06

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios)

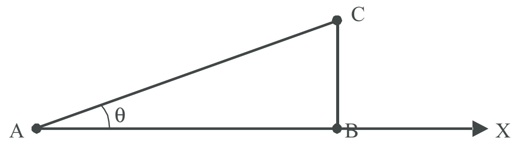
प्रस्तावना (Introdution)

कक्षा 9 में आपने न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के बारे में अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम समकोण त्रिभुज के विशिष्ट कोण $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ एवं 90° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करेंगे।

6.01 कोण 0° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान

माना परिक्रमी रेखा CA, प्रारम्भिक स्थिति CX से प्रारम्भ कर वामावर्त (धनात्मक) दिशा में अतिअल्प कोण $\angle XCA = \theta$ बनाती हैं। बिन्दु A से CX पर लम्ब AB डालते है। जिसका परिमाण बहुत अल्प होता है। जैसे–जैसे रेखा CA स्थिर रेखा CX की ओर अग्रसर होती है। वैसे–वैसे CB की लम्बाई शून्य की ओर अग्रसर होती है। इस स्थिति में रेखा CA और CB सम्पाती हो जाती हैं और $\angle XAC = \theta = 0^\circ$ तथा $CA = CB \quad \therefore AB = 0$ (शून्य)

अतः 0° के संगत त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान निम्न होगे



आकृति 6.01

$$\sin 0^\circ = \frac{CB}{CA} = \frac{0}{CA} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{AB}{CA} = \frac{CA}{CA} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{0}{AB} = 0 \qquad \cot 0^\circ = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{0} = \infty$$

$$\sec 0^\circ = \frac{CA}{AB} = \frac{CA}{AA} = 1 \qquad \operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{0} = \infty$$

6.2 कोण 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात

ΔCBA से स्पष्ट है कि जैसे–जैसे बढ़ता जाता है। वैसे–वैसे CB की लम्बाई घटती जाती है और बिन्दु B बिन्दु C के निकट आता जाता है अतंतः जब $\theta, 90^\circ$ के बराबर हो जाए तो बिन्दु B बिन्दु C के संपाती हो जायेगा इस स्थिति में CB=0 तथा CA=AB

$$\sin 90^\circ = \frac{AB}{CA} = \frac{AB}{AB} = 1$$

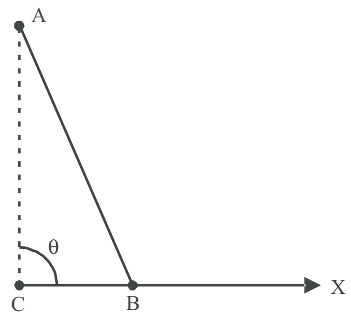
$$\cos 90^\circ = \frac{CB}{CA} = \frac{0}{AB} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{0} = \infty$$

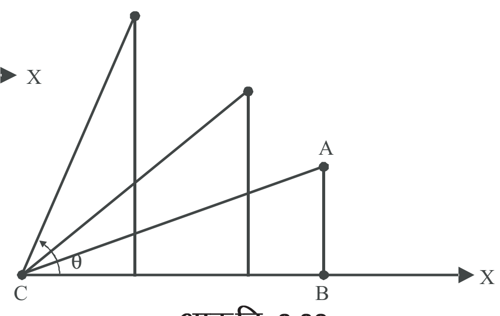
$$\cot 90^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{0}{AB} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{CA}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$



आकृति 6.02



आकृति 6.03

6.03 कोण 30° तथा कोण 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of 30° and 60°)

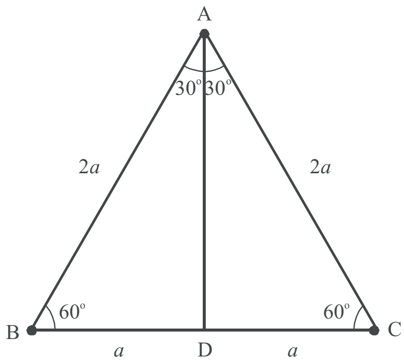
एक समबाहु ΔABC की रचना करते है, जिसका प्रत्येक भुजा की लम्बाई $2a$ है। समबाहु Δ का प्रत्येक कोण 60° होता है। शीर्ष A से भुजा BC पर लम्ब AD है। AD, $\angle A$ का समद्विभाजक होगा तथा बिन्दु D भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

$\therefore \quad BD = DC = a$ तथा $\angle BAD = 30^\circ$

अतः ΔABC में कोण D समकोण है तथा कर्ण $AB = 2a$, तथा $BD = a$

ΔABD में बौधायन प्रमेय से,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$(2a)^2 = AD^2 + a^2$$
$$AD^2 = 4a^2 - a^2$$
$$AD = \sqrt{3}a$$



आकृति 6.04

कोण 30° के त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण ΔADB में आधार $(AD) = \sqrt{3}a$, लम्ब $(BD) = a$ कर्ण $(AB) = 2a$ तथा $\angle DAB = 30^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}.a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}.a}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{2a}{a} = 2$$

