

समान्तर श्रेणी (Arithmetic Progression)

5.01 प्रस्तावना

प्रकृति में हम अपने आस-पास की कई वस्तुओं को उनके एक निश्चित ढंग में दिखने के कारण पहचानते हैं। ये वस्तुएँ अपने निश्चित प्रतिरूप का अनुसरण करती हैं। जैसे मधुमक्खी के छत्ते में छिद्रों का बनना। इस प्रकार के निश्चित प्रतिरूप को प्रदर्शित करता है।

घर या दुकानों में लगी स्टील की सीढ़ी में भी एक निश्चित लम्बाई की पाइप रोड एक निश्चित अन्तराल पर लगी होती है। गणितीय भाषा में हम कहेंगे कि प्रतिरूपों में एक नियत मात्रा में संख्या बढ़ती या घटती चली जाती है। एवं एक के बाद दूसरे, तीसरे, चौथे क्रमों में परस्पर एक निश्चित सम्बन्ध होता है। संख्याओं के एक निश्चित नियमानुसार क्रम को अनुक्रम (Sequence) कहते हैं।
उदाहरणार्थ—संख्याओं के निम्नलिखित अनुक्रमों पर अपना ध्यान केन्द्रित करते हैं—

- (i) 2, 4, 6, 8, 10, ...
- (ii) 8, 5, 2, -1, -4, ...
- (iii)

प्रतिरूप (i) में प्रत्येक संख्या अपनी आगे वाली संख्या से 2 कम है। अर्थात् किसी संख्याओं में 2 जोड़े तो क्रम की अगली संख्या प्राप्त होती है।

प्रतिरूप (ii) में अगली संख्या पूर्व संख्या में से 3 घटाने पर प्राप्त हो रही है। इसी प्रकार (iii) प्रतिरूप में सभी क्रमिक संख्याएँ 3 की बढ़ती घातों में दर्शाई गई है।

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट हैं कि सभी प्रतिरूप एक निश्चित नियम/नियमों का अनुसरण करते हैं। इस अध्याय में हम इसी तरह के एक प्रतिरूप का अध्ययन करेंगे। जिसमें उत्तरोत्तर पद (term) अपने से पहले पदों (terms) में एक निश्चित संख्या जोड़ने पर प्राप्त किये जाते हैं। यहाँ हम इस प्रतिरूप के व्यापक पद (n^{th} term) एवं क्रमागत पदों के योग ज्ञात करने की विधियों के बारे में पढ़ेंगे।

5.02 समान्तर श्रेणी

हम सर्वप्रथम संख्याओं के निम्न अनुक्रमों पर विचार करते हैं।

- (i) 3⁰, 3¹, 3², 3³, 3⁴, ...
- (ii) 100, 70, 40, 10, ...
- (iii) -5, -3, -1, 1, ...

उपरोक्त अनुक्रमों में प्रथम पद छोड़कर सभी पद एक निश्चित संख्या (धनात्मक या ऋणात्मक) को पिछले पद वाली संख्या में जोड़ कर प्राप्त किये जा सकते हैं। इस प्रकार उक्त अनुक्रमों में संख्याएँ समान्तर श्रेणी (Arithmetic progression) में लिखी हुई है।

अतः समान्तर श्रेणी में अनुक्रम के प्रत्येक पद और उसके पूर्ववर्ती पद का अन्तर हमेशा समान रहता है। यह निश्चित संख्या (अन्तर) समान्तर श्रेणी का सार्वान्तर (Common difference) कहलाता है।

माना किसी अनुक्रम के पद से व्यक्त किये जाते हैं। अब यदि ये समान्तर श्रेणी में है तो प्रथम पद को छोड़कर प्रत्येक पद उसके पूर्ववर्ती पद का अन्तर निश्चित संख्या होती है। अर्थात् प्रथम पद को छोड़कर प्रत्येक पद पिछले पद में सार्व अन्तर जोड़ने पर प्राप्त होता है। सार्वान्तर को यहाँ d माना जाए तों

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}$$

अतः $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$ व्यापक रूप में $a_n - a_{n-1} = d$ जहाँ $n = 1, 2, 3, \dots$ यहाँ हम यह कह सकते हैं कि यदि अनुक्रम का प्रथम पद a है और सार्व अन्तर d है तो समान्तर श्रेणी का व्यापक रूप निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n-1)d, \dots$$

उपर्युक्त तथ्यों को हम निम्न उदाहरणों से स्पष्ट रूप से समझ सकते हैं।

उदाहरण-1. निम्नलिखित समान्तर श्रेणी के लिए प्रथम पद एवं सार्व अन्तर लिखिए।

$$-5, -1, 3, 7, \dots$$

हल: दी गई समान्तर श्रेणी की व्यापक रूप से तुलना करने पर, स्पष्ट है कि यहाँ प्रथम पद

तथा सार्व अन्तर = क्रमागत दो पदों का अन्तर

$$\text{अर्थात् } -5 - (-1) = 4, \quad 3 - (1) = 4$$

उदाहरण-2. संख्याओं की निम्नलिखित अनुक्रमों के लिए समान्तर श्रेणी की जाँच कीजिए।

(i) $4, 10, 16, 22, \dots$

(ii) $-2, 2, -2, 2, -2, \dots$

हल: (i) प्रथम अनुक्रम $4, 10, 16, 22, \dots$ की समान्तर श्रेणी होने की जाँच के लिए हम सार्वअन्तर ज्ञात करते हैं। अर्थात्

$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$

$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$

$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

अर्थात् प्रत्येक बार अन्तर '6' प्राप्त हो रहा है अतः यह अनुक्रम समान्तर श्रेणी है तथा इसका सार्वअन्तर '6' है।

(ii) अनुक्रम $-2, 2, -2, 2, -2, \dots$ की जाँच के लिए सार्वअन्तर ज्ञात करते हैं—

$$a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 4$$

$$a_3 - a_2 = -2 - (2) = 0$$

$$a_4 - a_3 = 2 - (-2) = 4$$

अर्थात् प्रत्येक बार अन्तर समान प्राप्त नहीं हो रहा है अतः यह सूची समान्तर श्रेणी नहीं है।

