अध्याय 6

वैदिक गणित

6.1 पूर्व कक्षा में एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, निखिलम् से गुणा करना सीखा था। इस अध्याय में आप पुनः योग, व्यवकलन, गुणा एवं भाग, भिन्न, वर्ग व वर्गमूल की अन्य विधियों का अध्ययन करेंगे। इस अध्याय की सभी क्रियाओं का अभ्यास मौखिक करवाया जाए तो गणना सरल व अतिशीघ्र हो जाती है।

6.2 संकलन – व्यवकलनाभ्याम्

दैनिक जीवन में इस विधि का उपयोग गणना को आसान बनाने के लिए करते हैं। इस विधि का उपयोग आधार संख्या की पूर्णता पर आधारित है जो कि 10 या 10 का गुणक होता है। इसमें पूर्ण आधार वाली संख्याओं के साथ विचलन कर बड़ी गणनाओं को आसान बनाया जाता है।

उदाहरण 1 8 + 11 + 7+ 12 + 9 + 13 का योग कीजिए।

हल इन संख्याओं को ध्यान से देखने पर पता चलता है कि 8, 10 से 2 कम है एवं 12, 10 से 2 अधिक है। इसी तरह 9, 10 से 1 कम है एवं 11, 10 से 1 अधिक है।

$$(10-2) + (10+1) + (10-3) + (10+2) + (10-1) + (10+3)$$

पूर्ण आधार वाली संख्याओं के रूप में दर्शा कर व्यवस्थित करने पर

$(10-\cancel{2}) + (10+\cancel{2}) + (10+\cancel{1}) + (10-\cancel{1}) + (10-\cancel{3}) + (10+\cancel{3})$

$= 20 + 20 + 20$

$= 60$

यहाँ पर – 2, 2 1, -1 एवं –3, 3 ऐसे युग्म हैं जिनके योग –2 + 2, 1–1, –3 + 3 शून्य है।

उदाहरण 2 26 + 48 + 107 + 63 + 13 + 44 को जोड़िए।

हल संख्याओं का पूर्ण संख्या बनाने के लिए युग्म 10 या 10 के गुणज बनाने का प्रयास करते हैं।

26 + 63 + 48 + 13 + 107 + 44

संकलन व्यवकलनाभ्याम से

$= 30 - 4 + 60 + 3 + 50 - 2 + 10 + 3 + 110 - 3 + 40 + 4$

$= 30 + 60 + 10 + 50 + 110 + 40 - 4 + 3 - 2 + 3 - 3 + 4$

= 90 + 10 + 50 + 150 + 1

= 100 + 200 + 1

= 300 + 1 = 301

संकलन व्यवकलनाभ्याम विधि में विचलन करते जाएँ एवं योग करते जाएँ तो योग आसान हो जाता है।

6.3 पूरणापूरणाभ्याम्

संख्याओं के ऐसे युग्म बनाएँ जिनसे संख्याएँ 10 के गुणित में हो जाएँ।

उदाहरण 3 27 + 58 + 392 + 68 + 32 + 23 का योग कीजिए।

हल = (27+23)+(58+392)+(68+32) (10 के गुणित में बनाने का प्रयास)

= 50 + 450 + 100

= (50 + 450) + 100

= 500 + 100

= 600

उदाहरण 4 45 + 67 + 38 + 55 + 62 + 33 का योग कीजिए।

हल 10 के गुणित युग्म में जमाने पर

= (45 + 55) + (67 + 33) + 38 + 62

= 100 + 100 + 100

= 300

प्रश्नावली 6.1

1. संकलन व्यवकलनाभ्याम एवं पूरणापूरणाभ्याम का उपयोग करते हुए योग कीजिए –

(i) 282 + 718 + 796 + 524 + 804 + 376

(ii) 52 + 136 + 48 + 64

(iii) 135 + 248 + 322 + 65

6.4 घटाव (सूत्र निखिलम्)

(सूत्र निखिलम् नवतः चरमं दशतः का उपयोग करते हुए हम घटाव करते हैं)

यदि हम 1000 में से 362 घटाना चाहे तो हमारी पारम्परिक विधि में कई हासिल के चरणों से गुजरना होगा एवं समय भी अधिक लगेगा फिर भी गलत होने का भय बना रहेगा। आइए वैदिक विधि से देखते हैं –

दाहिने से प्रारम्भ करते हुए बाईं ओर गणना करें। बाईं ओर के प्रत्येक शून्य के बदले 9 लिखें और अंतिम शून्य की जगह 10 लिखें। शून्य के पहले एकदम बाईं ओर का अंक 1 कम हो जाएगा।

1000	इस प्रकार बन जाएगा	0 9 9 10
– 362		0 3 6 2
		0 6 3 8

उदाहरण 5 70,000 में से 1837 घटाइए।

हल सबसे बाईं ओर का अंक (7) में से 1 कम = 6

अब 9 में से 1 कम = 8

9 में से 8 कम = 1

9 में से 3 कम = 6

अंतिम अंक 10 में से 7 कम = 3

अर्थात् शेषफल 68163 रहेगा।

अतः 70000 – 1837 = 68613 अभीष्ट हल है।

उदाहरण 6 संख्या 854 में से 569 घटाइए।

हल 854 – 569

चरण 1 यहाँ 4 < 9

इसलिए अन्तर 9 – 4 = 5 का पूरक लेते हैं।

पूरक 10 से लिया जाएगा। अतः 5 का पूरक 5 है जो इकाई के स्थान पर लिख जाएगा।

चरण 2 पुनः 5 जो 6 से छोटा है अतः 5 व 6 का अन्तर 1 है पूरक 9 से 1 को घटाने पर 8 आएगा।

