अध्याय

9

चतुर्भुज
(Quadrilateral)

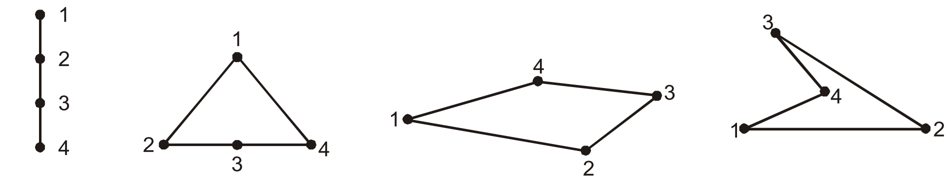
AE7PEU

AEGKGH

9.01 प्रस्तावना (Introduction)

अध्याय 5 व 6 में आपने त्रिभुजों के अनेक गुणधर्मों के बारे में अध्ययन किया है। आप यह भी जान चुके है कि तीन असंरेख बिन्दुओं को मिलाने पर एक एक त्रिभुज बनता है।

आइये अब हम कागज पर चार–चार बिन्दुओं के समूह अंकित करते है और उन्हें क्रमानुसार मिलाते है और देखते है कि कितने प्रकार की सम्भावित आकृतियाँ प्राप्त हो सकती है?



(i) रेखाखण्ड (ii) त्रिभुज (iii) चतुर्भुज (iv) चतुर्भुज

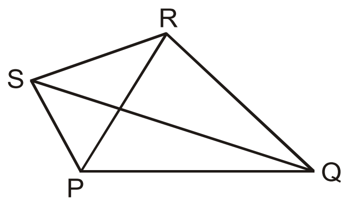
चित्र 9.01

चित्र 9.01 (i), (ii), (iii) तथा (iv) जैसी सम्भावित आकृतियाँ निर्मित हो सकती है। इस अध्याय में हम चित्र 9.01 (iii) जैसी आकृति, जिसे चतुर्भज कहते हैं, का अध्ययन करेंगे।

9.02 चतुर्भुज:

चार भुजाओं से घिरी आकृति को चतुर्भुज कहते है।

एक चतुर्भुज में चार भुजाएँ, चार कोण एवं चार शीर्ष होते है। जैसा कि चित्र 9.02 में चतुर्भुज PQRS में PQ, QR, RS तथा SP चार भुजाएँ, P, Q, R तथा S चार शीर्ष तथा $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ तथा $\angle S$ शीर्षों पर बने कोण हैं।



चित्र 9.02

सम्मुख भुजाएँ एवं सम्मुख कोण–चित्र 9.2 में भुजाPQ की सम्मुख भुजा RS तथा PS की सम्मुख भुजा QR है। $\angle P$ का सम्मुख $\angle R$ तथा $\angle Q$ का सम्मुख $\angle S$ है।

चित्र 9.02 में, आसन्न भुजाओं के युग्म PQ, QR तथा PS, SR है। इसी प्रकार SP, PQ तथा SR, RQ भुजा युग्म आसन्न भुजा युग्म है।

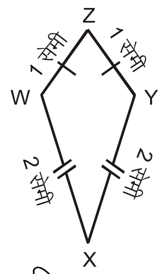
विकर्ण– सम्मुख शीर्षों को मिलाने वाले रेखाखण्ड विकर्ण कहलाते हैं। चित्र 9.02 में, PR एवं QS चतुर्भुज के विकर्ण है।

9.03 चतुर्भुज के कोणों का योग

चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 4 समकोण (360^o) होता हैं। चतुर्भुज के इस गुण धर्म को हमने अध्याय (5) के उपप्रमेय 4 के माध्यम से समझ लिया है।

9.04 चतुर्भुज के प्रकार

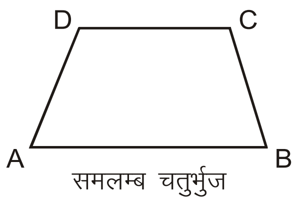
चित्र 9.03 में, WXYZ यह एक ऐसा चतुर्भुज है, जिसकी आसन्न भुजाओं के दो युग्म अर्थात् WX, XY तथा WZ, YZ बराबर है, पतंग है। अर्थात्, ऐसा चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाओं के कोई दो युग्म बराबर हो, पतंग के नाम से जानते हैं।



चित्र 9.03

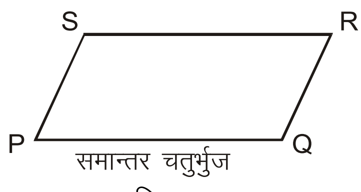
चित्र 9.04 में, चतुर्भुज की ABCD सम्मुख भुजाओं का एक युग्म AB और DC समान्तर है। इस चतुर्भुज को समलम्ब के नाम से जानते हैं।

अर्थात् ऐसा चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर हो, समलम्ब कहलाता है।



चित्र 9.04

चित्र 9.05 में PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म PQ, RS तथा PS, QR समान्तर है। इस चतुर्भुज को समान्तर चतुर्भुज के नाम से जानते हैं।

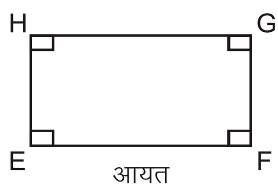


चित्र 9.05

अर्थात् ऐसा चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समान्तर होते हैं।

एक समान्तर चतुर्भुज एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब समान्तर चतुर्भुज नहीं है।

चित्र 9.06 में EFGH एक विशेष समान्तर चतुर्भुज ''आयत'' है जिसका प्रत्येक कोण 90^o होता है। अर्थात् ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण समकोण हो, आयत के नाम से जानते हैं।



चित्र 9.06

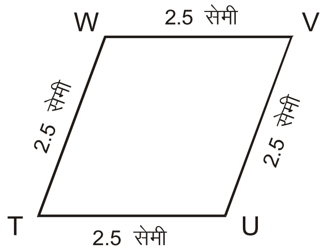
एक आयत एक समान्तर चतुर्भुज है परन्तु एक समान्तर चतुर्भुज एक आयत है, यह आवश्यक नहीं।

एक आयत एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब एक आयत नहीं है।

चित्र 9.07 में TUVW एक विशेष समान्तर चतुर्भुज "समचतुर्भुज" है जिसकी प्रत्येक भुजा का माप बराबर है। अर्थात् ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा समान नाप की हो को समचतुर्भज के नाम से जानते हैं।

एक समचतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज है परन्तु एक समान्तर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है यह आवश्यक नहीं।

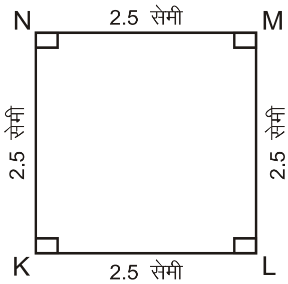
एक समचतुर्भुज एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब समचतुर्भुज नहीं है।



समचतुर्भुज

चित्र 9.07

चित्र 9.08 में KLMN एक विशेष आयत "वर्ग है" जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर है। अथवा एक विशेष समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर एवं प्रत्येक कोण 90^o है। अर्थात् ऐसा आयत जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर है, वर्ग के नाम से जानते हैं।



आयत

चित्र 9.08

एक वर्ग एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब वर्ग नहीं है।

एक वर्ग एक समान्तर चतुर्भुज है परन्तु एक समान्तर चतुर्भुज वर्ग है यह आवश्यक नहीं।

एक वर्ग एक आयत है परन्तु एक आयत एक वर्ग है यह आवश्यक नहीं।

एक वर्ग एक समचतुर्भुज है परन्तु एक समचतुर्भुज एक वर्ग है यह आवश्यक नहीं।

AEQGI5

9.05 समान्तर चतुर्भुज के गुणधर्म

प्रमेय 9.1 किसी समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांसम त्रिभुज में विभाजित करता है।

सिद्ध करना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है और BD उसका विकर्ण है

सिद्ध करना $\Delta ABD \cong ABCD$

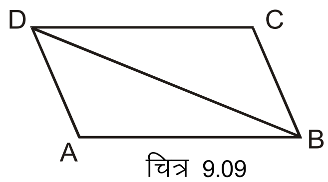
उपपत्ति चित्र 9.09 में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

AB || CD एवं BD एक तिर्यक रेखा है, तो

$\angle ABD = \angle BDC$ एकान्तर कोण . . . (i)

AD || BC, BD तिर्यक रेखा है, तो

$\angle ADB = \angle DBC$ एकान्तर कोण . . . (ii)



चित्र 9.09

ΔABD व ΔCDB में

$\angle ABD = \angle BDC$ (i) से

BD = BD (एक उभयनिष्ठभुजा) (i) से

$\angle ADB = \angle DBC$ एक उभयनिष्ठ भुजा (ii) से

$\Rightarrow$ $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ (ASA नियम से). . . (iii)

प्रमेय 9.2 समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है।

दिया हुआ चित्र 9.09 में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना AB = CD एवं AD = BC

रचना BD एक विकर्ण खींचिये।

उपपत्ति प्रमेय 9.1 के अनुसार $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ करें

अतः ΔABD व ΔCDB की संगत भुजाएँ

AB = CD एवं AD = BC ''इतिसिद्धम''

प्रमेय 9.3 : (प्रमेय 9.2 का विलोम) किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का युग्म समान हो तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

दिया हुआ ABCD एक चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाएँ

AB = CD एवं BC = AD है।

सिद्ध करना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

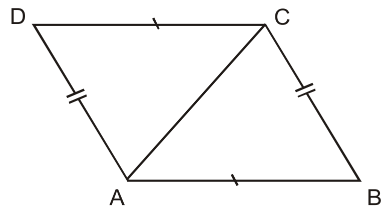
रचना A व C को मिलाया

उपपत्ति ΔABC व ΔCDA में

AB = CD (दिया हुआ)

BC = AD (दिया हुआ)

AC (उभयनिष्ठ)



चित्र 9.10

अतः $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

अर्थात् $\angle CAB = \angle ACD$ एकान्तर कोण

$\Rightarrow$ AB || CD . . . (i)

एवं $\angle ACB = \angle CAD$ एकान्तर कोण

$\Rightarrow$ BC || AD . . . (ii)

(i), (ii) से चतुर्भुज ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम्''

प्रमेय 9.4 समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$

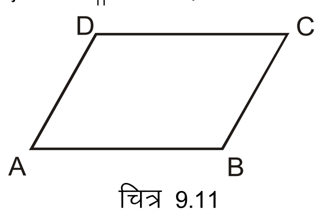
उपपत्तिः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। अतः AB || DC एवं AD || BC है।

$\therefore$ $\angle A + \angle D = 180^\circ$ (क्रमागत अन्तः कोण)... (1)

$\therefore$ $\angle C + \angle D = 180^\circ$ (क्रमागत अन्तः कोण)... (2)

(1) और (2) से

$\angle A + \angle D = \angle C + \angle D \quad \Rightarrow \quad \angle A = \angle C$



चित्र 9.11

इसी प्रकार $\angle B = \angle D$ ''इति सिद्धम''।

अब क्या इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है? हाँ सत्य है। चलिये इसे भी सिद्ध करते हैं।