कोण 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण ΔADB में आधार $(BD) = a$, लम्ब $(AD) = a.\sqrt{3}$ कर्ण $(AB) = 2a$ तथा $\angle ABD = 60^\circ$

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a.\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{a.\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{AB}{AB} = \frac{2a}{a.\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

6.04 कोण 45° के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of 45°)

एक समकोण ΔABC भी रचना करते है जिसका कोण B समकोण है तथा $\angle A = 45^\circ$ हो, तो ΔABC में

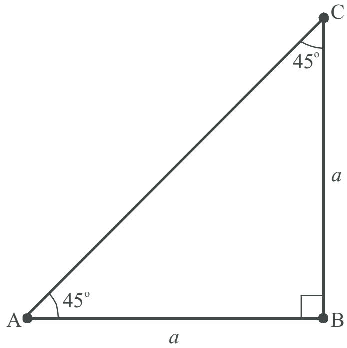
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$45^\circ + 90^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 45^\circ$$

$$\therefore \quad \angle A = \angle C$$

$$\therefore \quad AB = BC$$



आकृति 6.05

ΔABC मे बौधायन प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$AC = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

ΔABC में, $\angle A = 45^\circ$, आधार $(AB) = a$, लम्ब $(BC) = a$, कर्ण $(AC) = \sqrt{2}a$

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \qquad \cot 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2} \qquad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनपातों की सारणी

कोण (डिग्री / रेडियन) त्रिकोणमितीय अनुपात	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cosec θ	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

उदाहरण-1. $\tan^2 60^\circ + 3\cos^2 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan^2 60^\circ + 3\cos^2 30^\circ$ (त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर)

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 + 3 \times \frac{3}{4}$$

$$= 3 + \frac{9}{4} = \frac{12+9}{4} = \frac{21}{4}$$

उदाहरण-2. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

उदाहरण-3. सिद्ध कीजिए कि $4\sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ = 2\sec^2 60^\circ - \operatorname{cos}ec^2 90^\circ$

हल: बायाँ पक्ष $(L.H.S.) = 4\sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ$

$$= 4.\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2}.1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

दायाँ पक्ष $(R.H.S.) = 2\sec^2 60^\circ - \operatorname{cos}ec^2 90^\circ$

$$= 2.\left(\sqrt{2}\right)^2 - (1)^2 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \qquad \therefore L.H.S. = R.H.S.$$

उदाहरण-4. $\dfrac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cos}ec 30^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\dfrac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cos}ec 30^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}\right] = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4(3-1)}$$

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए $3\tan^2 30^\circ - \frac{4}{3}\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{cos}ec^2 45^\circ + \frac{4}{3}\sin^2 90^\circ = \frac{1}{3}$

हल: बायाँ पक्ष $(L.H.S.) = 3\tan^2 30^\circ - \frac{4}{3}\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{cos}ec^2 45^\circ + \frac{4}{3}\sin^2 90^\circ$

$$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4}{3}(1)^2 = 3.\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3}.\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}.(2) + \frac{4}{3}$$

$$= 1 - 1 - 1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$ दाया पक्ष $(R.H.S.)$

उदाहरण-6. यदि $\tan 3x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। $(x < 90^\circ)$

हल: दिया है, $\tan 3x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

$$\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

या $\tan 3x = 1$ या $\tan 3x = \tan 45^\circ$

या $3x = 45^\circ$ या $x = 15^\circ$

उदाहरण-7. यदि $\sin(A+B) = 1$ तथा $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ यहाँ $0^\circ < (A+B) \leq 90^\circ$, $A > B$ हो, तो A तथा B के मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है $\sin(A+B) = 1$

या $\sin(A+B) = \sin 90^\circ$

या $A + B = 90^\circ$ ...(1)

तथा $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

या $\cos(A-B) = \cos 30^\circ$

या $A - B = 30^\circ$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) समीकरण को जोडने पर

$$(A+B)+(A-B) = 90+30^\circ$$

$2A = 120^\circ$ या $A = 60^\circ$

A का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$60^\circ + B = 90^\circ$$

$$B = 30^\circ$$

$\therefore$ $A = 60^\circ, B = 30^\circ$

उदाहरण-8. $\dfrac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cos}ec 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\dfrac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cos}ec 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} = \left(\frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{4-3\sqrt{3}}\right)$$

(अंश व हर में $\left(4-3\sqrt{3}\right)$ से गुणा करने पर)

$$= \frac{-\left(4-3\sqrt{3}\right)\left(4-3\sqrt{3}\right)}{(4)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-\left(4-3\sqrt{3}\right)^2}{16-27}$$

$$= \frac{-\left(16+27-24\sqrt{3}\right)}{-11} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

$$\therefore \qquad \frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 45^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{45-24\sqrt{3}}{11}$$