उदाहरण-3. निम्न समान्तर श्रेणियों के सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए तथा उनके अगले चार पद भी लिखिए—

(i) $0, -3, -6, -9, \dots$

(ii) $-1, \frac{-5}{6}, \frac{-2}{3}, \dots$

हल: (i) माना समान्तर श्रेणी a_1, a_2, a_3, \dots है। अतः यहाँ

$$a_2 - a_1 = -3 - 0 = -3$$

$$a_3 - a_2 = -6 - (-3) = -3$$

$$a_4 - a_3 = -9 - (-6) = -3$$

स्पष्ट है कि दो क्रमागत पदों में अन्तर -3 समान है। अतः सार्वअन्तर ' d ' = -3 अतः अगले चार पद निम्नप्रकार होंगे—

$$a_5 = a_4 + d = -9 + (-3) = -12$$

$$a_6 = a_5 + d = -12 + (-3) = -15$$

$$a_7 = a_6 + d = -15 + (-3) = -18$$

$$a_8 = a_7 + d = -18 + (-3) = -21$$

(ii) माना समान्तर श्रेणी a_1, a_2, a_3, \dots द्वारा व्यक्त की जाती है तब यहाँ

$$a_2 - a_1 = \frac{-5}{6} - (-1) = \frac{1}{6}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{-2}{3} - \frac{(-5)}{6} = \frac{-4+5}{6} = \frac{1}{6}$$

स्पष्ट है कि दो क्रमागत पदों में अन्तर $\frac{1}{6}$ समान है। अतः सार्वअन्तर, $d = \frac{1}{6}$

इस प्रकार अगले चार पद निम्न होंगे।

$$a_4 = a_3 + d = \frac{-2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-4+1}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{-1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$a_6 = a_5 + d = \frac{-1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-2+1}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$a_7 = a_6 + d = \frac{-1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

प्रश्नमाला 5.1

- निम्नलिखित समान्तर श्रेणी के लिए प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d ज्ञात कीजिए—
 - $6, 9, 12, 15, \dots$
 - $-7, -9, -11, -13, \dots$
 - $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \dots$
 - $1, -2, -5, -8, \dots$
 - $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \dots$
 - $3, 1, -1, -3, \dots$
 - $3, -2, -7, -12, \dots$
- यदि किसी समान्तर श्रेणी के लिए प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d निम्नानुसार दिया हुआ है, तो उस श्रेणी के प्रथम चार पद लिखिए।
 - $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$
 - $a = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{4}{3}$
 - $a = 0.6, \quad d = 1.1$
 - $a = 4, \quad d = -3$
 - $a = 11, \quad d = -4$
 - $a = -1.25, \quad d = -0.25$
 - $a = 20, \quad d = \frac{-3}{4}$
- संख्याओं की निम्न लिखित सूचियों के लिए समान्तर श्रेणी की जाँच कीजिए। यदि इनमें कोई समान्तर श्रेणी है तो इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए तथा इसके अगले चार पद भी लिखिए।
 - $2, \frac{5}{22}, 3, \frac{7}{2}, \dots$
 - $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \dots$
 - a, a^2, a^3, a^4, \dots
 - $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \dots$
 - $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \dots$
 - $a, 2a, 3a, 4a, \dots$
 - $0.2, 0.22, 0.222, \dots$
 - $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \dots$

5.03 समान्तर श्रेणी का n वाँ पद या 'व्यापक पद'

पिछले अनुच्छेद में हमने समान्तर श्रेणी के प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d द्वारा समान्तर श्रेणी के क्रमिक पदों को ज्ञात करने के बारे में पढ़ा। यहाँ हम निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं।

माना किसी कर्मचारी का मूल मासिक वेतन ₹ 10000 है तथा उसे ₹ 300 की वार्षिक वेतन वृद्धि दी जा रही है। तो उसका वेतन 20 वें वर्ष में कितना हो जायेगा, यह पता लगाने के लिए हम प्रथम पाँच वर्ष की वेतन प्राप्ति की गणना करते हैं—

	प्रथम वर्ष में प्राप्त मासिक वेतन	= ₹10,000
	द्वितीय वर्ष में प्राप्त मासिक वेतन होगा	= ₹ (10000 + 300)
अर्थात्	दूसरे वर्ष में वेतन	= ₹10,300
इस प्रकार,	तृतीय वर्ष में मासिक वेतन	= ₹(10300+300)
		= ₹ (10,000 + 300 + 300)
		= ₹ [10,000 + 2300]
अर्थात्	तीसरे वर्ष में वेतन	= ₹ (10,000 + (3-1)300)
		= ₹ 10600
अतः	चतुर्थ वर्ष में मासिक वेतन	= ₹ (10600+300)
		= ₹ (10,000 + 300 + 300 + 300)
		= ₹ [10,000 + 3300]
अर्थात्	चौथे वर्ष में वेतन	= ₹ (10,000 + (4-1)300)
		= ₹10,900
इसी प्रकार,	पाँचवें वर्ष में वेतन	= ₹ (10,900 + 300)
		= ₹ (10,000 + 300 + 300 + 300 + 300)
		= ₹ (10,000 + 4300)
		= ₹ (10,000+(5-1)300)
		= ₹ 11,200

यहाँ हम वार्षिक वेतन के पाँच वर्षों के आँकड़ों को निम्न अनुक्रम में लिखते हैं,

$$10000, 10300, 10600, 10900, 11200 \dots$$

यह अनुक्रम एक समान्तर श्रेणी है क्योंकि इसके क्रमिक पदों में सार्वअन्तर 300 है। उपरोक्त चर्चा से स्पष्ट है कि हम पिछले वर्ष के वेतन में रु. 300 जोड़कर वांछित वर्ष के वेतन की गणना कर सकते हैं।

वेतन गणना के उक्त प्रतिरूप से स्पष्ट है कि कर्मचारी का 20 वें वर्ष में वेतन निम्न प्रकार होगा

$$\begin{aligned} &= ₹ 19 वें वर्ष का वेतन + ₹ 300 \\ &= ₹ (10,000 + (300 + 300 + \dots + 300) + 300) \\ &= ₹ (10,000 + (20-1)300) \end{aligned}$$