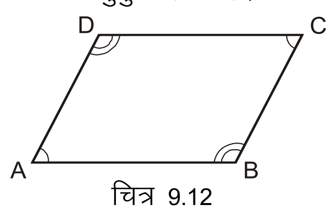
प्रमेय 9.5 एक चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर हों, तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

दिया है: एक चतुर्भुज ABCD है,

जिसमें $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।

सिद्ध करना है: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

उपपत्तिः चतुर्भुज ABCD में दिया है



चित्र 9.12

Δ $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।

जोड़ने पर $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ . . . (1)

परन्तु $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$ . . . (2)

(1) और (2) से

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^o$$

अर्थात् रेखा AB, रेखाओं AD और BC को क्रमशः A और B पर प्रतिच्छेद करती है जिससे

$\angle A + \angle B = 180^o$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोण)

अतः AD || BC . . . (3)

इसी प्रकार $\angle C + \angle D = 180^o$

अतः AB || DC . . . (4)

(3) और (4) से

$\Rightarrow$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम'' ।

प्रमेय 9.6 समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

दिया है : एक समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है : OA = OC और OB = OD

उपपत्ति : Δ AOD एवं Δ COB में

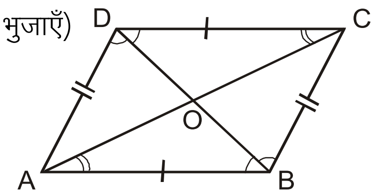
$\angle ADO = \angle OBC$ (एकान्तर कोण)

AD = BC (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle DAO = \angle OCB$ (एकान्तर कोण)

अतः कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम से

$\Delta AOD \cong \Delta COB$



चित्र 9.13

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ बराबर होंगी।

अर्थात् OD = OB और OA = OC ''इतिसिद्धम्'' ।

प्रमेय 9.7 (प्रमेय 9.6 का विलोम)

यदि चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों, तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

दिया है : एक चतुर्भुज ABCD जिसके विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं, अर्थात्

OA = OC और OB = OD

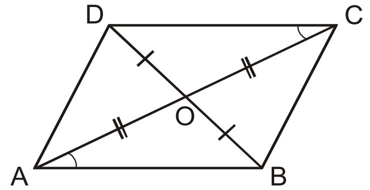
सिद्ध करना है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : Δ AOB और Δ COD में

OA = OC (दिया है)

$\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

और OB = OD (दिया है)



चित्र 9.14

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$$\Delta AOB \cong \Delta COD$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle OAB = \angle OCD$

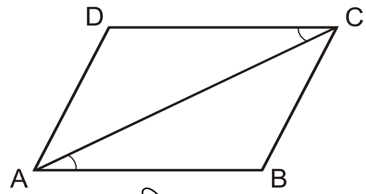
परन्तु यह तिर्यक रेखा AC द्वारा रेखाओं AB और CD पर बने एकान्तर कोण है। अतः

$$AB \parallel CD$$

इसी प्रकार $AD \parallel BC$

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम''।

प्रमेय 9.8 एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है, यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर एवं समान्तर हों।



चित्र 9.15

दिया है : एक चतुर्भुज ABCD

जिसमें $AB \parallel DC$ और $AB = DC$ हैं।

सिद्ध करना है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना : A को C से मिलाया।

उपपत्ति : $AB \parallel DC$ और तिर्यक रेखा AC इनको प्रतिच्छेद करती हैं।

अतः $\angle BAC = \angle DCA$ (एकान्तर कोण) $\ldots(1)$

अब ΔABC और ΔCDA में

$AB = DC$ (दिया है)

$\angle BAC = \angle DCA$ [(1) से]

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta ABC \cong \Delta CDA$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों त्रिर्भुजों के संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle ACB = \angle CAD$

अब AD, BC दो रेखाएँ है और तिर्यक रेखा AC जिनको इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि एकान्तर कोण $\angle ACB$ एवं $\angle CAD$ समान हैं।

अतः $AD \parallel BC$ $\ldots(2)$

अर्थात् $AD \parallel BC$ [(2) से]

$AB \parallel DC$ (दिया है)

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम''।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: दो रेखाखण्डों AC और BD एक दूसरे को P पर समद्विभाजित करते हों, तो सिद्ध कीजिये कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

हलः दिया है: रेखाखण्ड AC और BD,

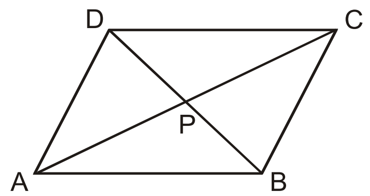
एक दूसरे को P पर समद्विभाजित करते हैं।

सिद्ध करना है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना : A, B, C तथा D को क्रमशः मिलाया।

उपपत्ति : ΔAPB और ΔCPD में

चित्रानुसार ABCD एक चतुर्भुज है



चित्र 9.16

AC एवं BD इसके विकर्ण है

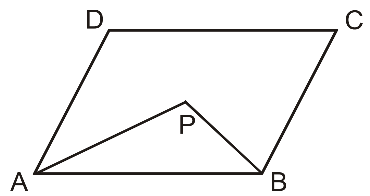
चूंकि $AP = PC$ एवं $BP = PD$ (दिया है) AC व BD को समद्विभाजित करता है।

अतः प्रमेय 9.7 से

ABCD एक समान्तर चुतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम'' ।

उदाहरण 2: एक समान्तर चतुर्भुज ABCD में परिभाषति नहीं है A और B के समद्विभाजक बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle APB = 90^\circ$

हल : दिया है : चित्र 9.17 में, समान्तर चतुर्भुज ABCD के आसन्न कोणों A और B के समद्विभाजक P पर मिलते हैं।



चित्र 9.17

सिद्ध करना है : $\angle APB = 90^\circ$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग 180° होता है

अतः $$\angle A + \angle B = 180^\circ \qquad \ldots(1)$$

दिया है कि $\angle PAB = \frac{1}{2}\angle A$

और $\angle PBA = \frac{1}{2}\angle B$

अतः $$\angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) \qquad \ldots(2)$$

(1) और (2) से

$$\angle PAB + \angle PBA = 90^\circ \qquad \ldots(3)$$

ΔAPB में

$$\angle PAB + \angle PBA + \angle APB = 180^\circ \qquad \ldots(4)$$

(3) और (4) से

$\Rightarrow \quad \angle APB = 90^\circ$ ''इतिसिद्धम्'' ।

उदाहरण 3: समान्तर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DQ = BP. सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

हलः दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित

हैं कि BP = QD.

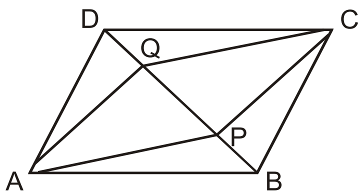
सिद्ध करना है : APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : ΔAQD और ΔCPB में

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle ADQ = \angle CBP$ (एकान्तर कोण)

$QD = BP$ (दिया है)



चित्र 9.18

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta AQD \cong \Delta CPB$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $AQ = CP \ldots (1)$

इसी प्रकार ΔCQD और ΔAPB में, हम सिद्ध कर सकते है कि $CQ = AP \ldots (2)$

(1) और (2) से

APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 4: चतुर्भुज **ABCD** के विकर्ण परस्पर बिन्दु **O** पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि **OA : OC = 3 : 2** है। क्या **ABCD** एक समांतर चतुर्भुज है? कारण सहित स्पष्ट कीजिए।

हल : ABCD एक समांतर चतुर्भुज नहीं है, क्योंकि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यहाँ $OA \neq OC$ है।

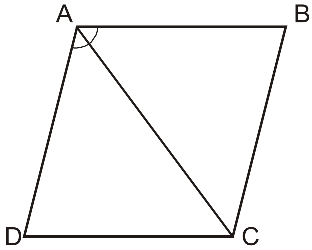
उदाहरण 5: किसी चतुर्भुज के कोण 3 : 4 : 4 : 7 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि चतुर्भुज के कोण $3x$, $4x$, $4x$ और $7x$ हैं।

इसलिए, $3x + 4x + 4x + 7x = 360^\circ$

या $18x = 360^\circ$, अर्थात् $x = 20^\circ$

इस प्रकार, वांछित कोण 60°, 80°, 80° और 140° हैं।



चित्र 9.19

उदाहरण 6: एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसके एक कोण को समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि वह विकर्ण उस कोण के सम्मुख कोण को भी समद्विभाजित करेगा।

हल: आइए दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार आकृति खींचें (चित्र 7.19)। इसमें विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD के $\angle BAD$ को समद्विभाजित करता है। अर्थात् यह दिया है कि $\angle BAC = \angle DAC$ है। हमें सिद्ध करना है कि $\angle BCA = \angle DCA$ है।

$AB \parallel DC$ है तथा AC एक तिर्यक रेखा है।

अतः $\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर कोण) $\ldots (1)$

इसी प्रकार, $\angle DAC = \angle BCA$ ($AD \parallel BC$ से) $\ldots (2)$

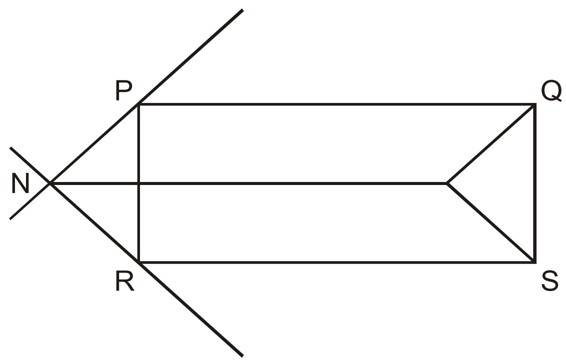
परंतु यह दिया है कि $\angle BAC = \angle DCA$

अतः (1), (2) और (3) से हमें प्राप्त होता है

$\angle BCA = \angle DCA$ ''इतिसिद्धम्''

उदाहरण 7: PQ और RS दो बराबर और समांतर रेखाखंड हैं। बिन्दु M, जो PQ या RS पर स्थित नहीं है, को Q और S से मिलाया जाता है। P से होकर जाती हुई QM के समांतर रेखा और R से होकर जाती हुए SM के समांतर रेखा परस्पर N पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि रेखाखंड MN और PQ परस्पर बराबर और समांतर हैं।

हलः हम दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार आकृति खींचते हैं। (चित्र 9.20)



चित्र 9.20

यह दिया है कि $PQ = RS$ और $PQ \parallel RS$ है। अतः PQSR एक समांतर चतुर्भुज है।

अतः, $PR = QS$ और $PR \parallel QS$ है। ...(1)

अब, $PR \parallel QS$

इसलिए, $\angle RPQ + \angle PQS = 180^o$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण)

अर्थात् $\angle RPQ + \angle PQM + \angle MQS = 180^o$ ...(2)

साथ ही, $PN \parallel QM$ (रचना से)

$\angle NPR + \angle RPQ + \angle PQM = 180^o$ ...(3)

अतः, $\angle NPR = \angle MQS$ [(2) और (3) से] ...(4)

इसी प्रकार, $\angle NRP = \angle MSQ$ ...(5)

इसलिए, $\Delta PNR \cong \Delta QMS$ [ASA, (1), (4) और (5) के प्रयोग से]