चरण 3 8 से एक कम 8 – 1 = 7 में से 5 घटाने पर 2 शेष आएगा जिसे सैकड़ा के स्थान पर लिखेंगे।

854 – 569 = 285

6.5 मनोरंजक गुणन विधियाँ

कक्षा VI में आपने निखिलम् विधि से गुणा करना सीखा था। इस कक्षा में गुणा की सरल विधियों का अध्ययन करेंगे ।

6.5.1 किसी भी संख्या को 10 से गुणा

जैसे $5 \times 10 = 50$ $10 \times 10 = 100$

$68 \times 10 = 680$

तीनों उदाहरणों को ध्यान से देखिए और अपने साथियों से चर्चा कीजिए कि किसी संख्या को 10 से गुणा करने पर गुणनफल व मूल संख्या (5, 10, 68) में क्या फर्क दिखता है? शायद आप सहमत होंगे कि इकाई के स्थान पर शून्य आ जाता हैं एवं मूल संख्या दहाई व दहाई के आगे खिसक जाती है।

करो और सीखो

1. यदि संख्या को 100 व 1000 से गुणा किया जाए तो गुणनफल में मूल संख्या से क्या परिवर्तन दिखता है, साथियों से चर्चा कीजिए।
2. आप कक्षा में दो समूह में विभक्त हो जाए संख्याओं को 10,100 या 1000 से गुणा करने के सवाल एक समूह पूछे दूसरा समूह उसका उत्तर दें। फिर दूसरा समूह प्रश्न पूछे एवं पहला उत्तर दें। इस तरह अन्त्याक्षरी की तरह खेल खेलें।

6.5.2 किसी संख्या का 5 से गुणा

1. किसी संख्या को 10 से गुणा करना आपने सीखा हैं। आइए संख्या को 5 से गुणा करने के मनोरंजक एवं सरल तरीके को देखेंगे।

(i) 18 x 5

$= 18 \times \frac{10}{2}$ (5, 10 का आधार है अत: $5 = \frac{10}{2}$ लिखा जाता है।)

$= \frac{18}{2} \times 10 = 9 \times 10 \left(\frac{18}{2} = 9\right)$

$= 90$

(ii) 29×5

$= 29 \times \frac{10}{2}$ $\left(5 = \frac{10}{2}\right)$

$= \frac{29}{2} \times 10$ $\left(\frac{29}{2} = 14.5\right)$

$= 14.5 \times 10$ $\left(14.5 = \frac{145}{10}\right)$

$= \frac{145}{10} \times 10 = 145$

अर्थात् किसी संख्या को 5 से गुणा करते समय संख्या का आधा और उसका दस गुना करने पर गुणनफल प्राप्त होता है।

करो और सीखो

1. क्या 50 व 500 से किसी संख्या को गुणा करने में 5 का तरीका प्रयोग किया जा सकता है?
2. किसी संख्या को 25 से गुणा करने के लिए $\frac{100}{4}$ के रूप में गुणा किया जा सकता है? कक्षा में चर्चा कीजिए।

6.5.3 किसी संख्या को 9 से गुणा (सूत्र–एक न्यूनेन पूर्वेण विधि से)

उदाहरण 7 6 को 9 से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 9 \\ \hline \dot{6}/9-\dot{6} \\ 5/4 \\ =54 \end{array}$$

(i) एक न्यूनेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग होता है। अत: 6 में एक न्यूनेन का चिह्न तिरछी रेखा के बाएँ पक्ष में लगाया।

(ii) दाएँ पक्ष में 9 में से एक न्यूनेन लगा गुण्य 6 को घटाया गया।

उदाहरण 8 12 को 9 से गुणा कीजिए।

हल

12×9	(1)	यहाँ पर गुणक 9 ही है परन्तु गुण्य 9 से बड़ा है।
$12/9-12$	(2)	एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग करते हुए 12 का एक न्यून = 11 तिरछी रेखा के बाईं ओर लगाया।
$11/9-11$	(3)	तिरछी रेखा के दाएँ ओर 9 में से 12 का एक न्यून(9–11) को घटाया।
$11/-2$ या $(\bar{2})$	(4)	तिरछी रेखा के बाएँ भाग में दहाई 11 व दाएँ भाग में –2 या $\bar{2}$ है।
$11\bar{2}$	(5)	तिरछी रेखा को हटाकर $11\bar{2}$ में $\bar{2}$ को सामान्य संख्या में बदलने पर
$= 108$		108 प्राप्त होता है।

6.5.4 किसी संख्या का 99 से गुणा

आपने संख्या को 9 से गुणा करना सीखा है आइए अब 99 से गुणा करते हैं। 99 से गुणा करने की विधि भी वही है जो 9 से गुणा करने की विधि है। अतः एक उदाहरण से वैदिक गणित में इसे एक न्यूनेन पूर्वेण के रूप में देखते है।

उदाहरण 9 18 × 99 को हल कीजिए।

हल

18
×99
18/99-18 (संकेत पूर्वानुसार)

17/99-17

17/82

=1782

उदाहरण 10 99 × 99 को हल कीजिए।

99
×99
99/99-99

98/99-98

98/1

[99×99 = 981 सही है यदि नहीं तो क्या आप खोजने का प्रयास करेंगे कि भूल कहाँ हुई? जी हाँ आप सही है तिरछी रेखा के दाएँ पक्ष में आधार 100 है अतः यहाँ दो अंकों की संख्या होगी लेकिन यहाँ एक ही है इसलिए इसे 01 लिखेंगे।]

अतः हल 9801 होगा।

क्या आप 999 व 9999 से भी किसी संख्या का गुणा कर सकते हैं ?