अर्थात्, 20वें वर्ष में वेतन = ₹ 15700

अतः स्पष्ट है कि जिस प्रकार हमने दूसरे, तीसरे, चौथे, पाँचवें एवं अन्त में 20 वें वर्ष में कर्मचारी का वेतन प्राप्त किया है, व्यापक रूप में हम इसे निम्न संबन्ध द्वारा लिख सकते हैं।

20वें वर्ष के लिए वेतन प्रथम (मूल) वेतन + $(20-1) \times$ वार्षिक वेतन वृद्धि

इस उदाहरण से हम व्यापक रूप में यह प्रतिपादित कर सकते हैं कि यदि एक समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है तो उसका n वाँ पद (व्यापक पद) a_n निम्न प्रकार लिखा जा सकता है— $a_n = a + (n-1)d$

मान लीजिए समान्तर श्रेणी $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ के रूप में है तथा इसका $a_1 = a$ प्रथम पद तथा सार्वअन्तर d है तब,

दूसरा पद $a_2 = a + d = a + (2-1)d$

तथा $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d$

या $a_3 = a + (3-1)d$

इसी प्रकार n वाँ पद $a_n = a_{n-1} + d = a + (n-1)d$

अर्थात् व्यापक पद = प्रथम पद + (पदों की संख्या-1) × सार्वअन्तर

यहाँ यह उल्लेख करना आवश्यक है कि यदि समान्तर श्रेणी में m पद है अर्थात् अन्तिम पद a_m (या अंतिम पद) है तब अन्त से n वाँ पद निम्न प्रकार होगा—

$$\begin{aligned}\text{अन्त से } n \text{ वाँ पद} &= a_{m-n+1} \\ &= a + (m - n + 1 - 1)d \\ &= a + (m - n)d\end{aligned}$$

यदि श्रेणी के अन्तिम पद ' ℓ ' को प्रथम पद एवं घटते सार्वअन्तर को $-d$ लें तो अन्त से n वे पद को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\text{अन्त से } n \text{ वाँ पद} = \text{अंतिम पद} + (n - 1)(-d)$$

$$\text{अर्थात् अन्त से } n \text{ वाँ पद} = \ell - (n - 1)d$$

समान्तर श्रेणी के व्यापक पद के बारे में निम्न उदाहरणों के माध्यम से अवधारणा को और अधिक समझा जा सकता है।

उदाहरण-4. समान्तर श्रेणी 10, 7, 4, का 30 वाँ एवं n वाँ (व्यापक पद) ज्ञात कीजिए।

हल: दी गयी समान्तर श्रेणी है:

$$10, 7, 4, \dots$$

इसका प्रथम पद $a = 10$

$$\text{सार्वअन्तर} = d = -3$$

अतः इस समान्तर श्रेणी का n वाँ पद a_n दिया जाता है

$$a_n = a + (n - 1)d$$

इस प्रकार 30 वाँ पद $a_{30} = 10 + (30 - 1) \times (-3)$

$$= 10 - 29 \times 3 = -77$$

तथा व्यापक n वाँ पद $= 10 + (n - 1) \times (-3)$

$$= 10 - 3(n - 1) = 13 - 3n$$

अतः अभीष्ट 30 वाँ पद $= -77$ एवं n वाँ व्यापक पद $= 13 - 3n$ है।

उदाहरण-5. समान्तर श्रेणी 3, 15, 27, 39, का कौनसा पद 639 है ?

हल: दी गई समान्तर श्रेणी है: 3, 15, 27, 39,

अतः प्रथम पद $a = 3$ तथा सार्वअन्तर $d = 12$ है माना n वाँ पद $= 639$ है अतः व्यापक पद

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$\text{यहाँ, } 639 = 3 + (n - 1) \times 12$$

$$\text{या } 639 = 3 + 12n - 12$$

$$\text{या } 648 = 12n$$

$$\text{या } n = \frac{648}{12} = 54$$

अतः दी गई समान्तर श्रेणी का 54 वाँ पद 639 है।

उदाहरण-6. समान्तर श्रेणी 7, 13, 19, ..., 205 में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई समान्तर श्रेणी 7, 13, 19, ..., 205 है। यहाँ प्रथम पद $a = 7$ एवं सार्वअन्तर $d = 6$ है। माना n वाँ पद अंतिम है। तब $a_n = 205$

$$\text{इस प्रकार } n \text{वाँ पद } a_n = a + (n - 1) \times d$$

$$\text{अर्थात् यहाँ } 205 = 7 + (n - 1) \times 6$$

$$205 = 7 + 6n - 6$$

या $204 = 6n$

या $n = \frac{204}{6} = 34$

अतः दी गई समान्तर श्रेणी में 34 पद हैं।

उदाहरण-7. एक समान्तर श्रेणी का तीसरा पद 12 है और 50 वाँ पद 106 है। इसका 29 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर श्रेणी का व्यापक पद $= n$ वाँ पद

$$\therefore a_n = a + (n-1)d$$

जहाँ a समान्तर श्रेणी का प्रथम पद एवं d सार्वअन्तर है।

यहाँ $a_3 = 12$ एवं $a_{50} = 106$

इसप्रकार $a_3 = a + (3-1)d$

या $12 = a + 2d$

... (i)

तथा $a_{50} = a + (50-1)d$

या $106 = a + 49d$

... (ii)

अब समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर

$$106 - 12 = 49d - 2d$$

या $94 = 47d$

या $d = \frac{94}{47} = 2$

d का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$12 = a + 2 \times 2$$

$$\Rightarrow a = 8$$

इसलिए 29 वाँ पद $a_{29} = a + (29-1)d$
 $= 8 + 28 \times 2$

अतः समान्तर श्रेणी का 29 वाँ पद 64 होगा।

उदाहरण-8. क्या समान्तर श्रेणी 3, 7, 11, का एक पद 184 है?

