10

बिन्दु पथ
(Locus)

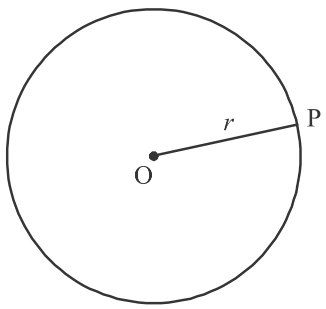
10.01 प्रस्तावना (Introduction)

आपने कभी अपने चारों ओर कुछ अनोखे दृश्य अवश्य देखे होंगे। क्या आपको आकाश में अनायस ही कभी कुछ पक्षी एक विशेष आकृति बना कर उड़ते दिखाई दिए हैं? अथवा चीटियों का कोई समूह दीवार पर या अन्य सतह पर किसी निश्चितआकृति से विचरण करते हुए भी अवश्य देखा होगा। इन जीवों के विचरण में प्रत्येक एक दूसरे से उस आकृति के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध जो उनके स्वभाव में हैं का पालन करते हैं। यदि दोनों घटनाओं के अन्तर्गत आने वाले प्रत्येक जीव को एक बिन्दु मान लें तो उनके द्वारा बनाई गई आकृति आवश्यक प्रतिबन्ध का पालन करने वाले बिन्दुओं का एक समुच्चय है। वास्तव में ज्यामितीय आकृतियों में ऐसे वांछनीय प्रतिबंध युक्त बिन्दुओं के समुच्चय ही कुछ विशेष आकृति उभारते हैं, अर्थात् शून्य में नीहित समस्त बिन्दुओं में से किसी आकृति केलिए उन सभी आवश्यक बिन्दुओं का समुच्चय ही बिन्दु पथ है।

10.02 परिभाषा

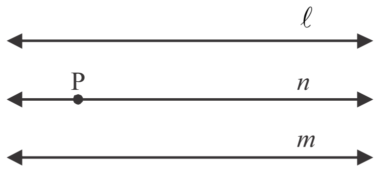
बिन्दु पथ बिन्दुओं का एक विशिष्ट समुच्चय होता है जो किन्ही प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं। इसे समझने के लिए हम कुछ उदाहरण लेते हैं:

(*a*) मान लीजिए कि किसी तल में O एक बिन्दु है तथा r धनात्मक वास्तविक संख्या है। तल के उन बिंन्दुओं से जो'O' से r दूरी पर है, एक बिन्दु पथ बनता है। यह एक वृत्त है जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या r है। देखिए आकृति 10.01 में



आकृति 10.01

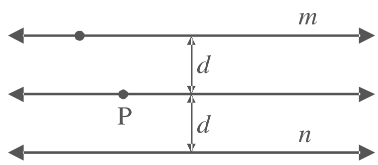
(*b*) दो समान्तर रेखाएँ ℓ और m लीजिए। उन सभी बिन्दुओं पर विचार कीजिए जो ℓ और m से समान दूरी पर हैं। उन बिन्दुओं से रेखा n बनती है जो ℓ और m के समान्तर है तथा उनसे समान दूरी पर है। देखिए आकृति 10.02



आकृति 10.02

(*c*) अब मान लीजिए कि एक रेखा ℓ तथा एक धनात्मक वास्तविक संख्या d है। उन सभी बिन्दुओं पर विचार कीजिए जो ℓ से d दूरी पर स्थित हैं। यहाँ हमें ℓ के समांतर व इससे d दूरी पर दो रेखाएँ m और n प्राप्त होती हैं। आकृति 10.03

यह ध्यान देने योग्य है कि उपयुक्त तीनों स्थितियों में बिन्दु, विशेष प्रतिबंधों का पालन करते है। अलग–अलग प्रतिबंधों से अलग–अलग बिन्दु पथ प्राप्त होते हैं।



आकृति 10.3

अतः बिन्दुओं का बिन्दु पथ उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय होता है, जो दी हुई एक या अधिक प्रतिबंधों का पालन करे। ध्यान रहे कि इस परिभाषा में दो पूरक विचार शामिल हैं।

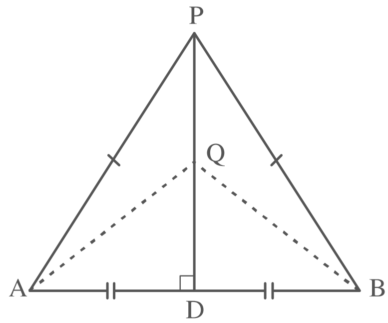
(i) जो बिन्दु दी हुई शर्तों (प्रतिबंधों) का पालन करता है वह बिन्दु पथ का बिन्दु होता है।