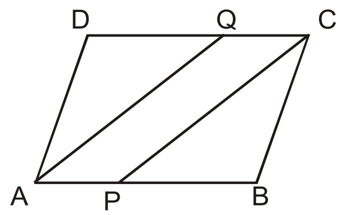
अतः $PN = QM$ और $NR = MS$

क्योंकि $PN \parallel QM$ है, अतः PQMN एक समांतर चतुर्भुज है

अतः $MN = PQ$ और $NM \parallel PQ$ है। ''इतिसिद्धम्''

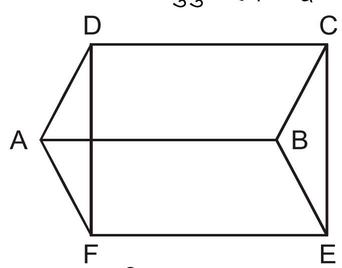
प्रश्नमाला 9.1

1. एक चतुर्भुज के कोण 3 : 5 : 9 : 13 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।
2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं जो OA = 3 cm और OD = 2 cm है, तो AC और BD की लंबाई ज्ञात कीजिए।
3. एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
4. क्या कोण 110^o, 80^o, 70^o और 95^o किसी चतुर्भुज के कोण हो सकते हैं? क्यों और क्यों नहीं
5. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण अधिक कोण हो सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
6. एक चतुर्भुज का एक कोण 108^o है तथा अन्य तीनों कोण बराबर हैं। तीनों बराबर कोणों में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए।
7. ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ और $\angle A = \angle B = 45^o$ है। इस समलंब के कोणC और D ज्ञात कीजिए।
8. एक समांतर चतुर्भुज के एक अधिक कोण के शीर्ष से खींचे गए उस समांतर चतुर्भुज के दो शीर्षलंबों`क बीच का कोण 60^o है। इस समांतर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।
9. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण, AC पर बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि AE = CF है। दर्शाइए कि BFDE एक समांतर चतुर्भुज है।
10. चित्र 9.21 में, ABCD एक समान्तर चतर्भुज है। AQ और CP क्रमशः $\angle A$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.21

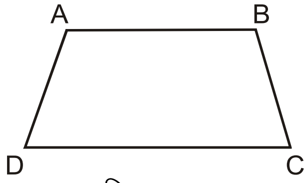
11. चित्र 9.22 में, ABCD और AFEB समान्तर चतुर्भुज है। सिद्ध कीजिए किCDFE समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.22

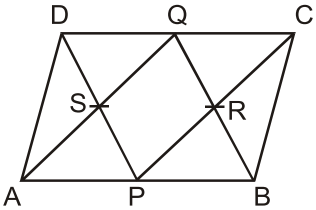
12. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण BD पर A और C से डाले गये लम्ब क्रमशः AP और CQ हैं। सिद्ध कीजिए कि AP = CQ.

13. चित्र 9.23 में, ABCD एक चतुर्भुज है। जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$



चित्र 9.23

14. चित्र 9.24 में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। P और Q क्रमशः सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि PRQS एक समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.24

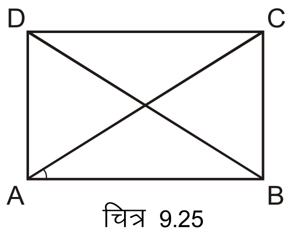
9.06 विशेष समान्तर चतुर्भुज एवं उनके गुणधर्मः

AEZCJS

अनुच्छेद 9.4 में हमने समान्तर चतुर्भुज की कुछ विशेष आकृतियों के बारे में संक्षिप्त में जानकारी ली है।

आइए अब हम उन विशेष समान्तर चतुर्भुजों में विद्यमान गुणों को कुछ प्रमेयों के माध्यम से समझने का प्रयत्न करते हैं।

प्रमेय 9.9 यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समान हों, तो वह एक आयत होता है।



चित्र 9.25

दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, जिससे $AC = BD$

सिद्ध करना : ABCD एक आयत है।

उपपत्ति : ΔABC और ΔBAD में

$BC = AD$ (स.च. की सम्मुख भुजाएँ)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AC = BD$ (दिया है)

अतः भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta ABC \cong \Delta BAD$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle CBA = \angle DAB$

परन्तु यह तिर्यक के एक ही ओर के अन्त कोण हैं।

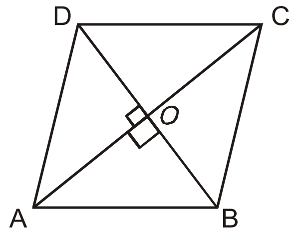
$\therefore \quad \angle DAB + \angle CBA = 180^\circ$

$\therefore \quad \angle DAB = \angle CBA = 90^\circ$

अतः ABCD एक आयत है। ''इतिसिद्धम्'' ।

विलोम : एक आयत के विकर्ण परस्पर बराबर होते हैं।

प्रमेय 9.10 यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत् हों, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।



चित्र 9.26

दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर लम्बवत् है।

सिद्ध करना है : ABCD एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति : ΔAOB और ΔCOB में

$OB = OB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle AOB = \angle BPC = 90^o$ (दिया है)

$AO = CO$ (समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta AOB \cong \Delta COB$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $AB = BC$

अतः ABCD एक समचतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम्''

विलोम : एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्वबत् होते हैं।

प्रमेय 9.11 यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बराबर एवं लम्बवत् हो, तो यह एक वर्ग होता है।

दिया है : ABCD एक समानतर चतुर्भुज है, जिसमें $AC = BD$ एवं $AC \perp BD$ है।

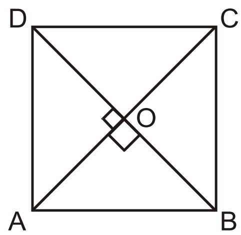
सिद्ध करना है : ABCD एक वर्ग है।

उपपत्ति : ΔABO और ΔADO में

$BO = OD$ (ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है)

$\angle AOB = \angle AOD = 90^o$ (दिया है)

$AO = AO$ (उभयनिष्ठ)



चित्र 9.27

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABO \cong \Delta ADO$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $AB = AD$ ... (1)

अब ΔABD और ΔBAC में,

$BD = AC$ (दिया है)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AD = BC$ (सम्मुख भुजाएँ)

अतः भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta ABD \cong \Delta BAC$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण समान होंगे।

$$\angle DAB = \angle CBA \qquad \ldots(2)$$

हम जानते हैं कि, समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग 180^{o} होता है।

$$\angle DAB + \angle CBA = 180^{o} \qquad \ldots(3)$$

(2) और (3) से

$$\angle DAB = \angle CBA = 90^{o} \qquad \ldots(4)$$

एवं (1) और (4) से

अतः ABCD एक वर्ग है। ''इतिसिद्धम''।

विलोम : एक वर्ग के विकर्ण बराबर और परस्पर लम्बवत् होते हैं।

AF98LF

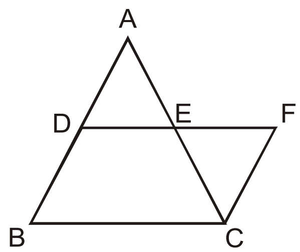
9.07 मध्य बिन्दु प्रमेय

आपने अब तक त्रिभुज और चतुर्भुज के अनेक गुणों के बारे में अध्ययन किया है। चलिए अब हम एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु सम्बन्धी एक अन्य गुण पर निम्न क्रिया कलाप के माध्यम से विचार करते हैं।

प्रमेय 9.12 त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखा खण्ड तीसरी भुजा के समान्तर एवं उसका आधा होता है।

दिया है : त्रिभुज ABC में, बिन्दु D और E क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु है।

सिद्ध करना है : (i) $DE \parallel BC$ (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$



चित्र 9.28

रचना : DE को F तक बढ़ाया,

जहाँ $EF = DE$, C को F से मिलाया।

उपपत्ति : ΔADE और ΔCFE में,

$AE = CE$ (दिया है)

$\angle AED = \angle CEF$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$DE = EF$ (रचना से)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta ADE \cong \Delta CFE$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ और कोण समान होंगे।

$\therefore \quad AD = CF$

$\angle EAD = \angle ECF$

तिर्यक रेखा AC रेखाओं AB और CF को प्रतिच्छेद करती है और एकान्तर कोण EAD तथा ECF बराबर है।

$AD \parallel CF$ और $BD \parallel CF$

परन्तु दिया है कि   AD = BD . . . (3)

(1) और (3) से

$$BD = CF$$

अर्थात्   BD = CF और BD || CF

अतः BCFD एक समान्तर चतुर्भुज है।

∴ DF एवं BC भी समान और समान्तर है।

या   DE || BC

∴ $DE = \frac{1}{2} DF$ (रचना से)

अतः $DE = \frac{1}{2} BC$ ''इतिसिद्धम्''।

प्रमेय 9.13 : (प्रमेय 9.12 का विलोम)

त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से, एक अन्य भुजा के समान्तर खींची गई रेखा, तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

दिया है : चित्र 9.29 में, त्रिभुज ABC की भुजा AB का मध्य बिन्दु D है DE || BC और AC को E पर काटती है।

सिद्ध करना है : AE = EC

रचना : BD के समान्तर रेखा CF खींची, जो DE (बढ़ी हुई) को F पर प्रतिच्छेद करती है।

∵   BC || CF   (दिया है)

BD || CF   (रचना से)

अतः   BCFD एक समान्तर चतुर्भुज है

उपपत्ति : ∵   BD = CF   . . . (1)

परन्तु   BD = AD   (दिया है)

∴   AD = CF

अब Δ ADE और Δ CFE में

$\angle ADE = \angle CFE$ (एकान्तर कोण)

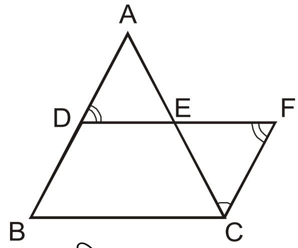
AD = CF   [(1) से]

$\angle DAE = \angle ECF$ (एकान्तर कोण)

अतः कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta ADE \cong \Delta CFE$$

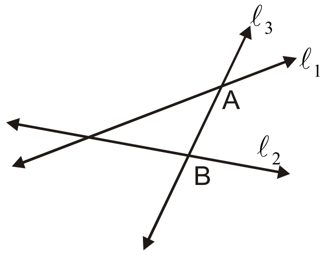
अतः   AE = CE   ''इतिसिद्धम्''।



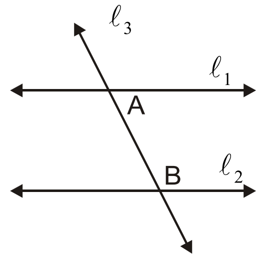
चित्र 9.29

9.08 अन्तः खण्ड (Intercept):

यदि एक समतल में दो रेखाएँ ℓ_1 और ℓ_2 हों और यदि एक तीसरी रेखा ℓ_3 उन्हें भिन्न–भिन्न बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती हो, तो रेखाखण्ड AB दी गई रेखाओं ℓ_1 और ℓ_2 द्वारा तीसरी रेखा ℓ_3 पर बनाया गया अन्तः खण्ड कहलाता है।