हल: दी गई समान्तर श्रेणी 3, 7, 11, है। यहाँ प्रथम पद $a = 3$, एवं सार्वअन्तर $d = 4$ है।

माना श्रेणी का n वाँ पद 184 है

अतः $a_n = a + (n-1)d$

$\therefore 184 = 3 + (n-1) \times 4$

या $184 = 3 + 4n - 4$

या $185 = 4n$

या $n = \frac{185}{4} = 46\frac{1}{4}$

चूँकि n का मान एक प्राकृत संख्या नहीं है। अतः 184 दी गई समान्तर श्रेणी का पद नहीं हो सकता है।

उदाहरण-9. दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से भाज्य हैं?

हल: हम जानते हैं कि दो अंकों वाली (धनात्मक) सबसे छोटी संख्या जिसमें 7 का भाग जाता है, 14 है। इस प्रकार दो अंकों वाली 7 से भाज्य संख्याएँ निम्न अनुक्रम में होंगी

$$14, 21, 28, \dots, 98$$

यह एक समान्तर श्रेणी है जिसका प्रथम पद $a = 14$ एवं सार्वअन्तर $d = 7$ है।
माना समान्तर श्रेणी में n पद है। तब n वाँ पद $a_n = 98$ निम्न प्रकार दिया जाता है

$$a_n = a + (n-1)d$$

अर्थात् $98 = 14 + (n-1) \times 7$

या $98 = 14 + 7n - 7$

या $91 = 7n$

या $n = \frac{91}{7} = 13$

इस प्रकार दो अकों वाली 13 संख्याएँ ऐसी है जो 7 से भाज्य है।

उदाहरण-10. समान्तर श्रेणी 3, 8, 13,, 253 के अन्तिम पद से 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ श्रेणी का अन्तिम पद $\ell = 253$ है। प्रथम पद $a = 3$ एवं सार्वअन्तर $d = 5$ है। इस प्रकार अन्तिम पद से 20 वाँ पद
 $= \ell - (20-1)d$
 $= 253 - 19 \times 5 = 253 - 95 = 158$

इस प्रकार अन्तिम पद से 20 वाँ पद 158 है।

उदाहरण-11. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज है?

हल: स्पष्टतः 10 और 250 के बीच 4 से विभाजित होने वाली प्रथम संख्या 12 है। जब हम 250 को 4 से विभाजित करते हैं, तो शेषफल 2 प्राप्त होता है। इसप्रकार 4 से विभाजित होने वाली अंतिम संख्या $250 - 2 = 248$ है। अर्थात् 4 से विभाजित होने वाली 10 और 250 के बीच वाली संख्याएँ निम्नांकित में समान्तर श्रेणी बनाती है—

12, 16,, 248

अब इस श्रेणी में 4 के गुणजों की संख्या ज्ञात करनी है। माना यह n है। तब $a_n = 248$ अर्थात्

$$a_n = a + (n-1)d$$

या $248 = 12 + (n-1) \times 4$

या $248 = 12 + 4n - 4$

या $240 = 4n$

या $n = 60$

अतः 10 और 250 के बीच में 4 के गुणज 60 होंगे।

5.04 समान्तर श्रेणी के पदों का चयन

समान्तर श्रेणी में स्थित संख्याएँ (सम या विषम पद) ज्ञात करने हेतु श्रेणी के पदों का चयन, सुविधा को ध्यान में रखकर निम्न प्रकार किया जा सकता है।

संख्याएँ	पद
3	$a - d, a, a + d$
4	$a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$
5	$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$
6	$a - 5d, a - 3d, a - d, a + d, a + 3d, a + 5d$

स्पष्ट है कि यदि पदों की संख्या विषम है, तो मध्य पद a तथा सार्वअन्तर d है और यदि पदों की संख्या सम है तो दो मध्यपद होंगे $a - d$ एवं $a + d$ तथा सार्वअन्तर $2d$ होगा। संख्या सम्बन्धि समस्याएँ निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट रूप से समझी जा सकती है।

उदाहरण-12. तीन संख्याएँ समान्तर श्रेणी में हैं। यदि उनका योग -3 तथा गुणनफल 8 हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना समान्तर श्रेणी में ये तीन संख्याएँ निम्न है

$$a - d, a, a + d$$

दिया हुआ है कि संख्याओं का योग -3 है, अर्थात्

$$(a-d) + a + (a+d) = -3$$

या $3a = -3$

या $a = -1$

यह भी दिया हुआ है कि संख्याओं का गुणनफल 8 है।

अतः $(a-d) \times a \times (a+d) = 8$

या $(a^2 - d^2) \times a = 8$

यहाँ $a = -1$ रखने पर

$$[(-1)^2 - d^2] \times (-1) = 8$$

या $d^2 - 1 = 8$

या $d^2 = 9$

या $d = \pm 3$

अतः a एवं d के मान रखने पर अभीष्ट संख्याएँ निम्न प्राप्त होती हैं। यदि $d = 3$ तो $-1-3, -1, -1+3$ अर्थात् $-4, -1, -2$ और यदि $d = -3$ तो $-1+3, -1, -1-3$ अर्थात् $2, -1, -4$ अभीष्ट संख्याएँ प्राप्त होती हैं।

प्रश्नमाला 5.2

- ज्ञात कीजिए।
 - समान्तर श्रेणी $2, 7, 12, \dots$ का 10 वाँ पद
 - समान्तर श्रेणी $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \dots$ का 18 वाँ पद
 - समान्तर श्रेणी $9, 13, 17, 21, \dots$ का 24 वाँ पद
- हल कीजिए।
 - समान्तर श्रेणी $21, 18, 15, \dots$ का कौन सा पद -81 है ?
 - समान्तर श्रेणी $84, 80, 76, \dots$ का कौन सा पद शून्य है ?
 - क्या संख्याओं के अनुक्रम $5, 11, 17, 23, \dots$ का कोई पद 301 है ?
 - क्या समान्तर श्रेणी $11, 8, 5, 2, \dots$ का एक पद -150 है ?
- यदि समान्तर श्रेणी का छठा पद तथा 17 वाँ पद क्रमशः 19 तथा 41 हैं, तो 40 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
- किसी समान्तर श्रेणी के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और -8 हैं, तो इसका कौनसा पद शून्य होगा ?
- किसी समान्तर श्रेणी का तीसरा पद 16 है और 7 वाँ पद 5 वें पद से 12 अधिक है, तो समान्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।
- तीन अंको वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं ?
- समान्तर श्रेणी $10, 7, 4, \dots, -62$ का अंतिम पद से 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
- समान्तर श्रेणी $1, 4, 7, 10, \dots, 88$ में अन्त से 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
- एक समान्तर श्रेणी में 60 पद हैं। यदि उसका प्रथम पद तथा अंतिम पद क्रमशः 7 तथा 125 हैं, तो उसका 32 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
- चार संख्याएँ समान्तर श्रेणी में हैं। यदि संख्याओं का योग 50 तथा सबसे बड़ी संख्या, सबसे छोटी संख्या की चार गुनी है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