करो और सीखो

• किसी संख्या को 999 व 9999 से गुणा स्वयं करके देखें एवं समस्या आने पर अपने अध्यापक जी से सहयोग लें।

6.5.5 किसी संख्या का 11 से गुणा

आइए 11 से गुणा करने की एक सीधी विधि सीखते हैं ।

72 को 11 से गुणा कीजिए –

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 11 \\ \hline 72 \\ 72\times \\ \hline =7(7+2)2 \\ =7\,9\,2 \end{array}$$

एक और विधि देखते हैं –

72×11

$72 \times (10+1)$

$720+72$

यानि $7(7+2)\,2$

$= 792$

इन दोनों विधि से हम देखते हैं कि गुण्य के दोनों अंकों के मध्य में गुण्य के दोनों अंकों का योग होता है।

उदाहरण 11 81 को 11 से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 11 \\ \hline 8/(8+1)/1 \\ 891 \end{array}$$

जाँच करे कि क्या $81\times11 = 891$ होता है?

उदाहरण 12 99 को 11 से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 11 \\ \hline 9/(9+9)/9 \\ 9/18/9 \\ =1089 \end{array}$$

(18 में 8 को दहाई स्थान पर एवं 1 को सैंकड़े की संख्या के साथ जोड़ेंगे।)

क्या तीन या तीन से अधिक अंकों की संख्या के लिए भी यह नियम लागू होता है? चर्चा करें एवं उन पर आधारित सवालों का अभ्यास कीजिए।

प्रश्नावली 6.2

1. निखिलम् सूत्र से घटाव कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} 9000 \\ -3768 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 5872 \\ -2987 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 4987 \\ -1898 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

2. उपयुक्त सूत्र लगाकर गुणा कीजिए।

(i)	87×10	(ii)	53×100	(iii)	432×1000	(iv)	64×5
(v)	72×50	(vi)	81×99	(vii)	99×999	(viii)	99×9

6.6 भिन्न

भिन्नों से आप परिचित हैं हम भिन्नों को वैदिक गणित के कुछ तरीकों से आसान बनाते हैं।

निम्न भिन्नों को ध्यान से देखिए –

उदाहरण 13 $\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल इनके हर समान है एवं अंश अलग–अलग हैं।

इस भिन्न को बढ़ते क्रम में लिख सकते हैं।

$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

भिन्न जिनके हर समान है, तब जिस भिन्न का अंश बड़ा होगा वह भिन्न बड़ी भिन्न होगी। यदि भिन्नों के अंश परस्पर समान है तो जिसका हर बड़ा है वह छोटी भिन्न होगी।

$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ को बढ़ते क्रम में जमाइए।

यहाँ हर 5 सबसे बड़ी संख्या है अतः सबसे छोटी भिन्न $\frac{1}{5}$ होगी, एवं सबसे बड़ी भिन्न $\frac{1}{2}$ होगी।

आरोही क्रम में जमाने पर

$\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

उदाहरण 14 $\frac{3}{4}$ व $\frac{4}{5}$ में बड़ी भिन्न बताइए।

हल

$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ \hline 15 & 16 \end{array}$

(i) बिना रेखा के भिन्नों के अंश व हर लिखिए।

(ii) तिर्यक गुणनफल बने $3\times5 = 15$ तथा $4\times4 = 16$

(iii) जिस तरफ का गुणनफल बड़ा वह भिन्न बड़ी होगी।

(iv) $\because 15<16$ अतः भिन्न $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

उदाहरण 15 $\frac{2}{3}$ व $\frac{6}{9}$ में भिन्न का क्रम बताइए।

हल

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 3 & 9 \\ \hline 18 & 18 \end{array}$$

(i) तिर्यक गुणा करने पर बने 9 X 2 = 18 तथा 6 X 3 = 18

(ii) गुणनफल परस्पर समान अतः भिन्न बराबर

(iii) अतः यह तुल्य भिन्न है।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्न भिन्नों के मध्य सही चिन्ह लगाएँ। (>, =, < में से एक)

(i) $\frac{4}{9} \square \frac{3}{9}$ (ii) $\frac{4}{5} \square \frac{4}{10}$ (iii) $\frac{3}{5} \square \frac{6}{10}$

(iv) $\frac{5}{7} \square \frac{6}{7}$ (v) $\frac{2}{3} \square \frac{3}{2}$

2. निम्न भिन्नों को आरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$

3. निम्न भिन्न को अवरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ (ii) $\frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{5}$

6.6.1 भिन्नों का योग

यदि भिन्नों का हर परस्पर समान है तो–

उदाहरण 16 $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ भिन्नों का योग कीजिए।

हल $= \frac{1+2}{5}$ $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

अतः भिन्नों का योग $= \frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

यदि दी गई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं है–

उदाहरण 17 $\frac{2}{3}$ व $\frac{4}{5}$ का योग कीजिए।

हल $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

$= \frac{2 \times 5 + 3 \times 4}{3 \times 5}$ बनने वाले तिर्यक गुणन 2×5 तथा 3×4

हरों का गुणनफल $3 \times 5 = 15$

$$= \frac{10+12}{15} \quad = \frac{22}{15} \quad = 1\frac{7}{15}$$

उदाहरण 18 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ योग कीजिए।

हल $\frac{1\times3\times5+2\times2\times5+4\times2\times3}{2\times3\times5}$ यहाँ योग में बनने वाले तिर्यक गुणन – $1\times3\times5$, $2\times2\times5$ तथा $4\times2\times3$ हैं।