चित्र 9.30



चित्र 9.31

यहाँ हम तीन समान्तर रेखाओं के लिए निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे। इस प्रमेय का विस्तार तीन से अधिक रेखाओं के लिए भी किया जा सकता है।

AFI4N3

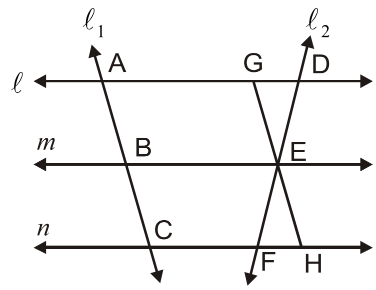
प्रमेय 9.14 यदि तीन या अधिक समान्तर रेखाएँ हो, और उनके द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाये गये अन्तःखण्ड बराबर हो, तो किसी अन्य तिर्यक रेखा पर संगत अन्तःखण्ड भी बराबर होंगे।

दिया है : चित्र 9.32 में, ℓ, m, n तीन समान्तर रेखाएँ हैं और दो तिर्यक रेखाएँ ℓ_1 तथा ℓ_2 उनको क्रमशः A, B, C और D, E, F बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं तथा $AB = BC$ है।

सिद्ध करना : $DE = EF$

रचना : तिर्यक रेखा ℓ_1 के समान्तर रेखा GH खींची, जो E से गुजरती है।

उपपत्ति : ℓ एवं m समान्तर रेखाएँ हैं। अतः



चित्र 9.32

$AG \parallel BE$

एवं $AB \parallel GE$ (रचना से)

$\therefore$ ABEG एक समान्तर चतुर्भुज है।

अतः $AB = GE$ ...(1)

इसी प्रकार BCHE भी एक समान्तर चतुर्भुज है।

अतः $BC = EH$ ...(2)

दिया हुआ है कि $AB = BC$

अतः $GE = EH$ ...(3)

पुनः ℓ और m समान्तर रेखाएँ है और तिर्यक रेखा ℓ_2 उनको प्रतिच्छेद करती हैं। अतः

$\angle GDE = \angle EFH$ (एकान्तर कोण) ...(4)

अब ΔGDE और ΔHFE में

$\angle GDE = \angle EFH$ [(4) से]

$GE = EH$ [(3) से]

$\angle GED = \angle FEH$ (शीर्षाभिमुख कोण)

कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम से

$\Delta GDE \cong \Delta HFE$

अतः सर्वांगसमत त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी

अर्थात् $DE = EF$ ''इतिसिद्धम्''।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 8. एक समबाहु त्रिभुज की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F है। सिद्ध कीजिए। कि Δ DEF एक समबाहु त्रिभुज है।

हलः दिया है : एक ΔABC जिसकी भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F है।

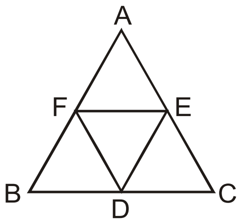
सिद्ध करना है : ΔDEF एक समबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति : ΔABC में D, E और F क्रमशः BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं,

अतः $DE = \frac{1}{2}AB \quad \ldots(1)$

$EF = \frac{1}{2}BC \quad \ldots(2)$

$FD = \frac{1}{2}AC \quad \ldots(3)$



चित्र 9.33

परन्तु ΔABC एक समबाहु है

अतः $AB = BC = AC$

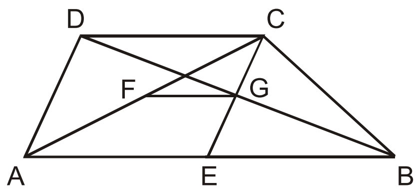
(1),(2) और (3) से

$DE = EF = FD$

अर्थात् ΔDEF एक समबाहु त्रिभुज है। '''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए कि एक समलम्ब चतुर्भुज के विकर्ण मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसकी समान्तर भुजाओं के समान्तर तथा उनके अन्तर की आधी होगी।

हल : दिया है : एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD है। $AB \parallel DC$ है एवं विकर्ण AC और BD के मध्य बिन्दु क्रमशः F और G हैं।



चित्र 9.34

सिद्ध करना है : (i) $FG \parallel AB$

(ii) $FG = \frac{1}{2}(AB - CD)$

रचना : CG को मिलाते हुए आगे इस प्रकार बढ़ाया कि यह AB पर मिल E बिन्दु पर मिले।

उपपत्तिः ΔCDG और ΔEBG में

$\angle CDG = \angle EBG$ (एकान्तर कोण)

$DG = GB$ (दिया है)

$\angle DCG = \angle BEG$ (एकान्तर कोण)

$\Delta CDG \cong \Delta EBG$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम)

अतः $CG = EG \quad \ldots(1)$

$CD = EB \quad \ldots(2)$

अब ΔACE में, F और G क्रमशः भुजाओं AC और CE के मध्यबिन्दु हैं।

अतः $FG \parallel AE$ और $FG = \frac{1}{2} AE$ . . . (3)

परन्तु $AE = AB - EB$

$AE = AB - CD$ [(2) से] . . . (4)

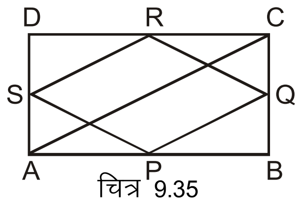
(3) और (4) से

$$FG = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2}(AB - CD)$$

और $FG \parallel AE$

$\Rightarrow$ $FG \parallel AB$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 10. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है।



चित्र 9.35

हल : दिया है : चित्र 9.35 में, ABCD एक चतुर्भुज है, जिसकी भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q, R और S हैं।

सिद्ध करना है : PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना : AC को मिलाया।

उपपत्ति : ΔABC में, P और Q क्रमशः भुजाओं AB और BC के मध्य बिन्दु हैं। अतः प्रमेय 9.12 से

$PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2} AC$ . . . (1)

इसी प्रकार में, S और R क्रमशः भुजाओं AD और DC के मध्य बिन्दु है।

अतः $SR \parallel AC$

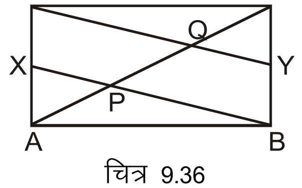
और $SR = \frac{1}{2} AC$ . . . (2)

(1) और (2) से

$$PQ \parallel SR \text{ और } PQ = SR = \frac{1}{2} AC$$

अर्थात् PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 11. चित्र 9.36 में, X और Y क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AD और BC के मध्य–बिन्दु हैं। साथ ही, BX और DY क्रमशः AC को P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि AP = PQ = QC है।



चित्र 9.36

हल : आकृति 9.36 में X और Y क्रमशः समान्तर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AD और BC के मध्य बिन्दु है। साथ BX और DY क्रमशः AC को P और Q पर प्रतिच्छेद करते है।

दर्शाना है $AP = PQ = QC$

$AD = BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

अतः $DX = BY\left(\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC\right)$

साथ ही, $DX \mid BY$ (क्योंकि $AD \parallel BC$)

अतः, XBYD एक समांतर चतुर्भुज है। (सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर है)

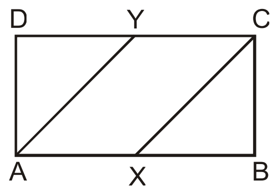
अर्थात् $PX \parallel QD$

अतः $AP = PQ$ (ΔAQD से, जहाँ X रेखाखंड AD का मध्य–बिन्दु है) (I)

इसी प्रकार, ΔCPB से, $CQ = PQ \ldots$ (2)

इस प्रकार, $AP = PQ = CQ$ [(1) और (2) से]

उदाहरण 12. चित्र 9.37 में, AX और CY क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण A और C के समद्विभाजक हैं। दर्शाइए कि AX || YC है।



चित्र 9.37

हलः $\angle A = \angle C$ (समांतर चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण)

अतः $\frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

अर्थात् $\angle YAX = \angle YCX$ ...(1)

साथ ही, $\angle AYC + \angle YCX = 180^\circ$ (क्योंकि $YA \parallel CX$) ...(2)

अतः $\angle AYC + \angle YAX = 180^\circ$ [(1) और (2) से]

इसलिए, $AX \parallel YC$ (क्योंकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण संपूरक हैं)

उदाहरण 13. दर्शाइए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में मिलाने पर बना चतुर्भुज एक आयत होता है।

हल : मान लीजिए कि ABCD एक समचतुर्भुज है तथा P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य–बिन्दु हैं (चित्र 9.38) AC और BD को मिलाइए।

ΔABD से, हमें प्राप्त हैः

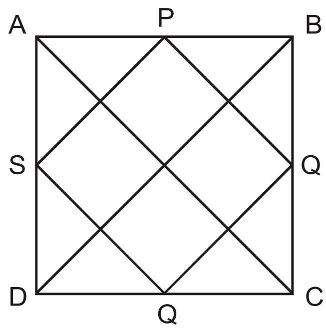
$SP = \frac{1}{2}BD$ और

$SP \parallel DB$ (क्योंकि S और P मध्य–बिन्दु है)

इसी प्रकार, $RQ = \frac{1}{2}BD$ और $RQ \parallel DB$

अतः $SP = RQ$ और $SP \parallel RQ$

इसलिए, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।



चित्र 9.38

साथ ही, $AC \perp BD$ (समचतुर्भुज के विकर्ण लंब होते हैं)

इसके अतिरिक्त, $PQ \parallel AC$ (ΔBAC से)

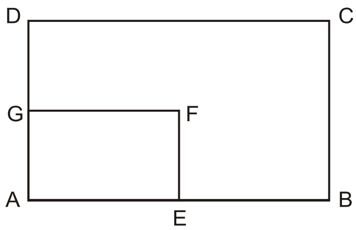
क्योंकि $SP \mid BD$, $PQ \parallel AC$ और $AC \perp BD$ है

इसलिए हमें प्राप्त होता है : $SP \perp PQ$ अर्थात् $\angle SPQ = 90^\circ$ . . . (2)

अतः PQRS एक आयत है [(1) और (2) से] ''इतिसिद्धम्''

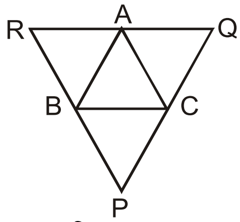
प्रश्नमाला 9.2

1. चित्र 9.39 में, ABCD और AEFG दो समांतर चतुर्भुज हैं यदि $\angle C = 55^\circ$ है, तो $\angle F$ निर्धारित कीजिए।



चित्र 9.39

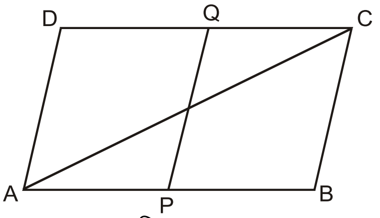
2. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण न्यून कोण हो सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।
3. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण समकोण हो सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।
4. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यदि $\angle A = 35^\circ$ है, तो $\angle B$ निर्धारित कीजिए।
5. एक चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण बराबर हैं। यदि AB = 4 cm है, तो CD निर्धारित कीजिए।
6. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसमें D से AB पर शीर्षलंब AB को समद्विभाजित करता है। समचतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।
7. एक त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B और C से होकर, क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के समांतर रेखाएँ RQ, PR और QP चित्र 9.40 में दर्शाए अनुसार खींची गई हैं। दर्शाइए कि $BC = \frac{1}{2} = QR$ है।



चित्र 9.40

8. D, E और F क्रमशः एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य–बिन्दु हैं। दर्शाइए कि ΔDEF भी एक समबाहु त्रिभुज है।

9. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AB और CD पर क्रमशः बिन्दु P और Q इस प्रकार लिए गए हैं कि AP = CQ है (चित्र 9.41) दर्शाइए कि AC और PQ परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

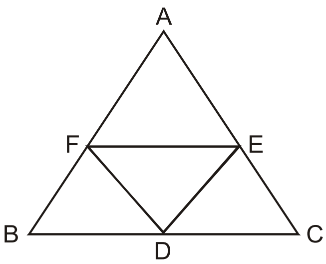


चित्र 9.41

10. E एक समलंब ABCD की भुजा AD का मध्य–बिन्दु है, जिसमें AB || DC है। E से होकर AB के समांतर खींची गई रेखा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य–बिन्दु है। [संकेत : AC को मिलाइए]

11. Δ ABC में, AB = 5 cm, BC = 8 cm और CA = 7 cm हैं। यदि D और E क्रमशः AB और BC के मध्य–बिन्दु है, तो DE की लंबाई निर्धारित कीजिए।

12. चित्र 9.42 में, यह दिया है कि BDEF और FDCE समांतर चतुर्भुज हैं। क्या आप कह सकते हैं कि BD = CD है? क्यों और क्यों नहीं?

