अध्याय

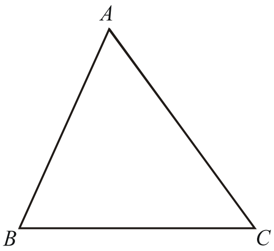
6

सरल रेखीय आकृतियाँ (Rectilinear Figures)

6.01 त्रिभुज एवं उसके कोण :

हमने रेखाओं द्वारा एक बिन्दु पर बनने वाले कोणों का अध्ययन पूर्व में किया है। अब हम समतल में स्थित एक सरलतम आकृति पर विचार करेंगे जो कि दो से अधिक रेखाओं से बनी हो। यदि हम समतल में कोई तीन असंरेख बिन्दु लें और स्केल द्वारा दो–दो बिन्दुओं को लेकर रेखाखण्ड खींचे तो कुल तीन रेखाखण्ड खींचे जा सकेंगे। इस प्रकार तीन रेखाखण्डों से घिरि हुई आकृति को त्रिभुज कहते हैं।

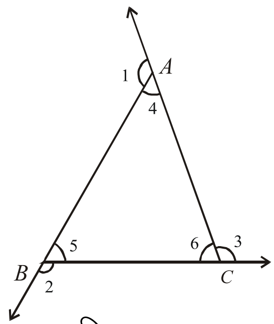
''तीन असंरेख बिन्दुओं में से दो–दो को मिलाने से बने तीन रेखाखण्डों के सम्मिलन से बनी बन्द आकृति को त्रिभुज कहते हैं।''



चित्र 6.01

चित्र 6.01 में तीन असंरेख बिन्दुओं A, B एवं C को मिलाया गया है और इस प्रकार तीन रेखाखण्डों AB, BC एवं CA से घिरि आकृति ABC को त्रिभुज कहते हैं। त्रिभुज शब्द के लिए संकेत Δ का प्रयोग करते हैं, अर्थात् त्रिभुज ABC को ΔABC लिखते हैं।

उन तीन बिन्दुओं को जिन्हें मिलाने से एक त्रिभुज बनता है, त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु या शीर्ष (vertices) कहते हैं। त्रिभुज के तीन रेखाखण्डों को उसकी भुजाएँ (sides) कहते हैं। त्रिभुज के तीन रेखाखण्डों से शीर्ष बिन्दुओं पर बने तीन कोणों को त्रिभुज के कोण कहते हैं।



चित्र 6.02

चित्र 6.02 से स्पष्ट है कि ΔABC में

(i) बिन्दु A, B एवं C उसके शीर्ष बिन्दु हैं।

(ii) रेखाखण्ड AB, BC एवं CA उसकी भुजाएँ हैं।

(iii) $\angle CAB$, (या $\angle A$), $\angle ABC$ (या $\angle B$) $\angle BCA$ (या $\angle C$) त्रिभुज के कोण हैं।

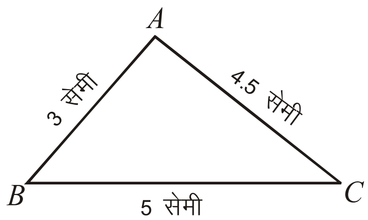
यदि ΔABC की भुजाओं को क्रमानुसार आगे बढाया जाए तो बढी हुई भुजा और अन्य संलग्न भुजा के बीच बने कोण को त्रिभुज का बहिष्कोण कहते हैं।

चित्र 6.02 में अंकित $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ त्रिभुज के **बहिष्कोण** हैं। $\angle 4, \angle 5$ एवं $\angle 6$ त्रिभुज के अन्तः कोण हैं। त्रिभुजों को भुजाओं या कोणों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है :

6.02 भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण :

(i) विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle) :

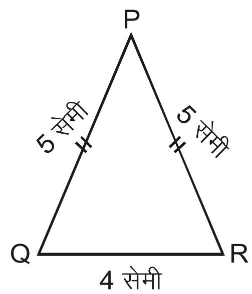
जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ अलग–अलग माप की हों, उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.03 में ΔABC एक विषमबाहु त्रिभुज है।



चित्र 6.03

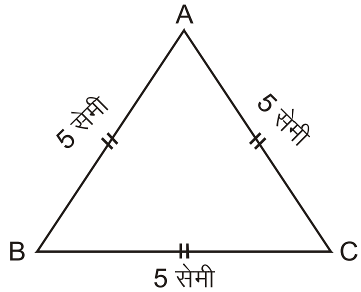
(ii) समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) :

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ समान माप की हों, तो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहा जाता है। चित्र 6.04 में ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है, इसमें $PQ = PR$ है।



चित्र 6.04

(iii) समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle) :



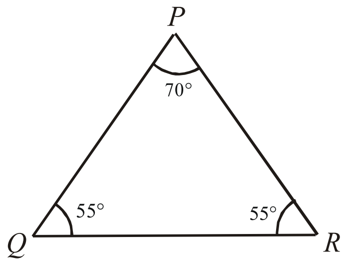
चित्र 6.05

जिस त्रिभुज में सभी भुजाएँ समान माप की हों। उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.05 में ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है इसमें $AB = BC = CA$ है।

6.03 कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण :

(i) न्यून कोण त्रिभुज (Acute angled Triangle) :

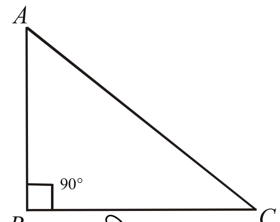
जिस त्रिभुज का प्रत्येक कोण, न्यून कोण हो, उसे न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.06 में ΔPQR एक न्यून कोण त्रिभुज है, क्योंकि इसमें $\angle P, \angle Q$ तथा $\angle R$ न्यून कोण हैं।



चित्र 6.06

(ii) समकोण त्रिभुज (Right angled Triangle) :

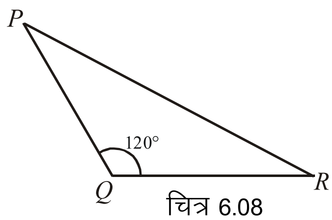
जिस त्रिभुज का कोई एक कोण 90° के बराबर हो उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.07 में ΔABC एक समकोण त्रिभुज है, क्योंकि इसमें $\angle B = 90^\circ$ है।



चित्र 6.07

(iii) अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse angled Triangle) :