$= \frac{15+20+24}{30}$ हरों का गुणनफल – $2\times3\times5$ हैं।

$$= \frac{59}{30} \quad = 1\frac{29}{30}$$

जब दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हों और उनमें उभयनिष्ठ गुणनखण्ड भी हो।

उदाहरण 19 $\frac{1}{4} + \frac{1}{10}$ हल कीजिए।

हल $\frac{1\times10+1\times4}{4\times10} \quad = \frac{10+4}{40} \quad = \frac{14}{40}$ (सरलतम रूप में बनाने के लिए अंश व हर को समान संख्या में भाग देना होगा)

$= \frac{14\div2}{40\div2} \quad = \frac{7}{20}$ (सरलतम रूप में लिखने पर)

6.6.2 मिश्र भिन्नों का योग (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक गुणन से)

मिश्र भिन्नों का योग विलोकनम् तथा तिर्यक गुणन के प्रयोग से बड़ी सरलता से निकाला जा सकता है।

$1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{3}$ (विलोकनम सूत्र से मिश्र भिन्न के दो टुकड़े करें)

$1\frac{3}{4} = 1+\frac{3}{4}$ तथा $2\frac{1}{3} = 2+\frac{1}{3}$

$$= 1+\frac{3}{4}+2+\frac{1}{3}$$

$= (1+2)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)$ ($\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ का तिर्यक गुणन से योग)

$= 3 + \frac{3\times3+1\times4}{4\times3} \quad = 3 + \frac{9+4}{12} \quad = 3 + \frac{13}{12} \quad = 3 + 1\frac{1}{12}$ (विलोकनम् का उपयोग)

$= (3+1) + \frac{1}{12} \quad = 4 + \frac{1}{12}$ या $4\frac{1}{12}$

6.7 भिन्नों का व्यवकलन

भिन्नों की व्यवकलन संक्रिया भिन्नों की योग संक्रिया से मिलती जुलती है। योग संक्रिया में योग चिह्न (+) एवं व्यवकलन संक्रिया में व्यवकलन चिह्न (–) का उपयोग करेंगे।

6.7.1 भिन्नों का व्यवकलन जब भिन्नों का हर परस्पर समान हो

उदाहरण 20 भिन्न $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}$$

6.7.2 जब भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हैं और उनमें कोई उभयनिष्ठ गुणनफल नहीं है तो व्यवकलन करना

उदाहरण 21 भिन्न $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल

$$\frac{4\times3-5\times2}{5\times3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

उदाहरण 22 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ को हल कीजिए।

हल

$$\frac{1\times3\times5+1\times2\times5-1\times2\times3}{2\times3\times5}$$ (भिन्नों के योग की तरह हल)

$$= \frac{15+10-6}{30} = \frac{19}{30}$$

6.7.3 मिश्र भिन्न का व्यवकलन

योग संक्रिया के समान सूत्र विलोकनम् और तिर्यक गुणन के प्रयोग से मिश्र भिन्नों का व्यवकलन भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण 23 $3\frac{3}{4} - 3\frac{2}{5}$ हल कीजिए।

हल

$$\left(3+\frac{3}{4}\right)-\left(3+\frac{2}{5}\right)$$

$$(3-3)+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)$$

$$= 0 + \frac{3\times5-4\times2}{4\times5}$$

$$= \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$$

प्रश्नावली 6.4

1. योग कीजिए। (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक गुणन से)

(i) $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{7}{15}+\frac{2}{15}$ (iii) $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$

(iv) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}$ (v) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ (vi) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$

2. व्यवकलन कीजिए (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक गुणन से)

(i) $\frac{9}{10}-\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{19}{5}-\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

(iv) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ (v) $3\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}$ (vi) $2\frac{5}{6}-2\frac{1}{6}$

6.8 भिन्नों का गुणा

दो भिन्नों का गुणा सरलता से ज्ञात किया जा सकता हैं। इसमें से दोनों भिन्नों के अंशों का गुणनफल अंश के स्थान पर एवं दोनों भिन्नों के हरों का गुणनफल हर के स्थान पर लिखते हैं –

$\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{4}$ का गुणा कीजिए –

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$ $\frac{1\times3}{2\times4}=\frac{3}{8}$

6.8.1 दो मिश्र भिन्नों का गुणा (सूत्र– एकाधिकेन पूर्वेण से)

दो मिश्र भिन्नों के चरम अंकों का योग यदि 1 होता है एवं आधार तथा शेष निखिलम् अंक समान हो, तो सामान्य संख्याओं के समान सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा इनका गुणनफल दो भागों में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 24 $6\frac{1}{4}\times6\frac{3}{4}$ को हल कीजिए।

हल (1) चरम अंक $\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$ का योग $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$

(2) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान $=6$

$6\times(6+1)\Big/\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$

(3) वाम पक्ष = प्रथम भाग = शेष निखिलम अंक × उसका एकाधिक

(4) दक्षिण पक्ष = दूसरा भाग = चरम अंकों का गुणा

अर्थात् $6 \times (6+1) + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$6 \times 7 + \frac{3}{16}$

$42 + \frac{3}{16} \quad = 42\frac{3}{16}$

उदाहरण 25 भिन्न $15\frac{4}{7} \times 15\frac{3}{7}$ का गुणा कीजिए।

हल $15 \times (15+1) / \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}$

$15 \times 16 / \frac{12}{49}$

$240\frac{12}{49}$

6.8.2 दो भिन्नों का गुणा (विलोकनमसूत्र से)

उदाहरण 26 भिन्न $5\frac{1}{2} \times 6$ का गुणा वैदिक विधि से कीजिए ।

हल $\left(5+\frac{1}{2}\right) \times 6$ (विलोकनम् सूत्र)