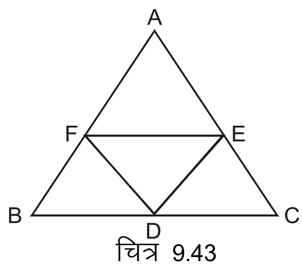


चित्र 9.42

13. चित्र 9.43 में, D, E और F क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं। यदि AB = 4.3 सेमी, BC = 5.6 सेमी और AC = 3.9 सेमी हों, तो निम्नलिखित का परिमाप ज्ञात कीजिए।

(i) Δ DEF

(ii) चतुर्भुज BDEF



चित्र 9.43

14. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।

15. एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत् हैं। सिद्ध कीजिए कि उसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित चतुर्भुज एक आयत होता है।

16. सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण को समद्विभाजित करने वाली माध्यिका कर्ण की आधी होती है

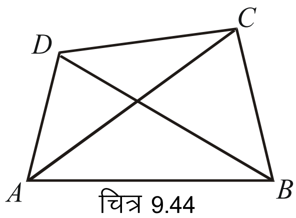
17. सिद्ध कीजिए कि एक आयत की भुजाओं के युग्मों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से एक समचतुर्भुज बनता है।

चतुर्भुजों की रचनाएँ (Construction of Quadrilaterals)

9.09 चतुर्भुज

चार भुजाओं से घिरी समतलीय आकृति को चतुर्भुज कहतें हैं। इसके आमने–सामने के बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को विकर्ण (Diagonal) कहते हैं।

चित्र 9.44 में चतुर्भुज की AB, BC, CD और DA चार भुजाएँ हैं। A, B, C, D शीर्ष बिन्दु हैं तथा AC व BD चतुर्भुज के विकर्ण हैं।



चित्र 9.44

9.10 चतुर्भुज की रचना :

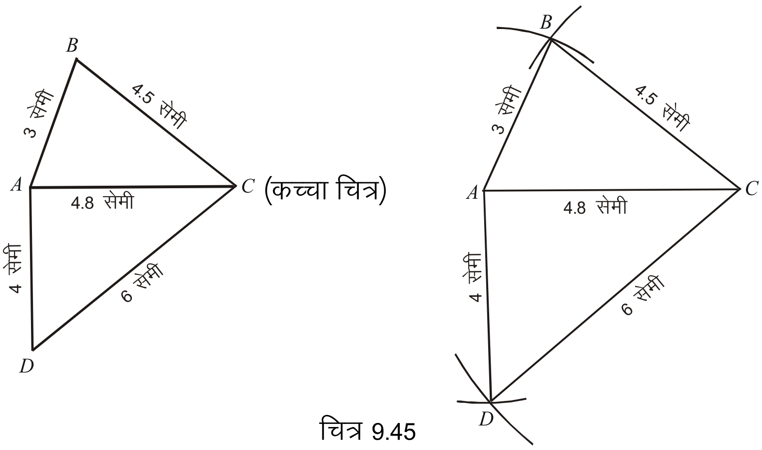
जब किसी चतुर्भुज की रचना करनी हो तो इससे पूर्व रचना करने संबंधी दिये गए तथ्यों को कच्चा चित्र खींचकर अंकित कर लेना चाहिए। प्रायः चतुर्भुज की रचना में विकर्ण का अपना विशेष महत्व होता है। इसलिए कच्चे चित्र में विकर्ण खींचकर विचार अवश्य कर लेना चाहिये। क्या इससे किसी त्रिभुज की रचना की जा सकती है ? त्रिभुज बन जाने पर चतुर्भुज खींचकर यही बात देखनी चाहिये। त्रिभुज बन जाने पर चतुर्भुज की रचना पूर्ण की जा सकती है। यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक स्थिति में विकर्ण खींचा ही जाये। कभी–कभी बिना विकर्ण खींचे भी चतुर्भुज की रचना की जा सकती है।

इस अध्याय में दी गई निर्मेयों से इसको स्पष्टतया समझा जा सकता है।

निर्मेय 9.1 चतुर्भुज की रचना करना जब चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिये गए हों।

एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 3$ सेमी, $BC = 4\cdot5$ सेमी, $CD = 6$ सेमी, $DA = 4$ सेमी और $AC = 4\cdot8$ सेमी है।

रचना : सर्वप्रथम दी गई मापों के आधार पर कच्चा चित्र खींचकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।



चित्र 9.45

कच्चे चित्र के अनुसार, $AC = 4\cdot8$ सेमी खींचिए। बिन्दु A तथा C से क्रमशः 3 सेमी तथा $4\cdot5$ सेमी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज ABC पूर्ण कीजिए। इसी प्रकार AD व CD की दूरी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज ACD पूर्ण कीजिए।

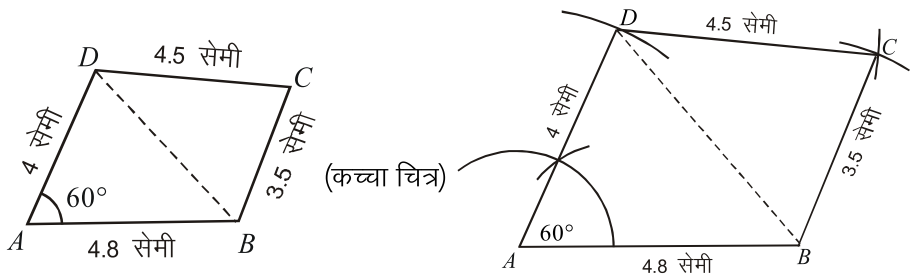
$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.2 चतुर्भुज की रचना करना जिसमें चार भुजाएँ और एक कोण दिये गए हो।

एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4 \cdot 8$ सेमी, $BC = 3 \cdot 5$ सेमी, $CD = 4 \cdot 5$ सेमी, $DA = 4$ सेमी और $\angle A = 60°$ है।

रचना : दी गई मापों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर संगत मापों को अंकित कीजिए।

कच्चे चित्र के अनुसार, $AB = 4 \cdot 8$ सेमी खींचिए, बिन्दु A पर $60°$ का कोण बनाकर, उसमें से 4 सेमी की दूरी AD काटिए। D व B बिन्दुओं को केन्द्र मानकर क्रमशः $4 \cdot 5$ सेमी, और $3 \cdot 5$ की दूरी की त्रिज्या से चाप लगाइए। ये चाप जहाँ पर परस्पर काटे, उस बिन्दु C को D व B से मिलाइये।



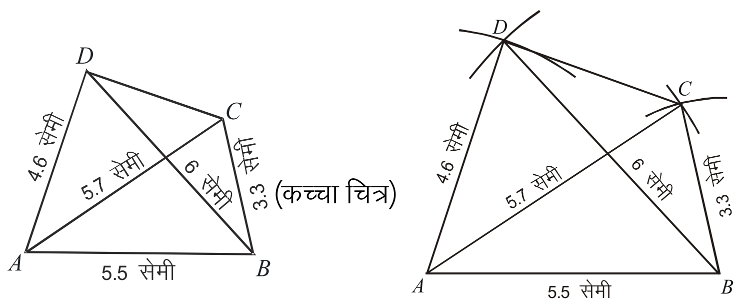
चित्र 9.46

$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.3 चतुर्भुज की रचना करना जब तीन भुजाएँ एवं दो विकर्ण दिये गए हों।

एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 5 \cdot 5$ सेमी, $BC = 3 \cdot 3$ सेमी, $AD = 4 \cdot 6$ सेमी तथा विकर्ण $AC = 5 \cdot 7$ सेमी और विकर्ण $BD = 6$ सेमी।

रचना : दी गई मापों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।



चित्र 9.47

कच्चे चित्र के अनुसार $AB = 5 \cdot 5$ सेमी खींचिए। A और B को केन्द्र मानकर क्रमशः $4 \cdot 6$ सेमी तथा 6 सेमी की त्रिज्या से त्रिभुज ABD बनाइए। इसी प्रकार A और B को केन्द्र मानकर क्रमशः $5 \cdot 7$ सेमी तथा $3 \cdot 3$ सेमी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज ABC बनाइए। C और D को मिलाइए।

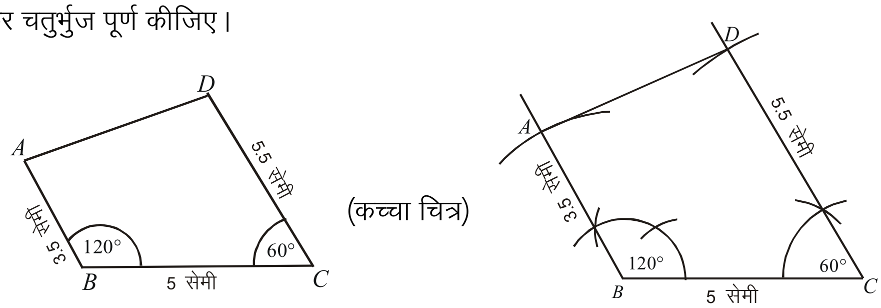
$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.4 चतुर्भुज की रचना करना, जब तीन भुजाएँ और इनके बीच के दो कोण दिए गए हों।

एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 3\cdot 5$ सेमी, $BC = 5$ सेमी, $CD = 5\cdot 5$ सेमी, $\angle B = 120°$ और $\angle C = 60°$ हो।

रचना : दी गई मापों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।

कच्चे चित्रानुसार $BC = 5$ सेमी खींचिए। B व C पर क्रमशः $120°$ तथा $60°$ का कोण बनाकर, उनमें से दी गई मापों के अनुसार क्रमशः$3\cdot 5$ सेमी और $5\cdot 5$ सेमी की दूरी काटिए। A और D को मिलाकर चतुर्भुज पूर्ण कीजिए।



चित्र 9.48

$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.5 चतुर्भुज की रचना करनाए जब दो क्रमागत भुजाएँए उनके बीच का कोण एवं दो अन्य कोण दिए गए हों।

एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 5$ सेमी, $AD = 5\cdot 3$ सेमी, $\angle A = 60°$, $\angle C = 105°$ और $\angle D = 90°$.