जिस त्रिभुज में कोई एक कोण 90° से अधिक हो, उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.08 में ΔPQR एक अधिक कोण त्रिभुज है, क्योंकि इसमें $\angle PQR$ 90° से अधिक है।



चित्र 6.08

त्रिभुज के तीनों कोणों के माप को जोड़ने पर योगफल सदैव 180° प्राप्त होता है। नीचे इसी ज्यामितीय तथ्य को सिद्ध किया गया है।

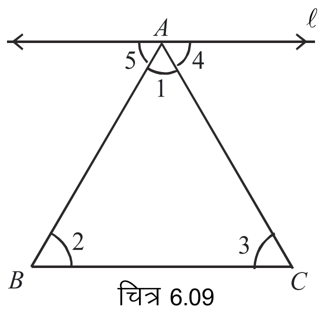
प्रमेय 6.1 *

त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल दो समकोण के बराबर होता है।

दिया है : एक त्रिभुज ABC में उसके कोणों को $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ द्वारा अंकित किया गया है।

सिद्ध करना है : $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

रचना : त्रिभुज ABC के शीर्ष A से गुजरती हुई एक सरल रेखा ℓ, भुजा BC के समान्तर खींची।



चित्र 6.09

उपपत्ति : $\because BC \parallel \ell$ है

अतः $\angle 2 = \angle 5$ (एकान्तर कोण) $\ldots$(i)

एवं $\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोण) $\ldots$(ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad \angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4 \quad \ldots$(iii)

(iii) के दोनों पक्षों में $\angle 1$ जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4 \quad \ldots$(iv)

रैखिक कोण युग्म अभिगृहीत से

$\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180° \quad \ldots$(v)

(iv) व (v) से, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ "इतिसिद्धम"

उपप्रमेय 1

यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ा दी जाए तो इस प्रकार बना बहिष्कोण अन्तराभिमुख अन्तःकोणों के योग के बराबर होता है।

$\because \Delta$ के तीनों अन्तःकोणों का योग $180°$ के बराबर होता है चित्र 6.10 में

$\therefore \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180° \quad \ldots$(i)

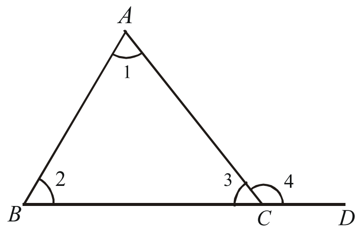
रैखिक कोण युग्म अभिगृहीत से

$\angle 3 + \angle 4 = 180° \quad \ldots$(ii)

समीकरण (i) व (ii) से

$\Rightarrow \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4$

$\Rightarrow \quad \angle 1 + \angle 2 = \angle 4$



चित्र 6.10

उपप्रमेय 2

किसी त्रिभुज में एक बहिष्कोण, प्रत्येक अन्तराभिमुख अन्तःकोण से बड़ा होता है।

उपरोक्त चित्र 6.10 में, $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ (उपप्रमेय 1 से)

$\Rightarrow \quad \angle 4 > \angle 1$

एवं $\quad \angle 4 > \angle 2$

उपप्रमेय 3

एक समकोण त्रिभुज में, समकोण ही सबसे बड़ा कोण होता है।

$\because$ एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल $= 180°$

$\therefore$ एक समकोण + दो अन्य कोणों का योग $= 180°$

$\therefore$ दो अन्य कोणों का योग $= 90°$

$\Rightarrow$ शेष दोनों कोणों में प्रत्येक न्यून कोण है।

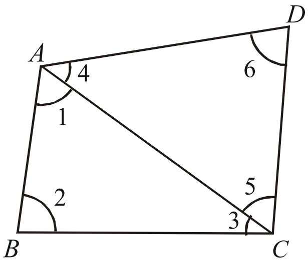
$\Rightarrow$ समकोण, शेष दोनों न्यून कोणों से बड़ा है।

टिप्पणी : प्रत्येक त्रिभुज में कम से कम दो कोण अवश्य ही न्यूनकोण होते हैं।

उपप्रमेय 4

किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योगफल चार समकोण के बराबर होता है।

चित्र 6.11 में $ABCD$ एक चतुर्भुज है इसके चार कोण $\angle A, \angle B, \angle C$ एवं $\angle D$ हैं। AC रेखा चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँट रही है।



चित्र 6.11

ΔABC में $\quad \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ \quad \ldots$(i)

एवं ΔADC म $\quad \angle 4+\angle 5+\angle 6=180^\circ \quad \ldots$(ii)

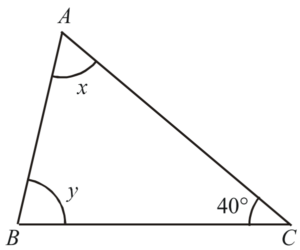
(i) तथा (ii) से $\quad \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=360^\circ$

या $\quad (\angle 1+\angle 4)+\angle 2+(\angle 3+\angle 5)+\angle 6=360^\circ$

या $\quad \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1. चित्र 6.12 में त्रिभुज ABC का एक कोण 40° है। यदि शेष दोनों कोणों का अन्तर 30° हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.12

हल : माना ΔABC के दूसरे कोण $\angle x$ एवं $\angle y$ हैं।

$\therefore \quad \angle x+\angle y+40^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle x+\angle y=140^\circ \quad \ldots$(i)

एवं $\quad \angle x-\angle y=30^\circ$ (दिया हुआ है) $\quad \ldots$(ii)

(i) तथा (ii) का योग करने पर

$$\angle x+\angle y+\angle x-\angle y=140^\circ+30^\circ$$

$\Rightarrow \quad 2\angle x=170^\circ$

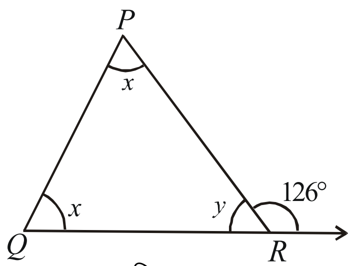
$\Rightarrow \quad \angle x=85^\circ$

अतः (i) से $\quad \angle y=140^\circ-\angle x$

$\quad =140^\circ-85^\circ=55^\circ$

अतः अभीष्ट कोण $\angle x=85^\circ$ तथा $\angle y=55^\circ$ है।

उदाहरण 2. चित्र 6.13 से $\angle RPQ, \angle QRP$ एवं $\angle PQR$ ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.13