$= 5 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6$ (कोष्ठक का हल)

$= 30 + 3$ (6 का आधा = 3)

$= 33$

उत्तर की जाँच : $5\frac{1}{2} \times 6$

$= \frac{11}{2} \times 6$ $\left(5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}\right)$

$= 11 \times \frac{6}{2}$

$= 11 \times 3$ (6 का आधा = 3)

$= 33$

उदाहरण 27 मिश्र भिन्न $7\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ का गुणा कीजिए।

हल $\left(7+\frac{1}{2}\right) \times \left(8+\frac{1}{2}\right)$ (विलोकनम् सूत्र से)

$$7\times8+7\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=56+3\frac{1}{2}+4+\frac{1}{4}$$

$$=56+3+4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$=63+\frac{6}{8} \qquad \left(\frac{6\div2}{8\div2}=\frac{3}{4}\right)$$

$$=63\frac{3}{4}$$

अन्य तरीका – $\quad 7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+(7+8)\frac{1}{2}$

$$=56+\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{2}$$

$$=56+7+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=63+\frac{3}{4}$$

$$=63+\frac{3}{4}$$

प्रश्नावली 6.5

उपयुक्त सूत्र का उपयोग करते हुए भिन्न संख्याओं का गुणा कीजिए –

(1) $\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}$ (2) $5\frac{1}{2}\times5\frac{1}{2}$ (3) $2\frac{3}{4}\times2\frac{1}{4}$

(4) $3\frac{2}{5}\times3\frac{3}{5}$ (5) $12\frac{1}{4}\times12\frac{3}{4}$ (6) $8\frac{2}{7}\times8\frac{5}{7}$

(7) $3\frac{1}{4}\times4$ (8) $2\frac{1}{5}\times5$ (9) $3\frac{1}{2}\times4$

(10) $4\frac{1}{3}\times6$

6.9 वर्ग संख्याएँ

वर्ग संख्याएँ – वे संख्याएँ होती है जिनके अभाज्य गुणनखण्ड दो–दो के युग्म में हो। जैसे 4 एक वर्ग संख्या है क्योंकि इसके अभाज्य गुणनखण्ड = 2×2 है।

यहाँ 2 का एक युग्म है।

क्या 100 एक वर्ग संख्या है?

आइए 100 के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं। 100 के अभाज्य गुणनफल $2\times2\times5\times5$ है यहाँ 2 व 5 का एक युग्म हैं। अतः ये दोनों संख्याएँ वर्ग संख्याएँ हैं।

ये दोनों संख्याएँ किन संख्याओं की वर्ग संख्याएँ है? आइए तय करते हैं।

4 का अभाज्य गुणनखण्ड = 2×2 है एवं यहाँ 2 का एक जोड़ा है अतः यह 2 की वर्ग संख्या है।

इसी प्रकार 100 का अभाज्य गुणनखण्ड $2\times2\times5\times5$ (2 व 5 का युग्म है)

अतः $2\times5 = 10$ की वर्ग संख्या 100 है।

किसी संख्या की वर्ग संख्या ज्ञात करने के लिए उस संख्या को उसी संख्या से गुणा करते हैं। आइए वर्ग संख्या ज्ञात करने के कुछ सरल तरीकों पर चर्चा करते हैं।

(1) दो / तीन अंकों की ऐसी संख्याओं के वर्ग ज्ञात करना जिनका इकाई का अंक 5 हो –

(i) $15\times15 = 1\times(1+1)/5\times5$ (एकाधिकेन पूर्वेण दहाई अंक का)

$= 1\times2/25$

$= 2/25$

$= 225$

(ii) $35\times35 = 3\times(3+1)/5\times5$ (एकाधिकेन पूर्वेण दहाई स्थान पर)

$= 3\times4/25$

$= 1225$

(iii) $95\times95 = 9\times(9+1)/5\times5$

$= 9\times10/25$

$= 9025$

(iv) $105\times105 = 10(10+1)/5\times5$

$= 10\times11/25$

$= 110/25 = 11025$

(v) $125\times125 = 12(12+1)/5\times5$

$= 12(13)/25$

$= 15625$

उदाहरणों से स्पष्ट है कि इकाई पर 5 अंक वाली संख्याओं को उसी संख्या से गुणा करने पर या उसका वर्ग ज्ञात करने पर अंत में 25 अवश्य आता है। उसके पूर्व दहाई वाली संख्या को एकाधिक संख्या से गुणा कर लिखते हैं।

दहाई पर 5 वाली संख्याओं के वर्ग ज्ञात करना।

दहाई पर 5 वाली संख्याएँ 51 से 59 तक ही हैं।

अतः $51^2 = 51\times51$

$= \underline{26}\ \underline{01}$

$1\times1 = 01$ (इकाई का वर्ग)

$5\times5+1 = 26$ (दहाई का वर्ग + इकाई का अंक)

53^2 = 53×53

$\underline{28}\ \underline{09}$

→ $3 \times 3 = 09$ (दहाई का वर्ग)

→ $5 \times 5 + 3 = 28$ (दहाई का वर्ग + इकाई का अंक)

59^2 = 59×59

$\underline{34}\ \underline{81}$

→ $9 \times 9 = 81$

→ $5 \times 5 + 9 = 34$

तीन अंक वाली संख्या का वर्ग ज्ञात करना जिसके अंत में 25 हो –

125^2 = $1\underline{25} \times 1\underline{25}$

→ $(25 \times 25 = 625)$

→ $1 \times 15 = 15$ (125 में इकाई व सैंकड़ा से बनी संख्या 15 को सैंकड़ा के 1 से)