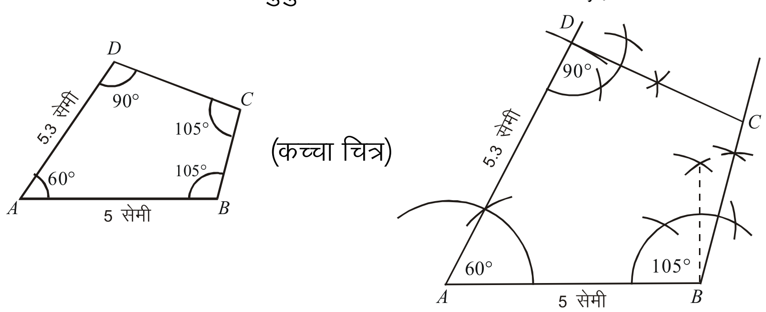
रचना : $\because$ $\quad \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

और $\quad \angle A + \angle C + \angle D = 60° + 105° + 90° = 255°$

$\therefore$ $\quad \angle B = 360° - 255° = 105°$

दिये गए तथ्यों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।

$AB = 5$ सेमी खींचिए, A व B पर क्रमशः $60°$ और $105°$ कोण बनाइए। $AD = 5\cdot 3$ सेमी काटिए, D पर $90°$ का कोण बनाकर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए।



चित्र 9.49

$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

प्रश्नमाला 9.3

दिये गए निम्न तथ्यों से चतुर्भुज की वर्णन सहित रचना कीजिए।

1. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = 3 \cdot 5$ सेमी, $BC = 4 \cdot 8$ सेमी, $CD = 5 \cdot 1$ सेमी, $AD = 4 \cdot 4$ सेमी और एक विकर्ण $AC = 5 \cdot 9$ सेमी।
2. चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = 4$ सेमी, $QR = 3$ सेमी, $QS = 4 \cdot 8$ सेमी, $PS = 3 \cdot 5$ सेमी और $PR = 5$ सेमी।
3. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = 4$ सेमी, $BC = 4 \cdot 5$ सेमी, $CD = 3 \cdot 5$ सेमी, $AD = 3$ सेमी और $\angle A = 60°$ ।
4. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = 3 \cdot 5$ सेमी, $BC = 3$ सेमी, $AD = 2 \cdot 5$ सेमी, $AC = 4 \cdot 5$ सेमी और $BD = 4$ सेमी।
5. चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = 3$ सेमी, $QR = 4$ सेमी, $PS = 4 \cdot 5$ सेमी, $PR = 6$ सेमी और $QS = 5 \cdot 5$ सेमी।
6. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = BC = 3 \cdot 0$ सेमी, $AD = 5$ सेमी, $\angle A = 90°$ और $\angle B = 120°$ ।
7. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = 3 \cdot 8$ सेमी, $BC = 2 \cdot 5$ सेमी, $CD = 4 \cdot 5$ सेमी, और $\angle B = 30°$ तथा $\angle C = 150°$.
8. चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = 3$ सेमी, $QR = 3 \cdot 5$ सेमी, $\angle Q = 90°$ और $\angle P = 105°$, $\angle R = 120°$ ।
9. चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = 2 \cdot 5$ सेमी, $QR = 3 \cdot 7$ सेमी, $\angle Q = 120°$, $\angle S = 60°$ और $\angle R = 90°$ ।

9.11 समान्तर चतुर्भुज और आयत आदि की रचनाएँ

समान्तर चतुर्भुज, आयत, वर्ग, समचतुर्भुज की रचनाओं को करने से पूर्व निम्नलिखित जानकारी प्राप्त कर लेना आवश्यक है।

1. समान्तर चतुर्भुज में :

(i) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

(iii) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(iv) प्रत्येक विकर्ण समान्तर चतुर्भुज को समद्विभाजित करता है।

2. आयत में :

(i) प्रत्येक कोण समकोण होता है।

(ii) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

(iii) विकर्ण परस्पर बराबर होते हैं।

(iv) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

3. वर्ग में :

(i) चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) प्रत्येक कोण समकोण होता है।

(iii) विकर्ण बराबर होते हैं।

(iv) विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

(v) प्रत्येक विकर्ण भुजा के साथ 45° का कोण बनाता है।

4. समचतुर्भुज में :

(i) चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

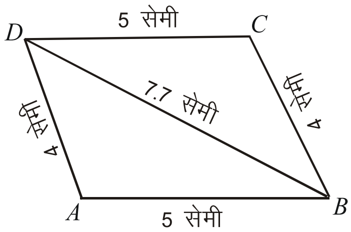
(iii) विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

(iv) विकर्ण शीर्ष कोणों के अर्द्धक होते हैं।

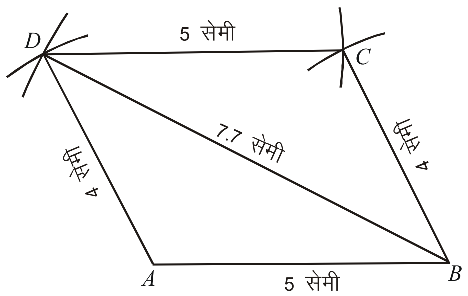
निर्मेय 9.6 समान्तर चतुर्भुज की रचना करना जब दो भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हो।

एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना करना, जिसमें $AB = 5$ सेमी, $BC = 4$ सेमी तथा $BD = 7\cdot 7$ सेमी हैं।

रचना : दिये गए तथ्यों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर निम्न प्रकार समान्तर चतुर्भुज की रचना कीजिए।



(कच्चा चित्र)



चित्र 9.50

$AB = 5$ सेमी की रेखा खींचिए। A तथा B से क्रमशः 4 सेमी व 7·7 सेमी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज ABD की रचना कीजिए। इसी प्रकार B तथा D से क्रमशः 4 सेमी व 5 सेमी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज BCD की रचना कीजिए।

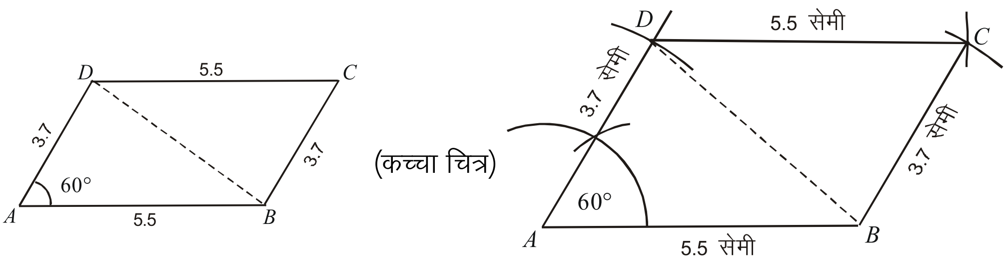
$ABCD$ अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.7 समान्तर चतुर्भुज की रचना करना, जब एक भुजा और दो विकर्ण दिए हों।

एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें भुजा $AB = 5$ सेमी, विकर्ण $AC = 7\cdot 6$ सेमी और विकर्ण $BD = 5\cdot 6$ सेमी।

संकेत : समान्तर चतुर्भुज के गुण के अनुसार, $AO = \frac{1}{2}AC = 3\cdot 8$ सेमी तथा $BO = \frac{1}{2}BD = 2\cdot 8$ सेमी

$AB = 5$ सेमी खींचिए। A तथा B से विकर्ण AC तथा विकर्ण BD के आधे अर्थात् $3 \cdot 8$ सेमी व $2 \cdot 8$ सेमी की त्रिज्या का चाप लगाकर त्रिभुज AOB बनाइए। AO और BO को आगे इस प्रकार बढ़ाइए कि $AC = 7 \cdot 6$ सेमी और $BD = 5 \cdot 6$ सेमी। इस प्रकार चतुर्भुज $ABCD$ प्राप्त कीजिए।



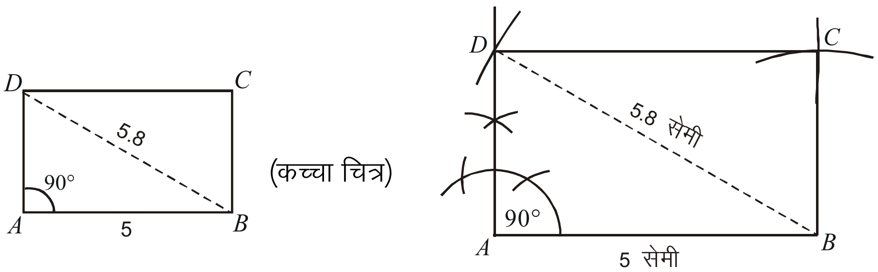
चित्र 9.51

$ABCD$ अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.8 समान्तर चतुर्भुज की रचना करना, जिसमें दो संलग्न भुजाएँ और बीच का कोण दिया हो।

एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 5 \cdot 5$ सेमी, $BC = 3 \cdot 7$ सेमी और $\angle A = 60°$ ।

रचना : $AB = 5 \cdot 5$ सेमी खींचिए। A पर $60°$ का कोण बनाइए तथा $AD = 3 \cdot 7$ सेमी लेकर त्रिभुज ABD बनाइए। इसी प्रकार $BC = 3 \cdot 7$ सेमी और $DC = 5 \cdot 5$ सेमी लेकर त्रिभुज BDC बनाइये।



चित्र 9.52

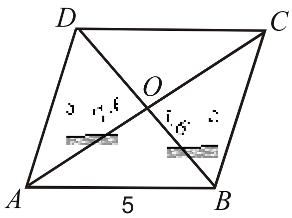
$ABCD$ अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.9 आयत की रचना करना, जिसका विकर्ण और एक भुजा दी है।

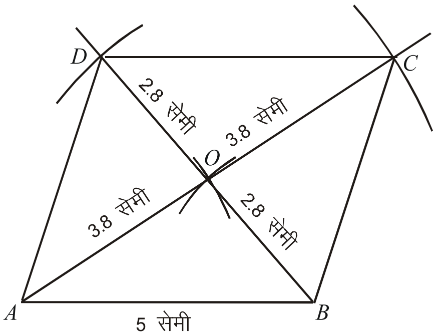
एक आयत $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें विकर्ण $BD = 5 \cdot 8$ सेमी और एक भुजा $AB = 5$ सेमी।

रचना : $AB = 5$ सेमी खींचिए। A बिन्दु पर एक समकोण बनाइए। B को केन्द्र मानकर विकर्ण $BD = 5 \cdot 8$ सेमी त्रिज्या से एक चाप लगाइए, जो समकोण की खड़ी भुजा को D पर काटे।

अब D व B को केन्द्र मानकर क्रमशः AB व AD भुजा के बराबर त्रिज्या लेकर दो चाप घुमाइए, जो एक दूसरे को C पर काटे।



(कच्चा चित्र)