हल : चित्र 5.13 के अनुसार

$$\angle x+\angle x=126^\circ$$

$\Rightarrow \quad 2\angle x = 126°$

$\Rightarrow \quad \angle x = 63°$

अतः $\quad \angle RPQ = 63°$

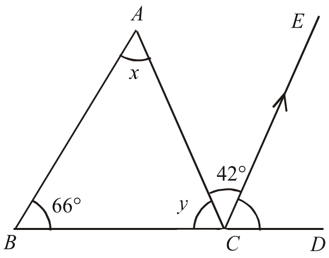
एवं $\quad \angle PQR = 63°$

अब $\quad \angle y + \angle 126° = 180°$ (दोनों रैखिक कोण युग्म हैं)

$\therefore \quad \angle y = 180° - 126° = 54°$

अतः $\quad \angle QRP = 54°$

उदाहरण 3. चित्र 6.14 में $\angle x, \angle y$ एवं $\angle ACD$ ज्ञात कीजिए। यहाँ रेखा *BA* *CE* है।



चित्र 6.14

हल : यहाँ $\angle x = 42°$ (एकान्तर कोण हैं)

एवं $\quad \angle ACD = \angle x + 66°$

$= 42° + 66°$

$= 108°$

$\angle y + \angle ACD = 180° \quad \ldots \text{(i)}$

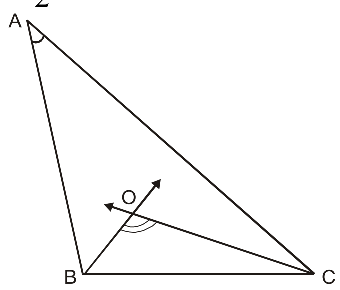
या $\quad \angle y + 108° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle y = 180° - 108°$

$\Rightarrow \quad \angle y = 72°$

उदाहरण 4. यदि किसी त्रिभुज ABC के कोण B तथा C के समद्विभाजक बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ ।

हल : चित्र 6.15 में दर्शाए अनुसार ΔABC की आकृति बनाकर $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक BO व CO खींचते हैं।



चित्र 6.15

$$\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180°$$

(Δ के तीनों कोणों का योग 180°)

या, $\quad \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times 180°$

या, $\quad \frac{1}{2}\angle A + \angle OBC + \angle OCB = 90° \quad \ldots (1)$

(दिया हुआ है कि BO व CO क्रमशः $\angle B$ व $\angle C$ के समद्विभाजक है)

$\because \quad \angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$ (ΔOBC के तीनों कोण) $\quad \ldots (2)$

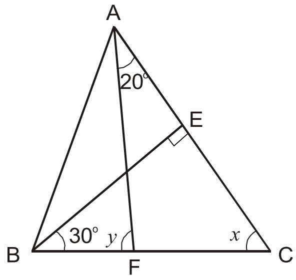
(2) में से (1) को घटाने पर

$$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB - \frac{1}{2}\angle A - \angle OBC - \angle OCB = 180 - 90$$

$\Rightarrow$ $$\angle BOC - \frac{1}{2}\angle A = 90^o$$

या, $$\angle BOC = 90^o + \frac{1}{2}\angle A$$

उदाहरण 5: चित्र 6.16 में यदि $BE \perp AC$, $\angle EBC = 30^o$ और $\angle FAC = 20^o$ है, तो $\angle x$ और $\angle y$ के मान कीजिए।



चित्र 6.16

हलः ΔBCE में $90^o + 30^o + x = 180^o$

या, $120^o + \angle x = 180$

या, $\angle x = 180 - 120$

अतः $\angle x = 60^o$

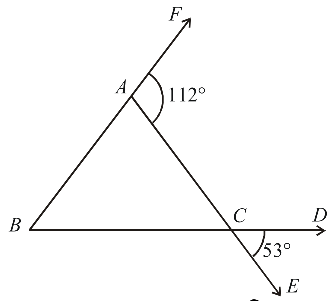
अब $\angle y = \angle FAC + \angle x$ (बहिष्कोण = अन्तराभिमुख कोणों का योग)

अतः, $\angle y = 20^o + 60^o = 80^o$

9K7IIS

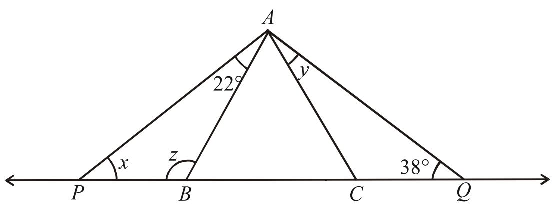
प्रश्नमाला 6.1

1. दिए गए चित्र 6.17 से ΔABC के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.17

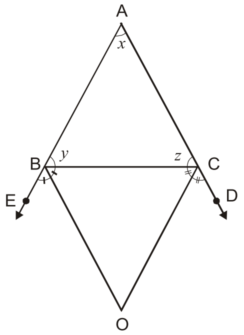
2. चित्र 6.18 में ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। चित्र से $\angle x, \angle y$ और $\angle z$ के मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.18

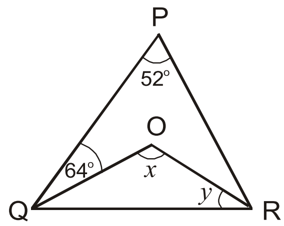
3. चित्र 6.19 में ΔABC की भुजाएँ AB और AC को क्रमशः E और D तक बढ़ाया गया है। यदि

$\angle CBE$ और $\angle BCD$ के समद्विभाजक क्रमशः BO और CO बिन्दु O पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90^o - \frac{\angle x}{2}$ है।



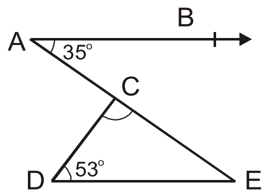
चित्र 6.19

4. चित्र 6.20 में $\angle P = 52^o$ और $\angle PQO = 64^o$ है। यदि QO और RO क्रमशः $\angle PQR$ और $\angle PRQ$ के समद्विभाजक हैं, तो $\angle x$ और $\angle y$ के मान ज्ञात कीजिए।



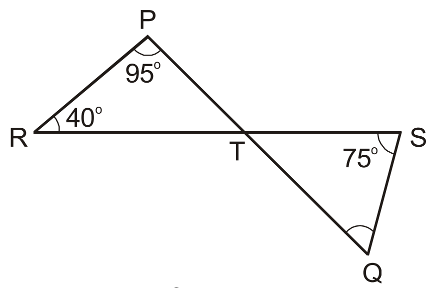
चित्र 6.20

5. चित्र 6.21 में, यदि AB || DE, $\angle BAC = 35^o$ और $\angle CDE = 53^o$ है, तो $\angle DCE$ ज्ञात कीजिए।