अतः 125^2 = 15625

325^2 = $3\underline{25} \times 3\underline{25}$

→ $(25 \times 25 = 625)$

→ $3 \times 35 = 105$ (325 में इकाई व सैंकड़ा से बनी संख्या 35 को सैंकड़ा 3 से)

अतः 325^2 = 105625

725^2 = $7\underline{25} \times 7\underline{25}$

→ $(25 \times 25 = 625)$

→ $7 \times 75 = 525$

= 525625

इसमें सदैव 625 (25^2) अंत में आता है। उससे पहले सैकड़ा तथा इकाई के अंकों से बनी संख्या को सैकड़ा के अंक से गुणा करके रख देते हैं।

वर्ग के कुछ अन्य तरीके –

11×11 = 1 2 1 ← इकाई की संख्या का वर्ग

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना

दहाई की संख्या का वर्ग

31^2 = 31×31 में इकाई की संख्या का वर्ग – $1 \times 1 = 1$

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना $(1 \times 3) \times 2 = 6$

दहाई की संख्या का वर्ग – $3 \times 3 = 9$

$= 961$

12X12 = इकाई की संख्या का वर्ग – $2\times2=4$

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना $(1\times2)2=4$

दहाई की संख्या का वर्ग = $1\times1=1$

अतः संख्या 12 का वर्ग = 144 है।

तीन अंकों की संख्याओं का वर्ग ज्ञात करने के लिए उसे दो भागों में बाँटते हैं जिनका उपसूत्र अनुरूप्येण विधि से वर्ग ज्ञात करते हैं। ''अनुरूप्येण'' का अर्थ ''अनुरूपता अथवा समानुपात द्वारा।''

जैसे– 152 का वर्ग ज्ञात करना है तो 152 को 15 दहाई व 2 इकाईयों में बाँटा गया है।

$\underline{15}2\times15\underline{2}=$ इकाई की संख्या का वर्ग $=2^2=4$

इकाई एवं दहाई की संख्या का गुणा एवं दुगुना $=2\times15\times2=60$

दहाई की संख्या का वर्ग $=15^2=225$

225/60/4

225+6/04

$=\underline{23104}$

यहाँ हम देखते हैं कि जिस संख्या का वर्ग करना है उसको –

1. दाएँ से प्रथम भाग में दाईं संख्या का वर्ग ज्ञात करना।
2. मध्य भाग में मूल संख्या में स्थित अंकों को गुणा व उसका दुगुना करते हैं।
3. तीसरे भाग में मूल संख्या में स्थित दूसरे अंक का वर्ग करना।
4. संख्या को व्यवस्थित करना।

उदाहरण 28 संख्या 43 का वर्ग करना।

हल

$$43^2 = \overset{\text{III}}{4^2}\quad \overset{\text{II}}{4\times3}\quad \overset{\text{I}}{3^2}$$

$$\begin{array}{ccc} & 4\times3 & \\ \hline 16 & 12 & 9 \\ & +12 & \\ \hline 16 & 24 & 9 \\ 16+2 & 49 & \\ & 1849 & \end{array}$$

(16 के साथ मध्य भाग (II) का हासिल जुड़ जाता है)

उदाहरण 29 $(132)^2$ $\underline{13}\ \underline{2}$ इसे दो भाग 13 व 2 में बाँटा

हल

$$\overset{\text{III}}{(13)^2}\quad \overset{\text{II}}{13\times2}\quad \overset{\text{I}}{2^2}$$

$$\begin{array}{ccc} & +13\times2 & \\ \hline 169 & 26 & 4 \\ & 26 & \\ \hline 169 & 52 & 4 \\ & 169+5 & 24 \\ & 17424 & \end{array}$$

प्रश्नावली 6.6

1. उपयुक्त विधि से वर्ग ज्ञात कीजिए।

(i) 18 (ii) 42 (iii) 83 (iv) 127 (v) 136

6.10 वर्गमूल

किसी संख्या x को उसी संख्या x से गुणा किया जाए तो प्राप्त मान x^2, संख्या x की वर्ग संख्या है। इसे इस तरह समझा जाए कि x^2, $x \times x$ का एक युग्म है। अतः x^2 का वर्गमूल x है।

16 एक वर्ग संख्या है जो 4 × 4 का एक युग्म है अतः 16 का वर्गमूल 4 है।

वर्गमूल का संकेत $\sqrt{\ }$ है।

वर्गमूल संख्या के अंक

किसी संख्या की वर्ग संख्या में अंक, इस संख्या के अंकों की संख्या का दुगुना व दुगुने से एक कम अंक होता है। उसी तरह किसी वर्ग संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या यदि सम हो तो आधी एवं यदि विषम हो तो उस संख्या में 1 जोड़ कर आधी होती हैं। आइए सारणी का अवलोकन करें –

वर्ग संख्या में अंकों की संख्या विषम				वर्ग संख्या जब अंकों की संख्या सम			
वर्ग संख्या	अंकों की संख्या	वर्ग मूल	अंकों की संख्या	वर्ग संख्या	अंकों की संख्या	वर्ग मूल	अंकों की संख्या
1	1	1	$\frac{1+1}{2}=1$	16	2	4	$\frac{2}{2}=1$
100	3	10	$\frac{3+1}{2}=2$	81	2	9	$\frac{2}{2}=1$
961	3	31	$\frac{3+1}{2}=2$	1024	4	32	$\frac{4}{2}=2$
16641	5	129	$\frac{5+1}{2}=3$	108900	6	330	$\frac{6}{2}=3$