प्रश्नमाला 6.1

निम्न के मान ज्ञात कीजिए:

1. $2\sin 45^\circ \cos 45^\circ$
2. $\cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ$
3. $\sin^2 30^\circ + 2\cos^2 45^\circ + 3\tan^2 60^\circ$
4. $3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ$
5. $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sin^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ}$
6. $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ$
7. $\dfrac{4}{\cot^2 30^\circ} + \dfrac{1}{\sin^2 30^\circ} - \cos^2 45^\circ$
8. $\dfrac{\tan^2 60^\circ + 4\sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ}{3\sec^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ}$
9. $\dfrac{\sin 30^\circ - \sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ}{\tan 30^\circ \tan 60^\circ}$
10. $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$
11. निम्न में x का मान ज्ञात कीजिए:
    (i) $\cos x = \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$
    (ii) $\sin 2x = \sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$
    (iii) $\sqrt{3}\tan 2x = \sin 30^\circ + \sin 45^\circ \cos 45^\circ + 2\sin 90^\circ$

सिद्ध कीजिए:

12. $\dfrac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1+\cos 60^\circ + \sin 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
13. $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = -\dfrac{1}{4}$

14. $\sin 30^\circ \sin^2 60 + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ = 2\sec^2 45^\circ - \cos ec^2 90^\circ$

15. $\cos ec^2 45^\circ \sec^2 30^\circ \sin^3 90^\circ \cos 60^\circ = \frac{4}{3}$

16. $\frac{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ} = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}$

17. $2\left(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ\right) - 6\left(\sin^2 45^\circ - \tan 30^\circ\right) = 6$

18. $\left(\sec^2 30^\circ + \cos ec^2 45^\circ\right)\left(2\cos 60^\circ + \sin 90^\circ + \tan 45^\circ\right) = 10$

19. $\left(1 - \sin 45^\circ + \sin 30^\circ\right)\left(1 + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ\right) = \frac{7}{4}$

20. $\cos^2 0^\circ - 2\cot^2 30^\circ + 3\cos ec^2 90^\circ = 2\left(\sec^2 45^\circ - \tan^2 60\right)$

21. यदि $x = 30^\circ$ हो, तो सिद्ध कीजिए:

(i) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ (ii) $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

(iii) $\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$ (iv) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

22. यदि $A = 60^\circ$ और $B = 30^\circ$ हो तो सिद्ध कीजिए:

$$\cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

विविध प्रश्नमाला—6

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 5 तक)

1. $\tan^2 60^\circ$ का मान है

(क) 3 (ख) $\frac{1}{3}$ (ग) 1 (घ) ∞

2. $2\sin^2 60^\circ \cos 60^\circ$ का मान होगा

(क) $\frac{4}{3}$ (ख) $\frac{5}{2}$ (ग) $\frac{3}{4}$ (घ) $\frac{1}{3}$

3. यदि $\cos ec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ हो, तो θ का मान है

(क) $\frac{\pi}{4}$ (ख) $\frac{\pi}{3}$ (ग) $\frac{\pi}{2}$ (घ) $\frac{\pi}{6}$

4. $\cos^2 45^\circ$ का मान होगा

(क) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ख) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ग) $\frac{1}{2}$ (घ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. यदि $\theta = 45^\circ$ हो, तो $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ का मान है

(क) 0 (ख) 1 (ग) 2 (घ) ∞

सिद्ध कीजिए

6. $\cos 60^\circ = 2\cos^2 30^\circ - 1$

7. $\sin 60^\circ = \dfrac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^0}$

8. $\cos 60^\circ = \dfrac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^0}$

9. $\left(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ\right)^2 = 2$

10. $4\tan 30^\circ \sin 45^0 \sin 60^0 \sin 90^0 = \sqrt{2}$

11. $\sin^2 60^\circ \cot^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. $4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\cot\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए $\dfrac{1-\cos^2\theta}{2-\sin^2\theta} = \dfrac{3}{5}$

14. सिद्ध कीजिए $3\left(\tan^2 30^\circ + \cot^2 30^\circ\right) - 8\left(\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ\right) = 0$

15. $4\left(\sin^4 30^\circ + \cos 60^\circ\right) - 3\left(\cos^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ\right) = \dfrac{15}{4}$

16. $\dfrac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1+\cos 60^\circ + \sin 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

17. $2\left(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ\right) - 6\left(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ\right) = 6$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 6.1

(1) 1　(2) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$　(3) $10\dfrac{1}{4}$　(4) 0　(5) $\dfrac{67}{12}$　(6) $\dfrac{3}{4}$

(7) $\dfrac{13}{6}$　(8) $\dfrac{18}{7}$　(9) $\dfrac{3}{2}$　(10) $\sqrt{3}$

(11) (i) 30° (ii) 15° (iii) 30°

विविध प्रश्नमाला–6

(1) क　(2) ग　(3) ख　(4) ग　(5) ख

(11) $\dfrac{1}{4}$　(12) 0