(ii) बिन्दु पथ के प्रत्येक बिन्दु को दिए गए प्रतिबंधों का पालन करना अनिवार्य होता है।

इस प्रकार बिन्दु पथ व उसे निर्धारित करने वाले प्रतिबंध एक ही समझे जा सकते है। एक का वर्णन होने से दूसरे का भी बोध होता है। आइए अब हम दो महत्वपूर्ण बिन्दु पथों का अध्ययन करते हैं, जिनकी उपयोगिता अन्य प्रमेयों व ज्यामितीय रचनाओं में होगी।

10.03 दो दिए हुए बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ (Locus of points equidistant from two given points)

मान लीजिए कि A और B दो दिए हुए बिन्दु हैं। P बिन्दु के बिन्दु पथ पर विचार करें जो प्रतिबंध AP = BP को संतुष्ट करता है।



आकृति 10.04

यदि AB का मध्य बिन्दु D है, तो AD=BD, इसलिए D भी बिन्दु पथ पर स्थित है। मान लें कि D के अतिरिक्त P अन्य ऐसा बिन्दु है कि AP=BP, हम देखते हैं कि यदि PD को मिलाया जाए तो AP और BP क्रमशः दो त्रिभुजों ADP और BDP की भुजाएँ बन जाती है। इन त्रिभुजों के संबंध में हम क्या कह सकते हैं? हम देखते हैं कि इनमें सर्वांगसमता की भुजा–भुजा–भुजा प्रमेय का पालन होता है।

अतः $\Delta ADP \cong \Delta BDP$ जिसमें $\angle ADP = \angle BDP$ यह सरलतापूर्वक सिद्ध किया जा सकता है कि $\angle ADP = 90^\circ$ या $PD \perp AB$ अतः AB का लंब अर्द्धक PD हुआ। PD को सरल रेखा कह सकते हैं। चूंकि A और B से P समदूरस्थ है। इसी प्रकार PD पर कोई अन्य बिन्दु Q ले तो Q भी A व B से समदूरस्त सिद्ध होगा अर्थात् PD पर स्थित सभी बिन्दु A व B से समदूरस्थ रहेंगें।

अतः उपर्युक्त विवेचन के आधार पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय–10.1: दिए हुए दो बिन्दुओं से समदूरस्थ किसी बिन्दु का बिन्दु पथ उन्हें मिलाने वाले रेखाखंड का लम्बसमद्विभाजक होता है।

(प्रमेय 10.1 का विलोम) दो दिए गए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के समद्विभाजाक पर स्थित बिन्दु दिए गए बिन्दुओं से समदूरस्थ होते हैं।

उदाहरण-10. एक ही आधार BC पर तीन समद्विबाहु त्रिभुज $\Delta PBC, \Delta QBC$ और ΔRBC स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि P, Q और R समरेख है।

हल: दिया हुआ है: $\Delta PBC, \Delta QBC$ तथा ΔRBC इस प्रकार है कि PB = PC, QB = QC, RB = RC सिद्ध करना है : P, Q, R समरेख हैं।

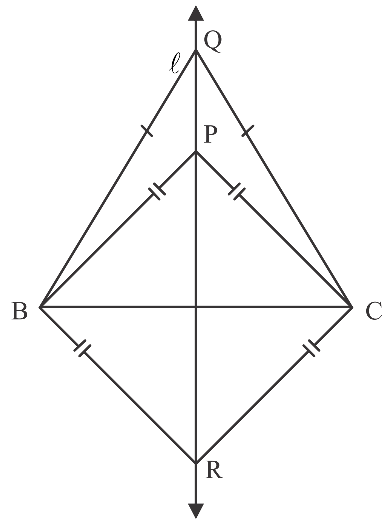
उपपत्ति: ΔPBC समद्विबाहु है

दिया हुआ है: PB=PC, B और C से समदूरस्थ बिन्दु पथ BC का लंब अर्द्धक होगा, मान लीजिए यह है।

P बिन्दु ℓ पर स्थित है। . . . (1)

इसी प्रकार Q और R, ℓ पर स्थित हैं . . . (2)

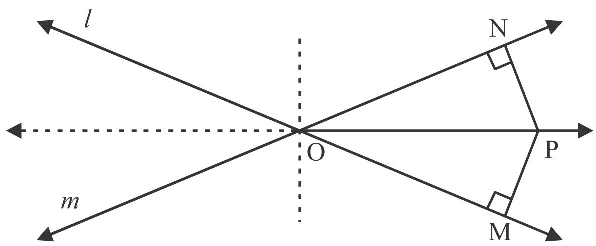
(1) व (2) से P, Q व R समरेख है।



आकृति 10.05

10.04 दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ (Locus of points equidistant from two intersecting lines)