5.05 समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग

इस अनुच्छेद में हम समान्तर श्रेणी के योग का सूत्र प्राप्त करेंगे। इसकी आवश्यकता को समझने हेतु हम एक उदाहरण लेते हैं। लता को जन्म दिन पर उसकी माँ 500 रु देती है। दूसरे, तीसरे, चौथे, पाँचवे जन्मदिवस पर क्रमशः $600, 700, 800, 900$ रुपये माँ ने लता को दिये। यही क्रम उसके 18 वर्ष की उम्र तक चलता है, तो 18 वें जन्म दिन पर उसके पास एकत्र राशि की गणना सभी जन्मदिनों पर प्राप्त राशि को जोड़कर निकाली जा सकेगी, जो कि एक श्रमसाध्य प्रक्रिया है चूँकि $500, 600, 700, 800, \dots$ संख्याएँ समान्तर श्रेणी में हैं अतः इस प्रकार प्राप्त 18 पदों को जोड़ने के लिए अर्थात् समान्तर श्रेणी के पदों का योग करने के लिए हम निम्न विधि से सूत्र प्राप्त करते हैं। इस सूत्र में उपस्थित राशियों के मान रखकर समान्तर श्रेणी का योग आसानी से ज्ञात किया जा सकेगा।

माना समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d है तथा इसके n पदों का योगफल S_n है अतः समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों को इस प्रकार लिखते हैं कि

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d$$

तब
$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d] \quad \dots \text{ (i)}$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर योग में कोई अन्तर नहीं आता है अतः हम लिख सकते हैं कि

$$S_n = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \dots + (a+2d) + (a+d) + a \quad \dots \text{ (ii)}$$

(i) तथा (ii) के संगत पदों को जोड़ने पर

$$2S_n = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] \quad (\text{चूँकि इसमें } n \text{ पद हैं})$$

अतः
$$2S_n = n[2a + (n-1)d]$$

या
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

यह सूत्र समान्तर श्रेणी के प्रथम पद एवं सार्वअन्तर ज्ञात होने पर n पदों के योगफल को दर्शाता है।

यदि श्रेणी में अन्तिम पद l दिया हुआ है, तो सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ को निम्न रूप में भी लिख कर योगफल प्राप्त किया

जा सकता है।

अर्थात्
$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$$

या
$$S_n = \frac{n}{2}[a + l] \quad [\text{चूँकि } l = \text{अन्तिम पद} = n \text{वाँ पद} = a + (n-1)d \text{ है}]$$

इस प्रकार किसी समान्तर श्रेणी में n पद हैं, तो $a_n = l$ अन्तिम पद होगा अतः

$$n \text{ पदों का योग } S_n = \frac{n}{2} [\text{प्रथम पद} + \text{अन्तिम पद}]$$

यहाँ यह समझना आवश्यक है कि समान्तर श्रेणी का n वाँ पद, उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम $(n-1)$ पदों के योग के अन्तर के बराबर होता है।

अर्थात्
$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
 है।

उपरोक्त सूत्रों के प्रयोग से समान्तर श्रेणी के पदों की योगफल आधारित समस्याओं का हल निम्न उदाहरणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण-13. योगफल ज्ञात कीजिए

(i) समान्तर श्रेणी 1, 4, 7, 10,..... के 20 पदों का

(ii) समान्तर श्रेणी 2, 7, 12,..... के 10 पदों का

हल: (i) समान्तर श्रेणी 1, 4, 7, 10,..... दी हुई है।

यहाँ प्रथम पद $a=1$ तथा सार्वअन्तर $d=3$ है

चूँकि n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ होता है।

अतः 20 पदों का योग
$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 1 + (20-1) \times 3]$$

$$= 10[2 + 57] = 590$$

अतः अभीष्ट योगफल = 590 है

(ii) समान्तर श्रेणी 2, 7, 12,..... दी हुई है।

यहाँ प्रथम पद $a = 2$ सार्वअन्तर $d = 5$ है। चूँकि n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ होता है

$$\begin{aligned} \text{अतः 10 पदों का योगफल} \quad S_{10} &= \frac{10}{2}[2 \times 2 + (10-1) \times 5] \\ \text{या} \quad S_{10} &= 5[4 + 45] = 5 \times 49 = 245 \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट योगफल = 245

उदाहरण-15. निम्नलिखित का योगफल ज्ञात कीजिए

(i) $34 + 32 + 30 + \dots + 10$

(ii) $(-5) + (-8) + (-11) + \dots + (-230)$

हल: (i) दी हुई श्रेणी $34 + 32 + 30 + \dots + 10$ एक समान्तर श्रेणी है, जिसका प्रथम पद $a = 34$ अन्तिम पद $\ell = a_n = 10$ तथा सार्वअन्तर $d = -2$ है।

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad a_n &= a + (n-1)d \\ \text{या} \quad 10 &= 34 + (n-1)(-2) \\ \text{या} \quad 10 &= 34 - 2n + 2 \\ \text{या} \quad 2n &= 26 \\ \text{या} \quad n &= 13 \end{aligned}$$

श्रेणी का योगफल $S_n = \frac{n}{2}[a + \ell]$

अतः $S_{13} = \frac{13}{2}[34 + 10] = 13 \times 22 = 286$

(ii) दी हुई श्रेणी $(-5) + (-8) + (-11) + \dots + (-230)$ एक समान्तर श्रेणी है, जिसका प्रथम पद $a = -5$ तथा सार्वअन्तर $d = -3$ एवं अन्तिम n वाँ पद $a_n = \ell = -230$ है

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad a_n &= a + (n-1)d \\ \text{यहाँ} \quad -230 &= -5 + (n-1)(-3) \\ \text{या} \quad -230 &= -5 - 3n + 3 \\ \text{या} \quad 3n &= 228 \\ \text{या} \quad n &= \frac{228}{3} = 76 \end{aligned}$$

$\therefore S_n = \frac{n}{2}[a + \ell]$

$\therefore S_{76} = \frac{76}{2}[-5 + (-230)] = 38 \times (-235) = -8930$

उदाहरण-15. समान्तर श्रेणी 54, 51, 48,..... के कितने पदों का योगफल 513 होगा ?