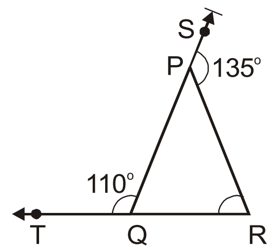
चित्र 6.21

6. चित्र 6.22 में, यदि रेखाएँ PQ और RS बिन्दु T पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि $\angle PRT = 40^o$, $\angle RPT = 95^o$ और $\angle TSQ = 75^o$ है तो $\angle SQT$ ज्ञात कीजिए।



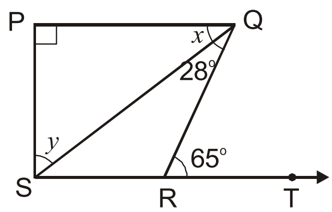
चित्र 6.22

7. चित्र 6.23 में, ΔPQR की भुजाओं QP और RQ को क्रमशः बिन्दुओं S और T तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle SPR = 135^o$ है और $\angle PQT = 110^o$ है, तो $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए।



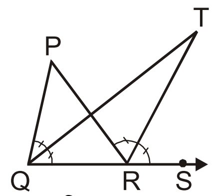
चित्र 6.23

8. चित्र 6.24 में, यदि $PQ \perp PS, PQ \parallel SR, \angle SQR = 28^\circ$ और $\angle QRT = 65^\circ$ है, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.24

9. चित्र 6.25 में, ΔPQR की भुजा QR को बिन्दु S तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle PQR$ और $\angle PRS$ के समद्विभाजक बिन्दु T पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle QTR = \frac{1}{2}\angle QPR$ है।



चित्र 6.25

10. एक त्रिभुज ABC का कोण A समकोण है। BC पर एक बिन्दु L इस प्रकार है कि $AL \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए $\angle BAL = \angle ACB$
11. किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात $2:3:4$ है। इस त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

6.04 सरल रेखीय आकृतियाँ :

तीन या तीन से अधिक सरल रेखाओं से घिरि हुई समतलीय आकृति को सरल रेखीय आकृति कहते हैं। यदि हम समतल में $n(n \geq 3)$ अलग–अलग बिन्दु लें जो कि इस प्रकार हों कि :

(i) विचाराधीन n बिन्दुओं में से कोई भी दो बिन्दुओं से बना रेखाखण्ड अपने सिरों के दोनों बिन्दुओं के अतिरिक्त शेष किसी भी बिन्दु ($n-2$ बिन्दुओं) में से न गुजरे।

(ii) एक ही अंत्य बिन्दु से खींचे गए कोई दो रेखाखण्ड एक ही रेखा में न हो।

तब दो–दो बिन्दुओं को क्रमशः (एक ही क्रम में) मिलाने से घिरी हुई समतलीय आकृति को n भुजा का

बहुभुज कहते हैं। वे बिन्दु जिन्हें मिलाने से बहुभुज बनता है, बहुभुज के शीर्ष बिन्दु कहलाते हैं।जिन रेखाखण्डों से बहुभुज बनता है, उन्हें बहुभुज की भुजाएँ कहते हैं। शीर्ष बिन्दुओं पर रेखाखण्डों से बने कोण, बहुभुज के अन्तःकोण कहलाते हैं।

स्पष्ट है कि n भुजा के बहुभुज में :

(i) n शीर्ष बिन्दु (या शीर्ष) होते हैं,

(ii) n भुजाएँ होती हैं,

(iii) n अन्तःकोण होते हैं।

बहुभुज को भुजाओं की संख्या और कोणों के माप के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है।

(i) त्रिभुज (Triangle) :

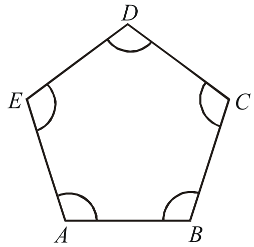
जब $n = 3$ हो तो सरल रेखीय आकृति को त्रिभुज कहते हैं।

(ii) चतुर्भुज (Quadrilateral) :

जब $n = 4$ हो तो समतलीय आकृति को चतुर्भुज कहा जाता है।

(iii) पंचभुज (Pentagon) :

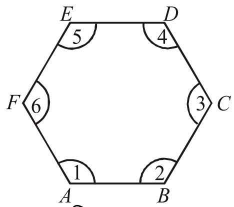
वह बहुभुज जिसमें भुजाओं की संख्या पाँच होती है, पंचभुज कहलाता है। चित्र 6.26 में समतलीय आकृति $ABCDE$ एक पंचभुज है। इसमें AB, BC, CD, DE एवं EA इसकी भुजाएँ हैं और $\angle EAB, \angle ABC, \angle BCD, \angle CDE$ एवं $\angle DEA$ इसके अन्तःकोण हैं।



चित्र 6.26

(vi) षट्भुज (Hexagon) :

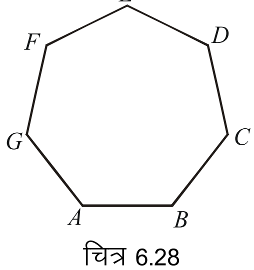
यदि किसी बहुभुज में भुजाओं की संख्या 6 हो तो उसे षट्भुज कहते हैं। चित्र 6.27 में $ABCDEF$ एक षट्भुज है। इसमें अंकित कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ तथा $\angle 6$ इसके अन्तःकोण हैंतथा AB, BC, CD, DE, EF एवं FA इसकी भुजाएँ हैं।



चित्र 6.27

(vii) सप्तभुज (Heptagon) :

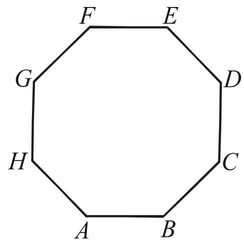
यदि किसी बहुभुज में सात भुजाएँ हो तो उसे सप्तभुज कहा जाता है। चित्र 6.28 में $ABCDEFG$ एक सप्तभुज है।



चित्र 6.28

(viii) अष्टभुज (Octagon) :