मान लीजिए दो रेखाएं ℓ और m एक दुसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। और ℓ और m से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ हमें ज्ञात करना है। यदि कोई बिन्दु P जो ℓ व m पर नहीं है, तब इसकी ℓ व m से दूरी P से ℓ व m पर डाले गए लम्ब की लम्बाई होगी। दूसरी ओर यदि P बिन्दु ℓ व m दोनों पर ही है तो P की ℓ व m से दूरी शून्य होगी।



आकृति 10.06

यदि $d = 0$ तब बिन्दु P, ℓ और m दोनों पर होगा अर्थात् बिन्दु P, O के सम्पाती होगा। इस प्रकार बिन्दु O बिन्दु पथ पर होगा।

यदि $d = 0$ तो P न तो ℓ पर और न ही m पर स्थित होगा। अतः ℓ और m से निर्मित चार कोणों में से एक के अंतः भाग में स्थित होगा।

यदि $PM \perp \ell$ तथा $PN \perp m$, तब $PM = PN = d$ (दिए गए प्रतिबन्धानुसार)

ΔOPM और ΔOPN में

$\angle M = \angle N$ (प्रत्येक 90°)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$PM = PN (PM = PN = d)$

$\therefore$ $\Delta OPM \cong \Delta OPN$ (समकोण–कर्ण–भुजा)

$\therefore$ $\angle POM = \angle PON$

इससे स्पष्ट है कि $P, \angle MON$ के अंत भाग में स्थित है तथा $OP, \angle MON$ की अर्द्धक है अथवा $\angle MON$ के अर्द्धक पर P स्थित है। इसी प्रकार P अन्य तीन कोणों के अर्द्धकों पर भी स्थित हो सकता है। इन चारों कोणों के अद्धकों से दो रेखाएँ बनती हैं। मान लीजिए ये p और q हैं। तब P बिन्दु p और q पर स्थित बिन्दुओं के समुच्चय का सदस्य होगा। हम कह सकते हैं कि रेखाएँ p और q बिन्दु P का बिन्दु पथ है।

अतः उपर्युक्त विवेचन के आधार पर हमे निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय–10.2: दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से सम दूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ, उन रेखाओं से बने कोणों की समद्विभाजकों का युग्म होता है।

उदाहरण-2. चतुर्भुज ABCD के $\angle B$ एवं $\angle C$ के अर्द्धक परस्पर बिन्दु P बिन्दु पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P सम्मुख भुजाओं AB और CD से समदूरस्थ है।

हल: दिया हुआ है: चतुर्भुज ABCD जिसमें $\angle B$ व $\angle C$ के अर्द्धक P पर मिलते है, साथ ही $PM \perp AB$ तथा $PN \perp CD$

सिद्ध करना है : PM=PN

रचना: $PL \perp BC$ खींचा

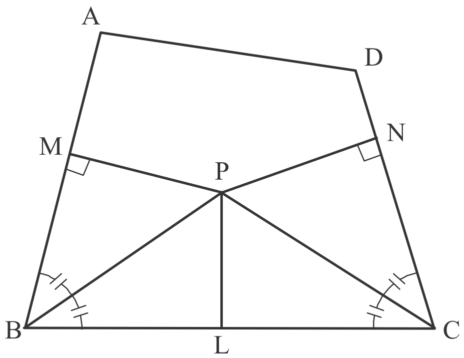
उपपत्ति: $\angle B$ के अर्द्धक पर बिन्दु P स्थित है। (दिया हुआ है)

$\therefore$ $PM = PL$ ...(1)

$\because$ $\angle C$ के अर्द्धक पर भी बिन्दु P स्थित है (दिया हुआ है)

$\therefore$ $PL = PN$ ...(2)