हल: समान्तर श्रेणी 54, 51, 48,..... का प्रथम पद $a = 54$ एवं सार्वअन्तर $d = -3$ है।

माना n पदों का योग $S_n = 513$ है तब समान्तर श्रेणी के n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$\text{यहाँ} \quad 513 = \frac{n}{2}[2 \times 54 + (n-1) \times (-3)]$$

$$\text{या} \quad 513 = \frac{n}{2}[108 - 3n + 3]$$

$$\text{या} \quad 513 \times 2 = n(111 - 3n)$$

$$\text{या} \quad 3n^2 - 111n + 1026 = 0$$

$$\text{या} \quad n^2 - 37n + 342 = 0$$

गुणनखण्ड करने पर

$$\text{या} \quad n^2 - 18n - 19n + 342 = 0$$

$$\text{या} \quad n(n-18) - 19(n-18) = 0$$

$$\text{या} \quad (n-19)(n-18) = 0$$

$$\text{या} \quad n = 19 \text{ एवं } n = 18$$

यहाँ सार्वअन्तर $d = -3$ (ऋणात्मक है)

$$\begin{aligned} \text{एवं 19 वाँ पद} &= a_{19} = a + (n-1)d \\ &= 54 + (19-1)(-3) \end{aligned}$$

यहाँ 19 वाँ पद शून्य है। अतः 18 पदों का योग एवं 19 पदों का योग बराबर एवं 513 होगा।

उदाहरण-16. समान्तर श्रेणी के प्रथम 15 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसका n वाँ पद $a_n = 9 - 5n$ है।

हल: चूँकि श्रेणी का n वाँ पद $a_n = 9 - 5n$

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad a_1 &= 9 - 5 \times 1 = 4 \\ a_2 &= 9 - 5 \times 2 = -1 &= \frac{15}{2}[8 - 70] \\ a_3 &= 9 - 5 \times 3 = -6 \end{aligned}$$

इस प्रकार प्राप्त संख्याओं की सूची 4, -1, -6, प्राप्त होती है,

जो कि समान्तर श्रेणी है, जिसका प्रथम पद $a = 4$ एवं सार्वअन्तर $d = -5$ है।

इस प्रकार इस श्रेणीके प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\begin{aligned} \text{यहाँ} \quad S_{15} &= \frac{15}{2}[2 \times 4 + (15-1) \times (-5)] \\ &= \frac{15}{2}[8 - 70] = -(15 \times 31) = -465 \end{aligned}$$

अतः समान्तर श्रेणी के प्रथम 15 पदों का योगफल -465 होगा।

उदाहरण-17. यदि किसी समान्तर श्रेणी के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो उसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है कि $S_7 = 49$ एवं $S_{17} = 289$

समान्तर श्रेणी के n पदों का योग चूँकि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

यहाँ $S_7 = \frac{7}{2}[2a + (7-1)d] = 49$

तथा $S_{17} = \frac{17}{2}[2a + (17-1)d] = 289$

अतः उपरोक्त दोनों समीकरणोंको सरल रूप में लिखने पर प्रथम समीकरण

$$2a + 6d = \frac{49 \times 2}{7}$$

या $a + 3d = 7$... (i)

एवं द्वितीय समीकरण $2a + 16d = \frac{289 \times 2}{17}$

या $a + 8d = 17$... (ii)

समीकरण (i) में से (ii) को घटाने पर,

$$5d = 10$$

या $d = 2$

d का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$a + 3 \times 2 = 7$$

या $a = 7 - 6$

या $a = 1$

अतः a एवं d के मान समान्तर श्रेणी के n पदोंके योग के सूत्र में रखने पर n पदों का योग,

$$S_n = \frac{1}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2] = \frac{n}{2}[2 + 2n - 2] = n^2$$

अतः समान्तर श्रेणी के n पदों का योग n^2 है।

उदाहरण-18. यदि किसी समान्तर श्रेणी के n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो पहला पद क्या है? पहले दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी प्रकार तीसरे, 10 वें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है कि समान्तर श्रेणी के n पदों का योग $S_n = 4n - n^2$ है

अतः $n = 1$ पर $S_1 = 4 \times 1 - (1)^2 = 4 - 1 = 3$

अतः प्रथम पद 3 है।

प्रथम दो पदों के योग के लिए

$$S_2 = 4 \times 2 - (2)^2 = 8 - 4 = 4$$

अतः प्रथम दो पदों का योग 4 है।

इस प्रकार दूसरा पद $a_2 = S_2 - S_1 = 4 - 3 = 1$

अर्थात् श्रेणी का दूसरा पद 1 है।

यहाँ पहले तीन पदों का योग $S_3 = 4 \times 3 - (3)^2 = 12 - 9 = 3$

अतः श्रेणी का तीसरा पद $a_3 = S_3 - S_2 = 3 - 4 = -1$

इस प्रकार समान्तर श्रेणी 3, 1, -1, प्राप्त हुई है। इसका सार्वअन्तर $d = a_3 - a_2 = -1 - 1 = -2$ होगा।

$$n \text{ वॉ पद या } a_n = a + (n-1)d$$

यहाँ प्रथम पद $a = 3$, सार्वअन्तर $d = -2$, है इस प्रकार

$$a_n = 3 + (n-1) \times (-2) = 3 - 2n + 2 = 5 - 2n$$

अर्थात् n वाँ पद $a_n = 5 - 2n$ है। अतः 10 वें पद के लिए $n = 10$ रखने पर

$$a_{10} = 5 - 2 \times 10 = 5 - 20 = -15$$

इस प्रकार 10 वाँ पद -15 होगा।

उदाहरण-19. 250 से 1000 तक 3 से भाज्य प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: स्पष्ट है कि 250 से 1000 के बीच 3 से भाज्य संख्याएँ 252, 255, 258, ..., 999 हैं जो कि एक समान्तर श्रेणी हैं।