यदि किसी बहुभुज में भुजाओं की संख्या आठ हो तो उसे अष्टभुज कहते हैं। चित्र 629 में *ABCDEFGH* एक अष्टभुज है।



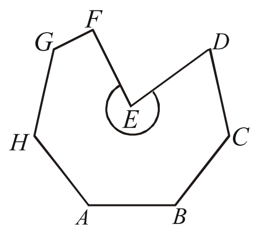
चित्र 6.29

उत्तल बहुभुज (Convex polygon) :

वह बहुभुज जिसमें प्रत्येक अन्तःकोण का माप दो समकोण से छोटा होता है, उत्तल बहुभुज कहलाता है। जब तक अन्यथा उल्लेखित न हो बहुभुज शब्द से आशय एक उत्तल बहुभुज से ही लिया जाना चाहिए।

अवतल बहुभुज (Concave polygon) :

जिस बहुभुज में कम से कम एक अन्तःकोण दो समकोण से अधिक हो, उसे अवतल बहुभुज कहते हैं।

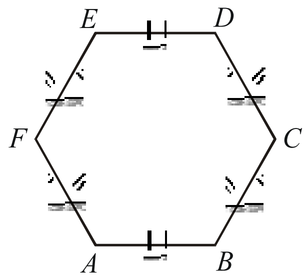


चित्र 6.30

दिए गए चित्र 6.30 में *ABCDEFGH* एक अवतल बहुभुज है क्योंकि इसमें अन्तःकोण $\angle FED$ दो समकोण से अधिक हैं।

समबाहु बहुभुज (Equilateral ploygon) :

जब किसी बहुभुज की सभी भुजाएँ समान माप की हों तो उसे एक समबाहु बहुभुज कहते हैं। (चित्र 6.31)

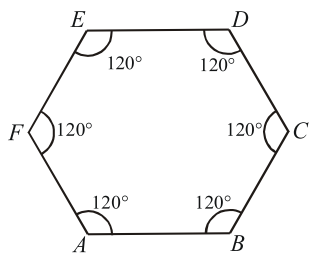


समबाहु षट्भुज

चित्र 6.31

समान कोणिक बहुभुज (Equiangular ploygon) :

यदि किसी बहुभुज के सभी अन्तःकोणों के माप समान हों तो उसे समान कोणिक बहुभुज कहते हैं। (चित्र 6.32)

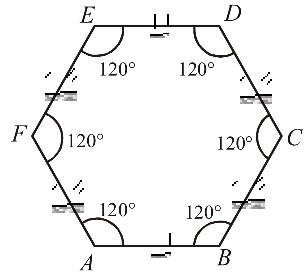


समान कोणिक षट्भुज

चित्र 6.32

समबहुभुज (Regular ploygon) :

जो बहुभुज समबाहु एवं समान कोणिक दोनों ही प्रकार का हो, उसे एक समबहुभुज कहते हैं। (चित्र 6.33)



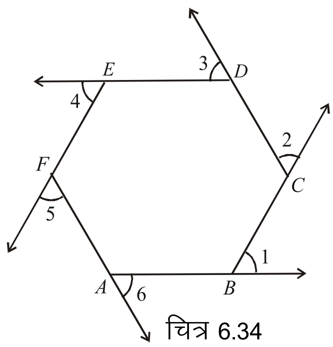
समषट्भुज

चित्र 6.33

बहुभुज के बहिष्कोण (Exterior angles of a ploygon) :

बहुभुज की भुजाओं को एक ही क्रम वामावर्त या दक्षिणावर्त में बढ़ाने पर बहुभुज के बाहर की ओर बने कोण जो कि अन्तः कोणों के संपूरक कोण हैं, बहुभुज के बहिष्कोण कहलाते हैं।

चित्र 6.34 में बहुभुज $ABCDEF$ की भुजाओं को एक ही क्रम में बढ़ाया गया है, इस प्रकार बहिष्कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ तथा $\angle 6$ बन रहे हैं।



चित्र 6.34

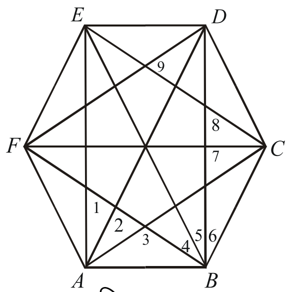
बहुभुज का परिमाप (Perimeter of a ploygon) :

किसी बहुभुज की भुजाओं की लम्बाइयों का योग उसका परिमाप कहलाता है।

बहुभुज के विकर्णः (Diagonals of a polygon) :

बहुभुज के शीर्षों को मिलाने से प्राप्त वे सरल रेखाएँ, जो कि भुजाएँ नहीं होती, बहुभुज के विकर्ण कहलाती हैं।

चित्र 6.35 में रेखाएँ AC, AD एवं AE, शीर्ष बिन्दु A से खींचे गए विकर्ण हैं। यहाँ कुल 9 विकर्ण चित्रांकित हैं।



चित्र 6.35

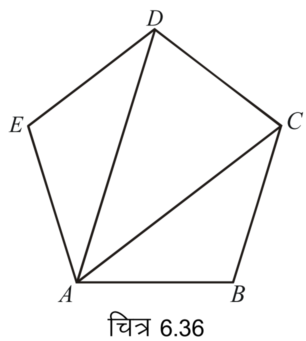
किसी n भुजा के एक बहुभुज में कुल विकर्णों की संख्या

$=\frac{n(n-1)}{2}-n$ होती है।

जैसे, यहाँ $n=6$ है तो विकर्णों की संख्या

$$=\frac{6(6-1)}{2}-6=\frac{6\times 5}{2}-6=15-6=9$$

n भुजाओं के एक बहुभुज में एक शीर्ष बिन्दु से खींचे गये विकर्णों द्वारा कुल $(n-2)$ त्रिभुज बनते हैं। चित्र 6.36 में पंचभुज $ABCDE$ के शीर्ष बिन्दु A से विकर्ण AC एवं AD खींचने पर कुल तीन त्रिभुज बनते हैं।



चित्र 6.36

उपर्युक्त तथ्य के आधार पर हम किसी बहुभुज के समस्त अन्तःकोणों का योग ज्ञात करने का सूत्र स्थापित करेंगे और इसी के आधार पर किसी भी बहुभुज के समस्त बहिष्कोणों का योगफल भी ज्ञात करेंगे।