किसी पूर्ण वर्ग संख्या के दाहिनी ओर से (इकाई अंक) दो–दो अंकों के जोड़े बनाने पर जितने जोड़े बनते हैं उतने ही अंक उस संख्या की वर्गमूल संख्या में होते हैं। भले ही अन्तिम जोड़े में एक ही अंकशेष हो।

पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

1. पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 0, 1, 4, 5, 6 तथा 9 होता है अर्थात् जिस संख्या का इकाई अंक 2, 3, 7 व 8 होता है वह पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।
2. पूर्ण वर्ग संख्या के अन्त में शून्यों की संख्या सम होती है एवं शून्यों के पूर्व संख्या वर्ग संख्या हो। जिससे संख्या के अन्त में शून्यों की संख्या विषम होती है तो वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।
3. किसी संख्या का बीजांक 2, 3, 5, 6 व 8 हो तो वह पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

वर्गमूल ज्ञात करने की वैदिक विधि

1. सर्वप्रथम ज्ञात कीजिए कि संख्या पूर्ण वर्ग है अथवा नहीं?
2. यदि संख्या पूर्ण वर्ग हो तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करेंगे।
3. इकाई के अंक का पता लगाएँगे।

संख्या का चरम अंक	वर्गमूल का चरम अंक
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7

अब विलोकनम् विधि से निम्न दूसरी सारणी द्वारा ज्ञात कीजिए कि पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल का दहाई अंक क्या है ?

संख्या समूह	वर्गमूल का दहाई अंक
1 – 3	1
4 – 8	2
9 – 15	3
16 – 24	4
25 – 35	5
36 – 48	6
49 – 63	7
64 – 80	8
81 – 99	9

समूह 1–3 का अर्थ है कि इस समूह में 1, 2 व 3 संख्याएँ है और इन तीनों का सम्भावित वर्गमूल एक माना जा सकता है।

वर्गमूल ज्ञात करने की विलोकनम् विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 30 संख्या 361 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल संख्या को देखने पर निम्न निष्कर्ष प्राप्त हुए।

(i) संख्या 361 का इकाई अंक 1 है अतः पूर्ण वर्ग संख्या हो सकती है।

(ii) संख्या 361 का बीजांक = 3+1+6 = 10 अतः 10 का बीजांक = 1 + 0 = 1 यह पूर्ण वर्ग हो सकती है।

(iii) इस संख्या के वर्गमूल में दो अंक हो सकते हैं।

(iv) संख्या 361 में दाहिनी ओर से दो–दो अंकों के जोड़े बनाने पर दूसरे जोड़े में संख्या 3 रहती है अतः संख्या के वर्गमूल का दहाई अंक एक होगा।

(v) संख्या का चरम अंक 1 है अतः वर्गमूल का चरम अंक 1 या 9 होगा एवं दहाई अंक के लिए 3 है जो 1–3 समूह में होने से वर्गमूल में दहाई का अंक 1 होगा।

(vi) इस प्रकार 361 का वर्गमूल 11 अथवा 19 हो सकता है।

(vii) वर्गमूल के दहाई अंक 1 को उसके एकाधिक से गुणा कीजिए।

गुणनफल $= 1 \times 2 = 2$, दूसरे जोड़े का $3 >$ गुणनफल 2

अतः 11 अथवा 19 में से बड़ा वर्गमूल लेते हैं।

वर्गमूल = 19 उत्तर

उदाहरण 31 संख्या 5184 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल (i) प्रथम जोड़ा = 84 तथा द्वितीय जोड़ा = 51

(ii) प्रथम जोड़े का चरम अंक = 4 अतः सम्भावित वर्गमूल का चरम अंक 2 या 8 हो सकता है।

(iii) 51 में समाहित सबसे बड़ा वर्गमूल अंक = 7 अतः सम्भावित वर्गमूल 72 या 78

गुणनफल $= 7 \times 8 = 56$

(iv) $51 < 56$ है अतः छोटी संख्या ही वर्गमूल होगी। वर्गमूल = 72

विशेष – इस विधि से केवल 4 अंको तक की पूर्ण वर्ग संख्या का ही वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है।

प्रश्नावली 6.7

विलोकनम् विधि से वर्गमूल ज्ञात कीजिए –

(1)	169	(2)	324	(3)	576	(4)	2025
(5)	3025	(6)	9025	(7)	1024	(8)	441

6.11 भाग संक्रिया

जब किसी संख्या से किसी संख्या को क्रमशः कई बार घटाया जाता है तो क्रमशः घटाने की क्रिया को भाग संक्रिया कहा जाता है। जिस संख्या से घटाया जाता है, उसे भाज्य कहते हैं जिसे घटाया जाता है वह भाजक कहलाता है। किसी संख्या से किसी संख्या को जितने बार घटाया जा सकता है वह भाग संक्रिया का भागफल कहलाता है। किसी संख्या से किसी संख्या को अधिकतम बार घटाने से जो संख्या शेष रहती है। उसे शेषफल कहते है। शेषफल सदैव भाजक से छोटा होता है।

उदाहरण 32 संख्या 10 में क्रमशः संख्या 2 को घटाने पर।

हल $10-2 = 8$, $8-2 = 6$, $6-2 = 4$, $4-2 = 2$, $2-2 = 0$

यहाँ पर भाज्य 10 एवं भाजक 2 है घटाने की संक्रिया 5 बार की गयी है। जब शेष भाजक से छोटी संख्या प्राप्त हुई है। अतः भागफल = 5 शेषफल = 0।

6.11.1 परावर्त्य योजयेत् विधि– जब भाजक आधार के निकट होता है तब इस विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि में भाजक की आधार संख्या से भाज्य में भाग देकर अनुमानित भागफल एवं शेषफल ज्ञात कर लिया जाता है।