इसका प्रथम पद $a = 252$, अन्तिम पद $a_n = \ell = 999$ एवं सार्वअन्तर $d = 3$ है

इस प्रकार यहाँ $a_n = a + (n-1)d$

$$\therefore 999 = 252 + (n-1) \times 3$$

$$\text{या } 999 = 252 + 3n - 3$$

$$\text{या } 999 = 249 + 3n$$

$$\text{या } 3n = 750$$

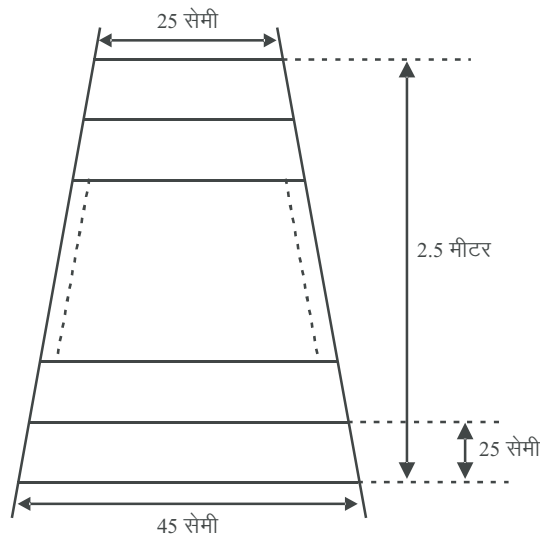
$$\text{या } n = 250$$

अतः अभीष्ट योगफल $S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$

$$\text{अर्थात् } S_{250} = \frac{250}{2}(252 + 999)$$

इस प्रकार अभीष्ट योगफल 156375 होगा।

उदाहरण-20. एक सीढ़ी के क्रमागत डंडे परस्पर 25 सेमी. की दूरी पर हैं। (नीचे दिए गए चित्र में देखिए) डंडों की लम्बाई एक समान रूप से घटती जाती है तथा सबसे निचले डंडे की लम्बाई 45 सेमी. है और सबसे ऊपर वाले डंडे की लम्बाई 25 सेमी. है। यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दूरी 2.5 मी. है, तो डंडों को बनाने के लिए कितनी लम्बाई की लकड़ी लेना आवश्यक होगा?



हल: दिया गया है कि सीढ़ी के दो क्रमागत डंडों के बीच की दूरी 25 सेमी है तथा सबसे ऊपरी एवं सबसे निचले डंडों के मध्य दूरी 2.5 मी. अर्थात् 250 सेमी. है।

$$\text{अतः सीढ़ी में डंडों की संख्या} = \frac{250}{25} + 1 = 10 + 1 = 11$$

यह भी दिया हुआ है कि डंडों की लम्बाई नीचे से ऊपर जाने पर एक समान रूप से घटती जाती है तथा सबसे निचले डंडे की लम्बाई 45 सेमी एवं सबसे ऊपर के डंडे की लम्बाई 25 सेमी है। इस प्रकार स्पष्ट है कि डंडों की लम्बाई समान्तर श्रेढी में है जिसका प्रथम पद $a = 45$ सेमी. एवं 11 वॉ पद (अन्तिम पद) $l = 25$ सेमी है।

अतः डंडों को बनाने वाली लकड़ी की कुल लम्बाई = समान्तर श्रेढी के 11 पदों का योग

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } S_{11} &= \frac{11}{2}(45 + 25) \text{ सेमी} \\ &= 11 \times 35 = 385 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$

अर्थात् लकड़ी की कुल लम्बाई 3.85 मी. होगी।

प्रश्नमाला 5.3

- निम्नलिखित समान्तर श्रेढियों का योगफल ज्ञात कीजिए।
 - 1, 3, 5, 7, ..., 12 पदों तक
 - 8, 3, -2, ..., 22 पदों तक
 - $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \dots, 11$ पदों तक
- निम्नलिखित का योगफल ज्ञात कीजिए।
 - $3 + 11 + 19 + \dots + 803$
 - $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \dots + 84$
- पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
 - समान्तर श्रेढी 9, 17, 25, ... के कितने पद लिए जाये कि उनका योगफल 636 हो ?
 - समान्तर श्रेढी 63, 60, 57, ... के कितने पद लिए जाये कि उनका योगफल 693 हों?
- निम्न श्रेढियों के पहले 25 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका n वॉ पद दिया है :
 - $a_n = 3 + 4n$
 - $a_n = 7 - 3n$
- एक समान्तर श्रेढी के पहले 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसमें द्वितीय तथा तृतीय पद क्रमशः 14 तथा 18 है।
- किसी समान्तर श्रेढी का प्रथम एवं अन्तिम पद क्रमशः 17 और 350 है। यदि सार्वअन्तर 9 हो तो समान्तर श्रेढी में पदों की संख्या कितनी है तथा उनका योग क्या है ?
- 1 से 1000 के बीच 3 से भाज्य सभी विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।
- एक समान्तर श्रेढी में प्रथम पद 8 है, n वॉ पद 33 है। तथा पहले n पदों का योग 123 है तो n तथा सार्वअन्तर d को ज्ञात कीजिए।
- 280 रु. की राशि चार पुरस्कार देने के लिए रखी गई है। यदि प्रथम पुरस्कार के बाद का प्रत्येक पुरस्कार, अपने ठीक पहले पुरस्कार से 20 रु. कम हो, तो प्रत्येक पुरस्कार की राशि ज्ञात कीजिए।
- एक टेलीविजन सेटों का निर्माता, तीसरे वर्ष 600 टी.वी. तथा सातवें वर्ष में 700 टी.वी. सेटों का उत्पादन करता है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए
 - प्रथम वर्ष में उत्पादन
 - 10 वें वर्ष में उत्पादन
 - 7 वर्षों में कुल उत्पादन