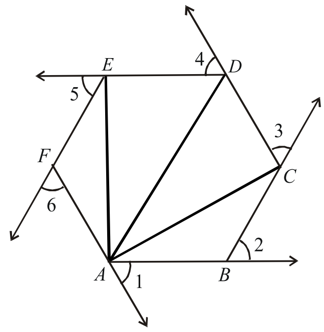
प्रमेय 6.2*

(i) ***एक n भुजा वाले बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल $(2n-4)$ समकोण के बराबर होता है।***

(ii) ***एक बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योगफल चार समकोण होता है।***

(iii) ***यदि n भुजाओं वाला बहुभुज, सम बहुभुज हो, तो उसके प्रत्येक अन्तः कोण $\frac{1}{n}(2n-4)$ समकोण होते हैं।***

एक n भुजाओं वाला उत्तल बहुभुज $ABCDEF\cdots\cdots$ की भुजाओं $AB, BC, CD, DE, EF, FA\cdots\cdots$ को एक ही क्रम में बढाया गया है। इस प्रकार शीर्ष बिन्दुओं $A, B, C, D, E, F\cdots\cdots$ पर बहिष्कोण क्रमशः $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6\cdots\cdots$ बन रहे हैं।



चित्र 6.37

सिद्ध करना है :

(i) समस्त अन्तःकोणों का योग $=(2n-4)$ समकोण

(ii) समस्त बहिष्कोणों का योग $=4$ समकोण

(iii) समबहुभुज के प्रत्येक अन्तः कोण $=\dfrac{(2n-4)}{n}$ समकोण

रचना :

शीर्ष बिन्दु A से, बहुभुज के विकर्ण $AC, AD, AE\cdots\cdots$ खींचे। इस प्रकार कुल $(n-2)$ त्रिभुज बन गए।

उपपत्ति :

(i) हम जानते हैं कि बहुभुज क्षेत्र को, उसके एक शीर्ष बिन्दु पर खींचे गए समस्त विकर्ण, $(n-2)$ त्रिभुजों में बाँटता है, अतः

n भुजा के बहुभुज के समस्त अन्तःकोणों का योगफल

= इसमें एक शीर्ष से खींचे गए समस्त विकर्णों द्वारा बने $(n-2)$ त्रिभुजों के अन्तःकोणों का योग

$=(n-2)\times 2$ समकोण [एक त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग दो समकोण होता है]

$=(2n-4)$ समकोण

उपपत्ति :

(ii) हम जानते हैं कि बहुभुज की भुजाओं को क्रमानुसार बढ़ाने से अन्तः कोण तथा बहिष्कोण के रैखिक कोण युग्म दो समकोण के बराबर होता है, अतः

n भुजा के बहुभुज में अन्तःकोण एवं बहिष्कोण के n जोड़े हैं और इनका योगफल

$= n \times 2$ समकोण $= 2n$ समकोण ...(i)

n अन्तः कोणों का योगफल $= (2n-4)$ समकोण ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) से

n बहिष्कोणों का योग $= 2n$ समकोण $-(2n-4)$ समकोण

$= (2n-2n+4)$ समकोण

$= 4$ समकोण "इतिसिद्धम्"

(iii) यदि बहुभुज समबहुभुज हो तो उसका प्रत्येक अन्तः कोण का मान $\frac{1}{n}(2n-4)$ समकोण होता है।

उपपत्ति– हम जानतें है कि n भुजाओं के बहुभुज के सभी अन्तः कोणों का योग $(2n–4)$ समकोण होता है

हम यह भी जानते हैं कि समबहुभुज का प्रत्येक कोण समान होता है।

यदि हम n समान कोण वाले सम बहुभुज का एक कोण x^o मान लें तो

$nx^o = (2n-4)$ समकोण (सभी n कोणों का योग)

या $x^o = \frac{1}{n}(2n-4)$ समकोण "इतिसिद्धम"

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 6. एक समबहुभुज में भुजाओं की संख्या 10 है तो उसके प्रत्येक अन्तःकोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ n भुजा वाले एक समबहुभुज का प्रत्येक बहिष्कोण

$= \frac{4}{n}$ समकोण

$= \frac{4}{10} \times 90^\circ$ (यहाँ $n = 10$)

$= 36^o$

$\therefore$ प्रत्येक अन्तःकोण $= 180^\circ - 36^\circ$

$= 144^\circ$

या

n भुजा वाले समबहुभुज का प्रत्येक कोण

$= \frac{(2n-4)\text{समकोण}}{n}$

$= \frac{(2\times 10-4)\times 90^o}{10}$

$= \frac{16\times 90^o}{10} = 144^o$

उदाहरण 7. एक सप्तभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ n भुजाओं वाले एक बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल

$= (2n-4)$ समकोण

$\therefore$ 7 भुजाओं वाले एक बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल

$= (2\times 7-4)\times 90^\circ$

$= 10\times 90^\circ = 900^\circ$

वैकल्पिक विधि :

सप्तभुज के किसी एक शीर्ष बिन्दु से खींचे गए समस्त विकर्णों

द्वारा बहुभुज में बने त्रिभुजों की संख्या $= 7-2 = 5$

$\because$ एक त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग $=180°$

$\therefore$ त्रिभुजों के सभी अन्तःकोणों का योग $=180° \times 5$
$= 900°$

उदाहरण 8. एक समबहुभुज के प्रत्येक अन्तःकोण का मान 175° हो, तो भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ 1 अन्तःकोण $+1$ बहिष्कोण $=180°$

$\therefore$ 1 बहिष्कोण $=180° - 1$ अन्तःकोण

$= 180° - 175°$
$= 5°$

$\because$ n बहिष्कोणों का योग $=360°$ (माना कि भुजाएँ n है)

$\therefore$ $n \times 5° = 360°$

या $n = \dfrac{360}{5} = 72$

उदाहरण 9. क्या ऐसा समबहुभुज बनाया जा सकता है जिसका प्रत्येक अन्तःकोण 115° का हो ? जाँच कीजिए।

हल : $\because$ दिया गया है कि समबहुभुज का प्रत्येक अन्तःकोण
$=115°$ (यदि हो तो)

$\therefore$ प्रत्येक बहिष्कोण $=180° - 115° = 65°$

अब माना कि भुजाओं की संख्या n है।

$\because$ एक बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग $=4$ समकोण

$\therefore$ n बहिष्कोणों का योग $=4$ समकोण

$\Rightarrow$ $n \times 65° = 360°$

$\Rightarrow$ $n = \dfrac{360°}{65°} = \dfrac{72}{13} = 5\dfrac{7}{13} \neq$ एक पूर्ण संख्या

