. 169744

7. 1265625 8. 1522756

वैदिक विधियों द्वारा पूर्णघन संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिए।

9. 68921 10. 636056 11. 314432

12. 493039 13. 8365427 14. 1061208

15. 8489664 16. 200201625 17. 258474853

18. 22665187 19. 8615125 20. 660776311

1.08 बीजगणित

सरल समीकरणों का हल (वैदिक पद्धति)

सूत्र परावर्त्ययोजयेत् एवं सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये द्वारा सरल समीकरणों का हल अति शीघ्र ज्ञात किया जा सकता है। इन सूत्रों के अनुप्रयोग बहुत छोटे, सरल एवं मानसिक गणना पर आधारित है।

सूत्र परावर्त्ययोजयेत् :—

सूत्र का अर्थ है ''पक्षांतरण तथा समायोजन''। स्वामी भारतीकृष्ण जी तीर्थ ने इस सूत्र के अन्तर्गत चार अनुप्रयोगों की चर्चा की है। ये सभी अनुप्रयोग एक पंक्ति में मौखिक उत्तर देने वाले हैं।

प्रथम अनुप्रयोग :— यदि $(x+a)(x+b)=(x+c)(x+d)$ हो तो $x=\dfrac{d-b}{a-c}$ (बीजीय सूत्र)

द्वितीय अनुप्रयोग :—

यदि $\dfrac{ax+b}{p}=\dfrac{cx+d}{q}$ हो तो $x=\dfrac{dp-bq}{aq-cp}$ (बीजीय सूत्र)

तृतीय अनुप्रयोग :—

यदि $(x+a)(x+b)=(x+c)(x+d)$ हो तो

$$x=\frac{cd-ab}{a+b-c-d}$$ (बीजीय सूत्र)

उदाहरण :— समीकरण सरल कीजिए।

$$(x+1)(x+2)=(x-3)(x-4)$$

हल :— बीजीय सूत्र द्वारा $x=\dfrac{12-2}{1+2+3+4}=\dfrac{10}{10}=1$

चतुर्थ अनुप्रयोग :—

यदि $\dfrac{m}{x+a}+\dfrac{n}{x+b}=0$ तो $x=-\dfrac{mb+na}{m+n}$ (बीजीय सूत्र)

उदाहरण :— समीकरण $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{3}{x+5}=0$ को सरल कीजिए।

हल : बीजीय सूत्र द्वारा $x=-\dfrac{(20+6)}{4+3}=-\dfrac{26}{7}$

सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये :—

सूत्र का अर्थ है ''समुच्चय परस्पर समान होने पर शून्य होता है।'' इस सूत्र के अन्तर्गत छः अनुप्रयोगों की चर्चा की जा रही है।

सूत्र का प्रथम अर्थ एवं अनुप्रयोग :—

यदि समीकरण के प्रत्येक पद x में एक सर्वनिष्ठ खण्ड है तो $x=0$ (बीजीय सूत्र)

उदाहरण 1. समीकरण $12x+3x=4x+5x$ को सरल कीजिए।

हल : बीजीय सूत्र द्वारा $x=0$

उदाहरण 2. समीकरण $2(x+1)=7(x+1)$ को सरल कीजिए।

हल : प्रत्येक पद में $x+1$ एक उभयनिष्ठ खण्ड है अतः $x+1=0$

$\therefore \quad x=-1$

सूत्र का द्वितीय अर्थ एवं अनुप्रयोग :—

एक घातीय समीकरण के दोनों पक्षों में स्वतन्त्र पद समान हो तो चर राशि का मान शून्य होता है।

उदाहरण 1. $(x+3)+(2x+5)+4=2(x+6)$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों में स्वतन्त्र पद समान $=12$ अतः $x=0$

उदाहरण 2. $(x+1)(x+9)=(x+3)(x+3)$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों में स्वतन्त्र पद समान $=9$ अतः $x=0$

सूत्र का तृतीय अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि समीकरण में दो भिन्नों के अंश परस्पर समान हों तो उनके हरों का योग शून्य रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है।