इसके दो प्रकार है (क) जब भाजक आधार संख्या से बड़ा हो।
(ख) जब भाजक आधार संख्या से छोटा हो।

(क) जब भाजक आधार संख्या से बड़ा हो –

(1) भाजक का आधार संख्या से विचलन ज्ञात करते हैं।

(2) विचलन का परावर्त्य करके संशोधन गुणक ज्ञात करते हैं। (चिह्न बदलते हैं)

(3) भाज्य का प्रथम अंक छोड़कर संशोधन गुणक से भाग देते हैं।

(4) भाग संक्रिया को 3 खण्डों में विभाजित करना है। उदाहरण से समझें।

उदाहरण 33 4656 ÷ 11 को हल कीजिए ।

हल

भाजक	11	4 6 5	6
आधार	10	$\bar{4}$ -	-
विचलन	1	$\bar{2}$	$\bar{3}$
संशोधन गुणांक	$\bar{1}$		
	भागफल	**4 2 3**	**3** शेषफल

क्रियाविधि–

1. भाग संक्रिया को पूर्ण करने के लिए पहले तीन खण्ड बनाना।
2. प्रथम खण्ड में भाजक, द्वितीय खण्ड में भाज्य तथा तृतीय खण्ड में आधार के अनुसार आधार में जितने शून्य हैं उतने ही अंक रखना है। जैसे – उदाहरण–1 में आधार 10 है तो तृतीय खण्ड में 1 अंक रखते हैं जबकि उदाहरण–2 में आधार 100 है व तीसरे खण्ड में 2 अंक रखते हैं।
3. आधार, विचलन एवं संशोधन गुणांक ज्ञात करना।
4. भाज्य संख्या का बाँईं और का प्रथम अंक नीचे लिखना।
5. नीचे लिखे अंक का संशोधन गुणक से गुणा करके भाज्य के आगे की संख्या के नीचे लिखना।
6. घटाकर का नीचे लिखना फिर उसका संशोधन गुणक से गुणा करना। इसी क्रिया को आगे तब तक करेंगे जब तक तृतीय खण्ड में अंक आ जाएँ।

उदाहरण 34 35984 ÷ 112 को हल कीजिए।

हल

भाजक	1 1 2	3 5 9	8 4
आधार	1 0 0	$\bar{3}$ $\bar{6}$	- -
विचलन	1 2	$\bar{2}$	$\bar{4}$
संशोधन गुणांक	$\bar{1}\bar{2}$		$\bar{1}$ $\bar{2}$
भागफल		**3 2 1**	32 शेषफल

(ख) जब भाजक आधार संख्या से छोटा हो–

पूर्व में की गई क्रिया विधि के अनुसार ही हल करना है। उदाहरण से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 35 30103 ÷ 9 को हल कीजिए।

हल

भाजक	9	3 0 1 0	3
आधार	1 0	3 - -	-
विचलन	$\bar{1}$	3 -	-
संशोधन गुणांक	1	4	4
भागफल		**3 3 4 4**	7 शेषफल

ध्यान रहे इस बार संशोधन गुणांक धनात्मक है अतः यह अगली संख्या में जुड़ेगा।

दिए गए उदाहरण में 9 का भाग देना है जो नजदीकी आधार 10 से एक कम है।

भाज्य में प्रथम अंक 3 को तो ज्यों का त्यों भागफल में लिख देंगे फिर 3 की संशोधन गुणांक (+1) से गुणा कर अगली संख्या 0 में जोड़ेंगे भागफल 3 आया जिसे आड़ी संख्या के नीचे लिखेंगे, पुनः इसे संशोधन गुणांक संख्या से गुणाकर अगली संख्या में जोड़ेंगे और भागफल में लिखेंगे और यही क्रम आखिर तक चलेगा।

उदाहरण 36 11022 ÷ 89 को हल कीजिए।

हल

भाजक	8 9	1 1 0	2 2
आधार	1 0 0	1 1	-
विचलन	$\bar{1}$ $\bar{1}$	2	2
संशोधन गुणांक	1 1		3 3
भागफल		**1 2 3**	75 शेषफल

प्रश्नावली 6.8

निम्न प्रश्नों को हल कीजिए।

(1)	$23244 \div 11$	(2)	$12064 \div 12$	(3)	$1234 \div 112$
(4)	$324842 \div 101$	(5)	$2012 \div 9$	(6)	$10321 \div 98$

हमने सीखा

(1) सूत्र संकलन व्यवकलनाभ्याम् के आधार पर संख्याओं को 10 या 10 का गुणक से विचलन कर जोड़ एवं व्यवकलन करवाया गया।

(2) सूत्र पूरणापूरणाभ्याम् के द्वारा दो संख्याओं को पूर्ण के नजदीक बनाकर जोड़ व व्यवकलन करवाया गया।

(3) सूत्र निखिलम नवतः चरमंदशतः का उपयोग कर व्यवकलन कराने का प्रयास कराया गया।

(4) वैदिक गणित की कुछ मनोरंजक गुणनविधियाँ सीखी है, जिसमें 10, 100, 1000, 5, 50, 500 व 11 से गुणा के सरल तरीके जो मौखिक हो सकते हैं को लिखने का प्रयास किया गया। एक न्यूनेन से 99,99,999 के गुणा करने का प्रयास किया।

(5) भिन्न, भिन्नों का योग, व्यवकलन, गुणा के सरलतम तरीकों के साथ वर्गमूल एवं भाग वैदिक विधि में क्रमशः उपसूत्र आनुरूपेण, विलोकनम् व निखिलम् विधि से सरलता से ज्ञात किए जा सकेंगे।