अतः $115°$ प्रत्येक अन्तःकोण वाला एक समबहुभुज नहीं हो सकता।

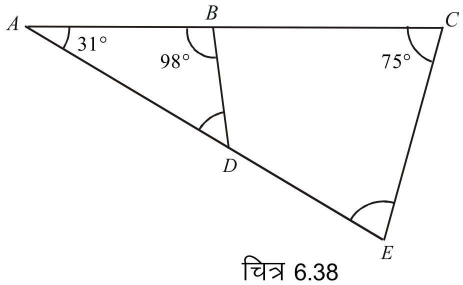
प्रश्नमाला 6.2

1. एक समबहुभुज में 8 भुजाएँ हैं तो
   (i) उसके सभी बहिष्कोणों के माप का योग बताइए।
   (ii) प्रत्येक बहिष्कोण का माप बताइए।
   (iii) सभी अन्तःकोणों के माप का योग ज्ञात कीजिए।
   (iv) प्रत्येक अन्तःकोण का माप ज्ञात कीजिए।
2. एक बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योग $2160°$ है तो बहुभुज की भुजाएँ कितनी होंगी ? ज्ञात

कीजिए।

3. क्या $137°$ के प्रत्येक अन्तःकोण वाला कोई समबहुभुज हो सकता है ? जाँच कीजिए।

4. नीचे दिए गए चित्र 6.38 में $\angle CED$ तथा $\angle BDE$ ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.38

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. n रेखाखण्डों से घिरी हुई समतलीय आकृति को n भुजा का बहुभुज कहते है। n भुजा के एक बहुभुज में n शीर्ष बिन्दु (या शीर्ष), n अन्तःकोण और n ही भुजाएँ होती हैं।
2. $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ होने के अनुसार बहुभुज के नाम क्रमशः त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षट्भुज, सप्तभुज और अष्टभुज होते हैं।
3. किसी त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग $180°$ के बराबर होता है।
4. किसी n भुजा के बहुभुज के सभी अन्तः कोणों का योग $(2n-4)$ समकोण के बराबर होता है।
5. जब किसी बहुभुज में सभी भुजाएँ और सभी कोण बराबर माप के हों तो उसे एक समबहुभुज कहते हैं।
6. n भुजा के एक समबहुभुज का प्रत्येक अन्तःकोण $= \left(\frac{2n-4}{n}\right) \times$ समकोण
7. किसी बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग $= 360°$
8. n भुजा के एक समबहुभुज का प्रत्येक बहिष्कोण $= \frac{4}{n}$ समकोण

विविध प्रश्नमाला 6

1. यदि किसी त्रिभुज में दो कोण $90°$ एवं $30°$ माप के हों तो तीसरा कोण है :

   (A) $90°$ (B) $30°$ (C) $60°$ (D) $120°$ [ ]

2. एक त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का अनुपात $2:3:4$ है, तो उसके सबसे बडे कोण का माप है :

   (A) $80°$ (B) $60°$ (C) $40°$ (D) $180°$ [ ]

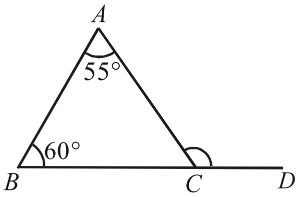
3. एक समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण का माप है :

   (A) $90°$ (B) $30°$ (C) $45°$ (D) $60°$ [ ]

4. एक चतुर्भुज के चारों कोणों के माप का अनुपात $1:2:3:4$ हो तो उसके सबसे छोटे कोण का माप है

(A) $120°$ (B) $36°$ (C) $18°$ (D) $10°$ [ ]

5. चित्र 6.39 में ΔABC की भुजा BC को बिन्दु D तक बढाया गया है। यदि $\angle A = 55°$ और $\angle B = 60°$ हो तो $\angle ACD$ का माप है :



चित्र 6.39

(A) $120°$ (B) $110°$

(C) $115°$ (D) $125°$ [ ]

6. एक षट्भुज के सभी अन्तःकोणों का योग है :

(A) $720°$ (B) $360°$ (C) $540°$ (D) $1080°$ [ ]

7. एक n भुजा वाले बहुभुज की भुजाओं को एक ही क्रम में बढ़ाने से बने बहिष्कोणों का योग है :

(A) n समकोण (B) $2n$ समकोण

(C) $(2n-4)$ समकोण (D) 4 समकोण [ ]

8. एक समबहुभुज में भुजाओं की संख्या n है तो उसके प्रत्येक अन्तःकोण का माप है

(A) $\frac{360}{n}$ अंश (B) $\left(\frac{2n-4}{n}\right)$ समकोण

(C) n समकोण (D) $2n$ समकोण [ ]

9. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अन्य दो कोणों के योग के बराबर हो, तो वह त्रिभुज है एक

(A) समद्विबाहु त्रिभुज (B) अधिककोण त्रिभुज

(C) समबाहु त्रिभुज (D) समकोण त्रिभुज [ ]

10. एक त्रिभुज का एक बहिष्कोण $105°$ है तथा उसके दोनों अन्तराभिमुख कोण बराबर हैं। इनमें से प्रत्येक बराबर कोण है

(A) $37\frac{1}{2}^{\circ}$ (B) $52\frac{1}{2}^{\circ}$ (C) $72\frac{1}{2}^{\circ}$ (D) $75°$ [ ]

11. किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात $5:3:7$ है। वह त्रिभुज है एक

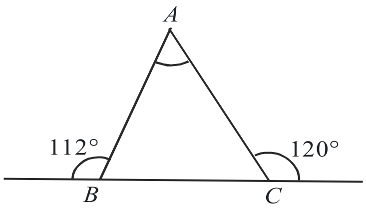
(A) न्यूनकोण त्रिभुज (B) अधिक कोण त्रिभुज

(C) समकोण त्रिभुज (D) समद्विबाहु त्रिभुज [ ]

12. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण $130°$ है, तो अन्य दोनों कोणों के समद्विभाजकों के बीच का कोण हो सकता है

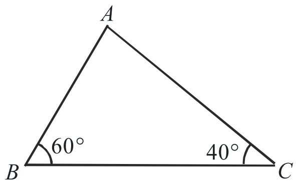
(A) $50°$ (B) $65°$ (C) $145°$ (D) $155°$ [ ]