उदाहरण 1. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=0$ को सरल कीजिए।

हल : यहाँ दोनों भिन्नों के अंश परस्पर समान $=1$ अतः सूत्रानुसार

$$x+a+x+b=0 \quad \therefore\ x=-\frac{a+b}{2}$$

उदाहरण 2. $\frac{m}{2x+1}+\frac{m}{3x+4}$ को सरल कीजिए।

हल : भिन्नों के दोनों अंश परस्पर समान $=m$

अतः सूत्रानुसार $2x+1+3x+4=0$

या $5x+5=0 \quad \therefore \quad x=-1$

सूत्र का चतुर्थ अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि समीकरण के दोनों पक्षों के अंशों का योग तथा उसके दोनों हरों का योग परस्पर समान हो अथवा दोनों योग एक निश्चित अनुपात में हो तो किसी भी योग को शून्य समान रखने पर चर राशि का एक मान ज्ञात होता है।

उदाहरण 1. समीकरण $\frac{2x+3}{2x+5}=\frac{2x+5}{2x+3}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों के अंशों का योग $=2x+3+2x+5=4x+8$

दोनों पक्षों के हरों का योग $=4x+8$

दोनों समुच्चय समान अतः सूत्रानुसार $4x+8=0, \ \therefore\ x=-2$

उदाहरण 2. समीकरण $\frac{3x+4}{6x+7}=\frac{x+1}{2x+3}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों के अंशों का योग $=3x+4+x+1=4x+5 \quad \cdots$ (i)

दोनों पक्षों के हरों का योग $=6x+7+2x+3=8x+10 \quad \cdots$ (ii)

योग क्रमांक (i) तथा (ii) योग क्रमांक का अनुपात $=1:2$

अतः सूत्रानुसार किसी भी योग को शून्य समान रखने पर

$4x+5=0$ अथवा $8x+10=0$ से $x=-\frac{5}{4}$

सूत्र का पंचम अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि समीकरण के एक पक्ष के अंश व हर का अन्तर दूसरे पक्ष के अंश व हर के अन्तर के समान हो अथवा दोनों अन्तर एक निश्चित अनुपात में हो तो किसी भी अन्तर को शून्य समान रखने पर चर राशि का एक मान ज्ञात होता है।

उदाहरण 1. समीकरण $\frac{3x+4}{2x+1}=\frac{x-8}{2x-5}$ को सरल कीजिए।

हल : वाम पक्ष के अंश व हर का अन्तर $=3x+4-2x-1=x+3 \quad \cdots$ (i)

दक्षिण पक्ष के अंश व हर का अन्तर $= 2x - 5 - x + 8 = x + 3$ .... (ii)

दोनों पक्षों के अन्तर परस्पर समान अतः सूत्रानुसार

$$x + 3 = 0 \qquad \therefore\ x = -3$$

उदाहरण 2. समीकरण $\dfrac{x-8}{3x-2} = \dfrac{3x+4}{2x+1}$ को हल कीजिए।

हल : वाम पक्ष के अंश व हर का अन्तर $= 3x - 2 - x + 8 = 2x + 6$ .... (i)

दक्षिण पक्ष के अंश व हर का अन्तर $= 3x + 4 - 2x - 1 = x + 3$ .... (ii)

अन्तर क्रमांक (i) तथा अन्तर क्रमांक (ii) का अनुपात $= 2:1$

अतः सूत्रानुसार किसी भी अन्तर को शून्य समान रखने पर

$x + 3 = 0$ अथवा $2x + 6 = 0$ से $x = -3$

टिप्पणी :– सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये आधारित अनुप्रयोग क्रमांक चतुर्थ एवं पंचम द्वारा किसी द्विघाती समीकरण की चर राशि के दोनों मान ज्ञात किये जा सकते हैं जैसे समीकरण $\dfrac{3x+4}{6x+7} = \dfrac{5x+6}{2x+3}$ के हल में उपरोक्त सूत्र द्वारा चर राशि के दो मान अर्थात् $x = -\dfrac{5}{4}$ तथा $x = -1$ प्राप्त होते हैं।

सूत्र का षष्ठ अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि किसी समीकरण के प्रत्येक पक्ष में दो पद हों और पद का प्रत्येक अंश परस्पर समान हो तथा वाम पक्ष के हरों का योग दक्षिण पक्ष के हरों के योग के समान हो तो इस योग को शून्य के बराबर रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है।