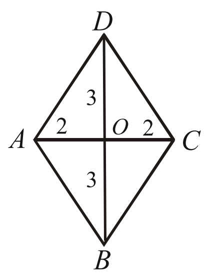
चित्र 9.53

$ABCD$ अभीष्ट आयत है।

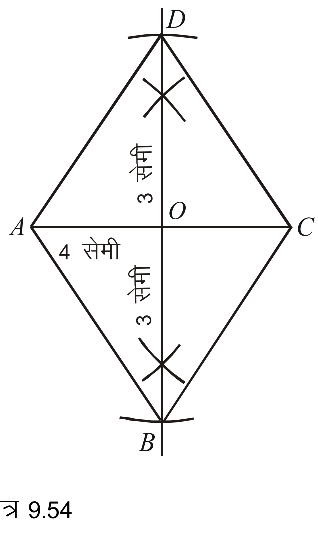
निर्मेय 9.10 समचतुर्भुज की रचना करना, जब उसके दोनों विकर्ण दिए हों।

एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए, जिसके विकर्ण क्रमशः 4 सेमी और 6 सेमी हों।

रचना : विकर्ण $AC = 4$ सेमी खींचिए। AC का लम्ब अर्द्धक खींचिए जो AC को O पर मिलता है। O को केन्द्र मानकर दूसरे विकर्ण $BD = 6$ सेमी के आधे (3 सेमी) की त्रिज्या से दो चाप घुमाइए जो लम्ब अर्द्धक को क्रमशः B व D बिन्दु पर काटे। AB, BC, CD, AD को मिलाइए।



(कच्चा चित्र)



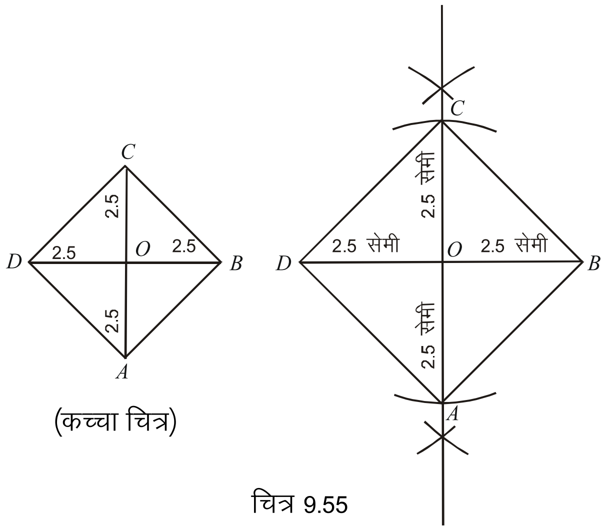
चित्र 9.54

$ABCD$ अभीष्ट समचतुर्भुज है।

निर्मेय 9.11 वर्ग की रचना करना जिसके विकर्ण दिये गये हों।

एक वर्ग की रचना कीजिए जिसका विकर्ण 5 सेमी हो।

रचना : विकर्ण $BD = 5$ सेमी खींचकर, इसका लम्ब अर्द्धक खींचिए जो BD को 0 पर मिले। 0 को केन्द्र मानकर, लम्ब अर्द्धक में से $OC = OA = 2 \cdot 5$ सेमी काटिए, बिन्दुओं A, B, C, D को मिलाइये।



(कच्चा चित्र)

चित्र 9.55

$ABCD$ अभीष्ट वर्ग है।

प्रश्नमाला 9.4

1. एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4 \cdot 7$ सेमी, $BC = 3 \cdot 5$ सेमी तथा $AC = 7$ सेमी ।
2. समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 5$ सेमी तथा विकर्ण $PR = 7 \cdot 6$ सेमी तथा विकर्ण $QS = 5 \cdot 6$ सेमी है।
3. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसकी दो भुजाएँ क्रमशः $4 \cdot 6$ सेमी और 3 सेमी हो तथा उनके बीच का कोण $60°$ हो।
4. एक आयत $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 6$ सेमी और विकर्ण $AC = 10$ सेमी हो।
5. एक समचतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसके विकर्ण $AC = 7$ सेमी और $BD = 5$ सेमी हों।
6. एक वर्ग $ABCD$ की रचना कीजिए जिसका विकर्ण 6 सेमी हो।

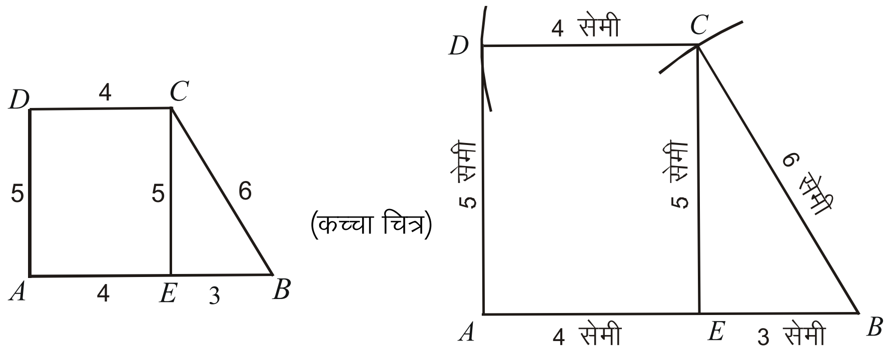
निर्मेय 9.12 समलम्ब चतुर्भुज की रचना करना

(क) जब समलम्ब चतुर्भुज की चार भुजाएँ दी गई हों और यह दिया हो कि कौन–कौन सी भुजाएँ समान्तर हैं।

एक समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें $AB = 7$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, $CD = 4$ सेमी, $DA = 5$ सेमी और $AB \quad CD$ है।

रचना : दिये गए तथ्यों के आधार पर कच्चा चित्र बनाइये तथा उस पर दी गई मापों को अंकित कीजिए।

रेखा AB में से $AE = DC = 4$ सेमी पर E बिन्दु अंकित कीजिए। पक्का चित्र बनाने के लिए, $AB = 7$ सेमी खींचिए, इसमें से $AE = 4$ सेमी काटकर E बिन्दु पर अंकित कीजिए। E व B को केन्द्र मानकर क्रमशः AD (5 सेमी) व BC (6 सेमी) की त्रिज्या से चाप घुमाकर बिन्दु C प्राप्त कीजिए। पुनः A व C को केन्द्र मानकर क्रमशः AD (5 सेमी) व CD (4 सेमी) की त्रिज्या से चाप घुमाकर D बिन्दु प्राप्त कीजिए। बिन्दु B को C से तथा D को A व C से मिलाकर चतुर्भुज पूर्ण कीजिए।



चित्र 9.56

$ABCD$ अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज है।

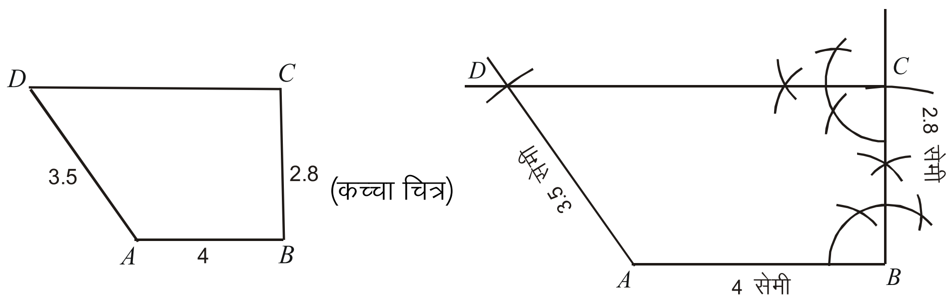
(ख) समलम्ब चतुर्भुज की रचना करना, जबकि तीन भुजाएँ एवं एक कोण दिया हो, तथा यह दिया हो कि कौन–कौनसी भुजाएँ समान्तर है।

एक समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB \quad CD$, $\angle B = 90°$, $AB = 4$ सेमी, $BC = 2\cdot 8$ सेमी, $AD = 3\cdot 5$ सेमी ।

रचना : समलम्ब चतुर्भुज का कच्चा चित्र बनाइये और इसमें दिए गए मापों को अंकित कीजिए।

पक्के चित्र के लिए $AB = 4$ सेमी खींचिए। बिन्दु B पर समकोण बनाकर, खड़ी रेखा में से $2\cdot 8$ सेमी की दूरी काटकर C बिन्दु अंकित कीजिए। बिन्दु C पर भी समकोण बनाइए। ($\because AB \quad CD$ है और $\angle B = 90°$ तो $\angle C = 90°$)

बिन्दु A को केन्द्र मानकर $3\cdot 5$ सेमी की त्रिज्या से, C बिन्दु पर बने समकोण की भुजा में से चित्रानुसार काटकर D बिन्दु अंकित कीजिए। A को D से मिलाकर चतुर्भुज $ABCD$ पूर्ण कीजिए।



चित्र 9.57

$ABCD$ अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज है।

प्रश्नमाला 9.5

1. समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB \parallel CD$, $AB = 4$ सेमी, $BC = 2\cdot3$ सेमी, $CD = 2\cdot8$ सेमी, और $DA = 1\cdot9$ सेमी।
2. समलम्ब चतुर्भुज $PQRS$ की रचना कीजिए, जिसमें $PQ \parallel SR$, $PQ = 6$ सेमी, $RS = 3$ सेमी, $PS = 3$ सेमी, $QR = 5$ सेमी।
3. समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB \parallel CD$, $AB = 8$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, $CD = 4$ सेमी और $\angle B = 75°$.
4. समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB \parallel CD$, $AB = 4$ सेमी, $BC = 4$ सेमी, $AD = 5$ सेमी और $\angle B = 90°$.

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक चतुर्भुज के कोणों का योग $360°$ होता है।

2. एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

3. एक समांतर चतुर्भुज में,

(i) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

(ii) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

(iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

4. कोई चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है, यदि

(i) उसके सम्मुख कोण बराबर हों।

(ii) उसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हों।

(iii) उसके विकर्णपरस्पर समद्विभाजित करें।

(iv) सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर हो और समांतर हो।

5. एक आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं और इसका विलोम भी।

6. एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और इसका विलोम भी।

7. एक वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं और इसका विलोम भी।

8. एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है तथा उसका आधा होता है।

9. एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य–बिन्दु से होकर, दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

10. एक चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दु को, एक ही क्रम में, मिलाने पर प्राप्त चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।

11. चतुर्भुज की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हो।

(ii) चार भुजाएँ और एक कोण दिया हो।

(iii) तीन भुजाएँ और दो विकर्ण दिये हों।

(iv) तीन भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हो।

(v) दो क्रमागत भुजाएँ उनके मध्य का कोण और दो अन्य कोण दिये हो ।

12. समान्तर चतुर्भुज की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) दो संलग्न भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हो।

(ii) एक भुजा और दो विकर्ण दिए हों।

(iii) दो संलग्न भुजाएँ और बीच का कोण दिया हो।

13. आयत की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) दो संलग्न भुजाएँ दी गई हों।

(ii) एक भुजा और विकर्ण दिया हो।

14. वर्ग की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) एक भुजा दी गई हो।

(ii) विकर्ण दिया गया हो।

15. समचतुर्भुज की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) भुजा की माप और दो संलग्न भुजाओं के मध्य का कोण।