13. चित्र 6.40 में $\angle A$ का माप बताइए।



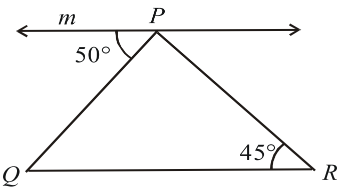
चित्र 6.40

14. चित्र 6.41 में $\angle B = 60°$ और $\angle C = 40°$ है। $\angle A$ का माप बताइए।



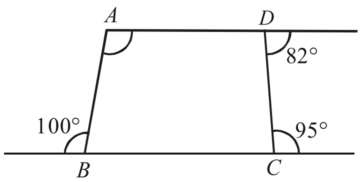
चित्र 6.41

15. चित्र 6.42 में $m \parallel QR$ तो $\angle QPR$ का माप बताइए।



चित्र 6.42

16. चित्र 6.43 में $\angle A$ का माप बताइए।



चित्र 6.43

17. एक पंचभुज के चार अन्तः कोण $40°, 75°, 125°$ और $135°$ है तो पाँचवे कोण का माप बताइए।
18. एक समबहुभुज का प्रत्येक बहिष्कोण $45°$ है तो उसकी भुजाओं की संख्या बताइए।
19. एक समबहुभुज में भुजाओं की संख्या 12 है तो उसके प्रत्येक अन्तः कोण का माप बताइए।
20. एक बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल 10 समकोण है तो भुजाओं की संख्या बताइए।
21. क्या $110°$ माप के प्रत्येक अन्तःकोण का कोई एक बहुभुज हो सकता है? जाँच कीजिए।
22. यदि एक ΔABC में $\angle A + \angle B = \angle C$ हो तो ΔABC का सबसे बड़ा कोण ज्ञात कीजिए।

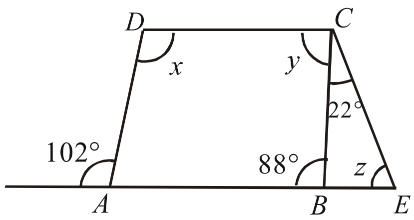
23. एक अष्टभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल ज्ञात कीजिए।

24. एक समदशभुज के प्रत्येक अन्तःकोण का माप ज्ञात कीजिए।

25. एक त्रिभुज की भुजाओं को एक ही क्रम में बढाने से प्राप्त बहिष्कोण क्रमशः $110°, 130°$ एवं $x°$ है, तो $x°$ का मान ज्ञात कीजिए।

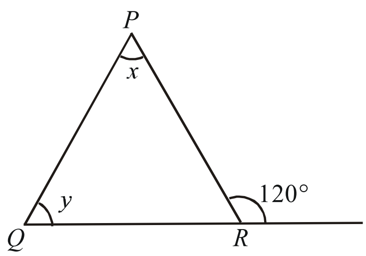
26. एक षट्भुज का एक अन्तःकोण $165°$ है और शेष प्रत्येक अन्तःकोण का माप $x°$ है, तो शेष कोण का माप बताइए।

27. चित्र 6.44 में, $AB \parallel DC$ हो तो दिए गए कोणों से $\angle x, \angle y$ तथा $\angle z$ ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.44

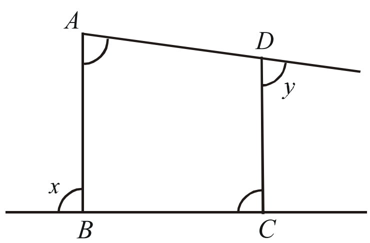
28. दिए गए चित्र 6.45 से $\angle x$ तथा $\angle y$ के माप ज्ञात कीजिए, जहाँ $\angle x - \angle y = 10°$ है।



चित्र 6.45

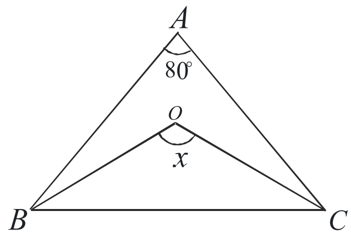
29. एक बहुभुज में दो कोण प्रत्येक एक समकोण है और शेष प्रत्येक कोण $150°$ के बराबर हो तो बहुभुज की भुजाओं की सख्या ज्ञात कीजिए।

30. दिए गए चित्र 6.46 से सिद्ध कीजिए कि $\angle x + \angle y = \angle A + \angle C$.



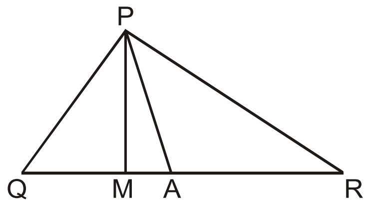
चित्र 6.46

31. दिए गए चित्र 6.47 से, $\angle x$ ज्ञात कीजिए। यहाँ रेखाएँ BO एवं CO क्रमशः $\angle B$ एवं $\angle C$ के समद्विभाजक हैं।



चित्र 6.47

32. चित्र 6.48 में $\angle Q > \angle R$, PA कोण QPR का समद्विभाजक है तथा $PM \perp QR$ है। सिद्ध कीजिए $\angle APM = \frac{1}{2}(\angle Q - \angle R)$



चित्र 6.48

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 6.1

1. $\angle A = 68°,\ \angle B = 59°,\ \angle C = 53°$
2. $\angle x = 38°,\ \angle y = 22°,\ \angle z = 120°$

4. $\angle x = 116°, \angle y = 32°$ 5. 92° 6. 60°

7. 65° 9. $\angle x = 37°$ व $y = 53°$ 11. 40°, 60°, 80°

प्रश्नमाला 6.2

1. (i) 360° (ii) 45° (iii) 1080° (iv) 135°
2. 14 3. नहीं 4. 74°

विविध प्रश्नमाला 6

1. (C) 2. (A) 3. (D) 4. (B) 5. (C) 6. (A)
7. (D) 8. (B) 9. (D) 10. (B) 11. (A) 12. (D)

13. $\angle A = 52°$ 14. 80° 15. 85° 16. 97 17. 165

18. 8 19. 150° 20. 17 21. नहीं 22. $\angle C$ 23. 1080°

24. 144° 25. 120° 26. 111° 27. $x = 102°,\ y = 92°,\ z = 66°$

28. $x = 65°,\ y = 55°$ 29. 6 30. (B) 31. 140°