उदाहरण 1. समीकरण $\dfrac{1}{x+7} + \dfrac{1}{x+9} = \dfrac{1}{x+6} + \dfrac{1}{x+10}$ को सरल कीजिए।

हल : वाम पक्ष के हरों का योग $= x + 7 + x + 9 = 2x + 16$

दक्षिण पक्ष के हरों का योग $= x + 6 + x + 10 = 2x + 16$

सूत्रानुसार $2x + 16 = 0 \quad \therefore\ x = -8$

उदाहरण 2. समीकरण $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+4}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों के हरों का योग परस्पर समान $= 2x - 17$

अतः सूत्रानुसार $2x - 17 = 0 \quad \therefore\ x = \dfrac{17}{2} = 8\dfrac{1}{2}$

उदाहरण 3. समीकरण $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+4}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों में ऋणात्मक पदों का पक्षांतरण करने पर

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

सूत्रानुसार $2x + 5 = 0 \quad \therefore\ x = -\dfrac{5}{2} = -2\dfrac{1}{2}$

प्रश्नमाला 1.4

सूत्र परावर्त्य योजयेत् द्वारा समीकरण का मौखिक हल ज्ञात कीजिए।

1. $13x - 14 = 9x + 10$
2. $3y + 4 = 5y - 4$

3. $\frac{2x+1}{3x+4}=\frac{1}{3}$

4. $\frac{5x-3}{2}=\frac{2x+1}{5}$

5. $(x+7)(x+9)=(x-8)(x-11)$

6. $(x+5)(x+1)=(x+3)(x+2)$

7. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}=0$

8. $\frac{5}{2x-1}-\frac{9}{3x-2}=0$

सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये द्वारा समीकरण हल कीजिए।

9. $(2x+1)+(x+3)=5x+4$

10. $a(x-1)+b(x-1)=c(x-1)+d(x-1)$

11. $(x+1)(x+9)=(x+3)(x+3)$

12. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+\frac{x}{1}$

13. $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-6}=0$

14. $\frac{5}{3x+2}+\frac{5}{2x+8}=0$

15. $\frac{2x+4}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x+4}$

16. $\frac{3x+2}{5x+7}=\frac{x+1}{3x-1}$

17. $\frac{5x+7}{2x+1}=\frac{x+1}{3x+5}$

18. $\frac{3x+6}{6x+3}=\frac{5x+4}{2x+7}$

19. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}$

20. $\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-8}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 1.1

1. 4284962 2. 1973784 3. 27889 4. 12 घं. 27 मि. 28 से.

5. $992\frac{5}{6}$ 6. 20291 7. 3024 8. 12096 9. 1369863

10. 4554 11. 51766 12. 7538212

प्रश्न क्र.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
भागफल	124	41	21	102	4981	995	611	135
शेषफल	798	17	75	23	98	59	97	60

प्रश्नमाला 1.2

1. 8649 2. 11236 3. 44521 4. 164025 5. 256 6. 961 7. 576

8. 3136 9. 2025 10. 7225 11. 13225 12. 15625 13. 529 14. 1444

15. 4761 16. 7921 17. 131044 18. 205209 19. 18593344 20. 6031936 21. 2744

22. 912673 23. 19683 24. 61629875 25. 4096 26. 35937 27. 68921 28. 140608

29. 91125 30. 389017 31. 13824 32. 1191016

प्रश्नमाला 1.3

1. 46 2. 65 3. 83 4. 243 5. 354 6. 412 7. 1125

8. 1234 9. 41 10. 86 11. 68 12. 79 13. 203 14. 102

15. 204 16. 585 17. 637 18. 283 19. 205 20. 871

प्रश्नमाला 1.4

1. $x=6$ 2. $y=4$ 3. $x=\frac{1}{3}$ 4. $x=\frac{17}{21}$ 5. $x=\frac{5}{7}$ 6. $x=1$ 7. $x=-3$

8. $x=-\frac{1}{3}$ 9. $x=0$ 10. $x=1$ 11. $x=0$ 12. $x=0$ 13. $x=1$ 14. $x=-2$

15. $x=-\frac{5}{4}$ 16. $x=-\frac{3}{4}$ 17. $x=-2$ 18. $x=-\frac{5}{4}, x=1$ 19. $x=-4$ 20. $x=5$

❑