(ii) विकर्ण दिए हों।

16. समलम्ब चतुर्भुज की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) चार भुजाएँ दी गई हों और समान्तर भुजाओं को बताया गया हो।

(ii) तीन भुजाएँ व एक कोण दिया हो तथा समान्तर भुजाओं को बताया गया हो।

17. समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान्तर एवं समान होती है तथा सम्मुख कोण समान होते है।

18. वर्ग की चारों भुजाएँ समान एवं प्रत्येक कोण समकोण होता है वर्ग के विकर्ण समान व एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

19. आयत की सम्मुख भुजाएँ समान व प्रत्येक कोण समकोण हेाता है

20. समचतुर्भुज में चारों भुजाएँ समान व सम्मुख कोण बराबर होते हैं। विकर्ण एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

21. समलम्ब चतुर्भुज में भुजाओं का केवल एक युग्म समान्तर होता है।

विविध प्रश्नमाला 9

निम्नलिखित में से (प्रश्न 1 से 15 तक) प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए'–

1. एक चतुर्भुज के तीन कोण 75°, 90° और 75° है। इसका चौथा कोण है

(A) 90° (B) 95°

(C) 105° (D) 120° ( )

2. एक आयत का एक विकर्ण उसकी एक भुजा से 25° पर नत है। इसके विकर्णों के बीच का न्यून कोण है

(A) 55° (B) 50°

(C) 40° (D) 25° ( )

3. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसमें $\angle ACB = 40^\circ$ है। तब $\angle ADB$ है

(A) 40° (B) 45°

(C) 50° (D) 60° ( )

4. चतुर्भुज PQRS की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर बना चतुर्भुज एक आयत होता है, यदि

(A) PQRS एक आयत है (B) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है

(C) PQRS के विकर्ण परस्पर लंब हों (D) PQRS के विकर्ण बराबर हों ( )

5. चतुर्भुज PQRS की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में मिलाने पर बना चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है, यदि

(A) PQRS एक समचतुर्भुज है (B) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है

(C) PQRS के विकर्ण परस्पर लंब हों (D) PQRS के विकर्ण बराबर हों ( )

6. यदि चतुर्भुज ABCD के कोणों A, B, C और D का, इसी क्रम में लेने पर, अनुपात 3 : 7 : 6 : 4 है हो तो ABCD है एक

(A) समचतुर्भुज (B) समांतर चतुर्भुज

(C) समलंब (D) पंतग ( )

7. यदि चतुर्भुज ABCD के $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक परस्पर P पर प्रतिच्छेद करते हैं, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक Q पर, $\angle C$ और $\angle D$ के R तथा $\angle D$ और $\angle A$ के S पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो PQRS है एक

(A) आयत (B) समचतुर्भुज

(C) समांतर चतुर्भुज (D) चतुर्भुज जिसके सम्मुख कोण संपूरक है( )

8. यदि APB और CQD दो समांतर रेखाएँ हैं, तो कोणों APQ, BPQ, CQP और PQD के समद्विभाजक बनाते हैं।

(A) एक वर्ग (B) एक समचतुर्भुज

(C) एक आयत (D) कोई अन्य समांतर चतुर्भुज ( )

9. एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर बनने वाली आकृति होती है

(A) एक समचतुर्भुज (B) एक आयत

(C) एक वर्ग (D) कोई भी समांतर चतुर्भुज ( )

10. D और E क्रमशः ΔABC की भुजा AB और AC के मध्य–बिन्दु है तथा O भुजा BC पर कोई बिन्दु है। O को A से मिलाया जाता है। यदि P और Q क्रमशः OB और OC के मध्य–बिन्दु है, तो DEQP एक

(A) वर्ग (B) आयत

(C) समचतुर्भुज (D) समांतर चतुर्भुज ( )

11. एक चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर प्राप्त आकृति केवल एक वर्ग है, यदि

(A) ABCD एक समचतुर्भुज है

(B) ABCD के विकर्ण बराबर हैं

(C) ABCD के विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लंब है

(D) ABCD के विकर्ण परस्पर लंब हैं ( )

12. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DAC = 32^o$ और $\angle AOB = 70^o$ है तो $\angle DBC$ है

(A) 24^o (B) 86^o

(C) 38^o (D) 32^o ( )

13. एक समांतर चतुर्भुज के लिए, निम्नलिखित में से कौन–सा कथन सत्य नहीं है?

(A) सम्मुख भुजाएँ

(B) सम्मुख कोण बराबर होते हैं

(C) सम्मुख कोण विकर्णों से समद्विभाजित होते है

(D) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ( )

14. D और E क्रमशः ΔABC की भुजा AB और AC के मध्य–बिन्दु हैं। DE को F तक बढ़ाया जाता है। यह सिद्ध करने के लिए कि CF रेखाखंड DA के बराबर और समांतर हैं, हमें एक अतिरिक्त सूचना की आवश्यकता है, जो है

(A) $\angle DAE = \angle EFC$ (B) $AE = EF$

(C) $DE = EF$ (D) $\angle ADE = \angle ECF$ ( )

15. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle BOC = 90^o$ और $\angle BDC = 50^o$ है, तो $\angle OAB$ है

(A) 90^o (B) 50^o

(C) 40^o (D) 10^o ( )

16. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। यदि इसके विकर्ण बराबर हैं, तो $\angle ABC$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बराबर और लंब होते हैं। क्या यह कथन सत्य है। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

18. एक चतुर्भुज ABCD के तीन कोण बराबर हैं। क्या यह एक समांतर चतुर्भुज है?

19. चतुर्भुज ABCD में, $\angle A + \angle D = 180^\circ$ है। इस चतुर्भुज को कौन–सा विशेष नाम दिया जा सकता है?

20. एक चतुर्भुज के सभी कोण बराबर हैं। इस चतुर्भुज को कौन–सा विशेष नाम दिया गया है?

21. एक आयत के विकर्ण परस्पर बराबर और लंब हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

22. कोई वर्ग एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के अंतर्गत इस प्रकार है कि वर्ग और त्रिभुज में एक कोण उभयनिष्ठ है। दर्शाइए कि वर्ग का शीर्ष जो उभयनिष्ठ कोण के शीर्ष के सम्मुख है कर्ण को समद्विभाजित करता है।

23. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में, AB = 10 cm और AD = 6 cm है। $\angle A$ का समद्विभाजक DC से E पर मिलता है तथा AE और BC बढ़ाने पर F पर मिलते हैं। CF की लंबाई ज्ञात कीजिए।

24. P, Q, R और S एक चतुर्भुज ABCD की क्रमशः AB, BC, CD और DA भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं, जिसमें AC = BD और $AC \perp BD$ है। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक वर्ग है।

25. एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसके एक कोण की समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि यह समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है।

26. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें $AB \parallel DC$ और AD = BC है। सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$ और $\angle C = \angle D$ है।

27. E एक ΔABC की माध्यिका AD का मध्य–बिन्दु है तथा BE को AC को F पर मिलने के लिए बढ़ाया गया है। दर्शाइए कि $AF = \frac{1}{3}AC$ है।

28. दर्शाइए कि किसी वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने पर बना चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।

29. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजकों द्वारा बना चतुर्भुज एक आयत होता है।

30. P और Q क्रमशः एक समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख AD और BC भुजाओं पर स्थित बिन्दु इस प्रकार हैं कि PQ विकर्ण AC और BD के प्रतिच्छेद बिन्दु O से होकर जाता है। सिद्ध कीजिए कि PQ बिन्दु O पर समद्विभाजित हो जाता है।

31. ABCD एक आयत है, जिसका विकर्ण BD कोण $\angle B$ को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि ABCD एक वर्ग है।

32. D, E और F क्रमशः एक त्रिभुज ABC की AB, BC और CA भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए D, E और F बिन्दुओं को मिलाने से त्रिभुज ABC चार सर्वांगसम त्रिभुजों में बँट जाता है।

33. सिद्ध कीजिए कि किसी समलंब के विकर्णों के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उस समलंब की समांतर भुजाओं के समांतर होती है।

34. P एक समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा CD का मध्य–बिन्दु है। C से होकर PA के समांतर खींची गई रेखा AB को Q पर तथा बढ़ाई हुई DA को R पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि DA = AR और CQ = QR है।

35. चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 3\cdot7$ सेमी, $BC = 3$ सेमी, $CD = 5$ सेमी, $AD = 4$ सेमी और $\angle A = 90°$ ।

36. चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = AD = 3\cdot2$ सेमी, $BC = 2\cdot5$ सेमी, $AC = 4$ सेमी और $BD = 5$ सेमी।

37. चतुर्भुज $PQRS$ की रचना कीजिए जिसमें $PQ = 3\cdot5$ सेमी, $QR = 3\cdot5$ सेमी, $\angle P - 60°$, $\angle Q = 105°$, $\angle S = 75°$.

38. समचतुर्भुज की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा $3\cdot6$ सेमी और एक कोण $60°$ है।

39. वर्ग की रचना कीजिए जिसमें $AB + BC + CD + DA = 12\cdot8$ सेमी।

40. एक समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें $AB \quad CD$, $AB = 5$ सेमी, $BC = 3$ सेमी, $AD = 3\cdot3$ सेमी और समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी $2\cdot5$ सेमी हो।

41. एक समचतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 6$ सेमी और $\angle A = 120°$.

42. एक समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें $AB = 2\cdot3$ सेमी, $BC = 3\cdot4$ सेमी, $CD = 5\cdot4$ सेमी, $DA = 3\cdot7$ सेमी और $AB \quad CD$.

43. समचतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसके विकर्ण $5\cdot6$ सेमी और $7\cdot2$ सेमी हों।

44. आयत $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4\cdot5$ सेमी और $BD = 6$ सेमी हो।

❑

उतरमाला

प्रश्नमाला 9.1

1. 36°, 60°, 108°, 156°
2. AC = 6 सेमी, BD = 4 सेमी
3. नहीं, समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समद्विभाजन होते है।
4. नहीं, कोणों का योग 360° होना चाहिए
5. नहीं, सभी कोणों का योग 360° से अधिक हो जाएगा जो चतुर्भुज के लिए सम्भव थी
6. 84°
7. प्रत्येक 135°
8. 120°, 60°, 120°, 60°

प्रश्नमाला 9.2

1. 55°
2. नहीं, सभी कोणों का योग 360° से कम हो जाएगा।
3. हाँ, तो वह आयत या वर्ग होगा
4. 145°
5. 4 सेमी
6. 60, 120, 60, 120
13. (i) 6.9 सेमी (ii) 9.9 सेमी

विविध प्रश्नमाला 9

1. D	**2.** B	**3.** C	**4.** D
5. C	**6.**	**7.** D	**8.** C
9. B	**10.** D	**11.** C	**12.** C
13. C	**14.** C	**15.** C	

16. 90°; यह चतुर्भुज एक आयत है
17. यह कथन असत्य है, क्योंकि समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते है, परन्तु बराबर नहीं होते हैं।
18. इसका समान्तर होना आवश्यक नहीं
19. समान्तर चतुर्भुज
20. आयत या वर्ग
21. नहीं, आयत के विकर्ण बराबर तो है परन्तु परस्पर लम्ब नहीं है
23. 4 सेमी