विविध प्रश्नमाला-5

- दो समान्तर श्रेढियों का सार्वअन्तर समान है। उनमें से एक का पहला पद 8 है और दूसरे का 3 है। उनके 30 वें पदों के बीच का अन्तर है:

(क) 11	(ख) 3	(ग) 8	(घ) 5
--------	-------	-------	-------
- यदि 18, a , b , -3 समान्तर श्रेढी में है तो $a + b =$

(क) 19	(ख) 7	(ग) 11	(घ) 15
--------	-------	--------	--------

3. यदि एक समान्तर श्रेणी का 7 वाँ तथा 13 वाँ पद क्रमशः 34 तथा 64 हैं, तो इसका 18 वाँ पद है:
(क) 89 (ख) 88 (ग) 87 (घ) 90
4. यदि एक समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 2 एवं सार्वअन्तर 8 है तथा n पदों का योग 90 है, तो n का मान होगा:
(क) 3 (ख) 4 (ग) 5 (घ) 6
5. यदि एक समान्तर श्रेणी के n पदों का योगफल है, तो 164 इसका कौनसा पद है:
(क) 12 वाँ (ख) 15 वाँ (ग) 27 वाँ (घ) 20 वाँ
6. यदि एक समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल S_n है तथा $S_{2n} = 3S_n$ है, तो $S_{3n} : S_n$ होगा:
(क) 10 (ख) 11 (ग) 6 (घ) 4
7. एक समान्तर श्रेणी का प्रथम एवं अंतिम पद क्रमशः 1 तथा 11 है। यदि इसके पदों का योगफल 36 है, तो इसके पदों का संख्या होगी:
(क) 5 (ख) 6 (ग) 9 (घ) 11
8. समान्तर श्रेणी 3, 5, 7, 9, ..., 201 का अन्त से 5 वाँ पद लिखिए।
9. यदि एक समान्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद $\frac{4}{5}, a, 2$ हैं, तो a का मान लिखिए।
10. प्रथम 1000 धनपूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।
11. क्या संख्याओं का अनुक्रम 5, 11, 17, 23, में कोई पद 299 है ?
12. समान्तर श्रेणी $20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, 17\frac{3}{4}, \dots$ का कौनसा पद, प्रथम ऋणात्मक पद है?
13. चार संख्याएं समान्तर श्रेणी में हैं। यदि उनका योग 20 तथा उनके वर्गों का योग 120 हो, तो संख्याएं ज्ञात कीजिए।
14. यदि एक समान्तर श्रेणी के n पदों का योग $\frac{3n^2}{2} + \frac{5n}{2}$ हो, तो उसका 25 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
15. एक पंक्ति के मकानों को क्रमागत रूप से संख्या 1 से 49 तक अंकित किया गया है। दर्शाइये कि का एक मान ऐसा है कि x से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओं का योग उसके बाद आने वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है। x का मान ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक समान्तर श्रेणी का व्यापक रूप $a, a + d, a + 2d, \dots$ है जहाँ a प्रथम पद एवं d सार्व अन्तर है।
2. संख्याओं का अनुक्रम समान्तर श्रेणी होता है यदि अंतर $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ समान मान प्राप्त हो। यह एक समान्तर श्रेणी का सार्वअन्तर कहलाता है।
3. समान्तर श्रेणी का व्यापक पद (n वाँ पद) $a_n = a + (n-1)d$ होता है, जहाँ a प्रथम पद एवं d सार्वअन्तर है।
4. समान्तर श्रेणी $a, a + d, a + 2d, \dots + (n-1)d, \dots$ के n पदों का योगफल $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
या $S_n = \frac{n}{2}[a + \ell]$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ $\ell =$ अंतिम पद $= n$ वाँ पद $= a + (n-1)d$ है।
5. समान्तर श्रेणी के पदों का चयन निम्नलिखित रूप में करना चाहिये।
पदों की संख्या पद
3 $a - d, a, a + d$
4 $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$
5 $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$
6. यदि किसी समान्तर श्रेणीके पदों का योग दिया हुआ है, तो श्रेणी का n वाँ पद निम्नांकित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है
$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 5.1

1. (i) $a = 6, d = 3$ (ii) $a = -7, d = -2$ (iii) $a = \frac{3}{2}, d = -1$ (iv) $a = 1, d = -3$
(v) $a = -1, d = \frac{5}{4}$ (vi) $a = 3, d = -2$ (vii) $a = 3, d = -5$
2. (i) $-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$ (iii) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9 (iv) 4, 1, -2, -5
(v) 11, 7, 3, -1 (vi) -1.25, -1.50, -1.75, -2.00 (vii) $20, \frac{77}{4}, \frac{74}{4}, \frac{71}{4}$
3. (i) हाँ, $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}$ (ii) हाँ, $d = 0; \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$ (iii) नहीं (iv) नहीं
(v) हाँ, $d = \sqrt{2}; \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}, \sqrt{128}$ (vi) हाँ, $d = a; 5a, 6a, 7a, 8a$
(vii) नहीं (viii) हाँ

प्रश्नमाला 5.2

1. (i) 47 (ii) $35\sqrt{2}$ (iii) 101 2. (i) 35 वाँ (ii) 22 वाँ (iii) नहीं (iv) नहीं
3. 87 4. 5 वाँ 5. 4, 10, 16, 22 6. 128 7. -32 8. 55
9. 69 10. 5, 10, 15, 20

प्रश्नमाला 5.3

1. (i) 144 (ii) -979 (iii) $\frac{33}{20}$ 2. (i) 40703 (ii) $1046\frac{1}{2}$ 3. (i) 12 (ii) 21, 22
4. (i) 1375 (ii) -800 5. 5610 6. 38, 6973 7. 83667 8.
9. रु. 100, रु. 80, रु. 60, रु. 40 10. (i) 550 (ii) 775 (iii) 4375

विविध प्रश्नमाला-5

1. (घ) 2. (घ) 3. (क) 4. (ग) 5. (ग) 6. (ग) 7. (ख)
8. 193 9. $\frac{7}{5}$ 10. 500500 11. हाँ 12. 28 वाँ 13. 2, 4, 6, 8 या 8, 6, 4, 2 है
14. 76 15. $x = 35$