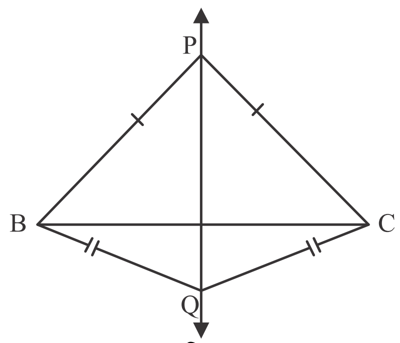
(1) व (2) से PM=PN इति सिद्धम्



आकृति 10.07

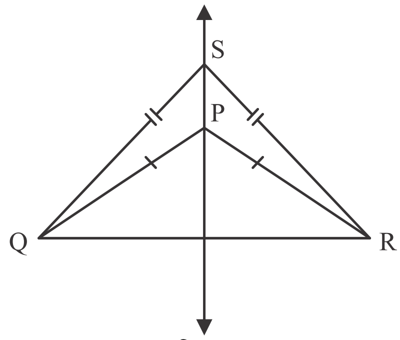
प्रश्नमाला 10.1

1. निम्नलिखित कथनों में से सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।
   (i) किसी रेखा से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का समुच्चय एक रेखा होती है।
   (ii) एक वृत्त उन बिन्दुओं का बिन्दु पथ है जो किसी दिए गए बिन्दु से नीयत दूरी पर स्थित है।
   (iii) तीन दिए गए बिन्दु संरेख तभी होंगें जब वह एक रेखा के बिन्दुओं के समुच्चय के अवयव नहीं हो।
   (vi) दो रेखाओं से समदुरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ दोनों रेखाओं के समान्तर रेखा होगी।
   (v) दो दिए गए बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का लम्ब अर्द्धक होता है।
2. एक चतुर्भुज के विकर्ण एक–दूसरे को सम द्विभाजित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि यह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है।
3. तीन असमरेख बिन्दुओं A, B और C के सम दूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ क्या होगा? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट कीजिए।
4. तीन समरेख बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ क्या होगा? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट कीजिए।
5. सिद्ध कीजिए कि A और B बिन्दुओं से होकर जाने वाले वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दु पथ रेखाखंड AB का लंबअर्द्धक है।
6. दिए गए आकृति 10.08 में उभयनिष्ठ आधार BC पर रेखा BC के विपरीत ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज ΔPBC और ΔQBC स्थित है। सिद्ध कीजिए कि P और Q को मिलाने वाली रेखा BC को समकोण पर समद्विभाजित करती है।



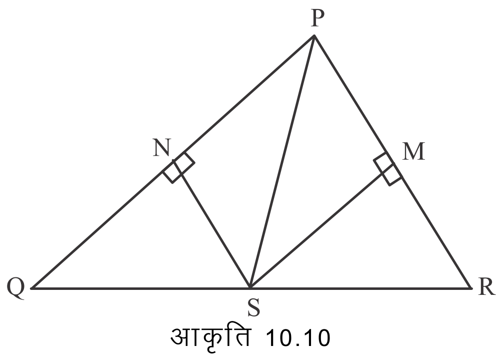
आकृति 10.8

7. दिए गए आकृति 10.09 में उभयनिष्ट आधार QR पर एक ही ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज PQR और SQR स्थित हैं। सिद्ध कीजिए की SP रेखा QR की लम्ब अर्द्धक है।



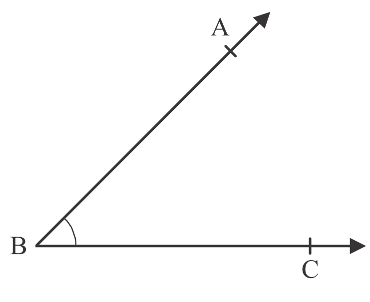
आकृति 10.09

8. दिए गए आकृति 10.10 में $\angle P$ का अर्द्धक PS, भुजा QR को S बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है। $SN \perp PQ$ एवं $SM \perp PR$ खींचे गए हैं। सिद्ध कीजिए कि $SN = SM$



आकृति 10.10

9. दिए गए आकृति 10.11 में $\angle ABC$ दिया गया है। BA और BC से समदूरस्थ तथा $\angle ABC$ के अंत भाग में किसी बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.11

10.05 संगामी रेखाएँ

पिछली कक्षाओं में आपने त्रिभुज से सम्बन्धित कुछ जानकारियाँ प्राप्त की हैं जिनका इस अनुच्छेद में उपयोग होगा। इनका यहाँ पुनः स्मरण करना अनिवार्य है।

1. माध्यिका **(Median)** : त्रिभुज के किसी शीर्ष को सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाले रेखाखण्ड को त्रिभुज की मध्यिका कहते हैं।
2. भुजाओं के लम्ब अर्द्धक या लम्ब समाद्विभाजक **(Perpendicular bisectors)** : त्रिभुज की किसी भुजा के मध्य बिन्दु पर खींचा गया लम्ब, भुजा का लम्ब अर्द्धक कहलाता है।
3. कोणों के समद्विभाजक **(Angle bisector)** : त्रिभुज के किसी कोण के समान दो भाग करने वाले रेखा खण्ड को त्रिभुज के कोण समद्विभाजक कहते हैं।
4. शीर्षलम्ब **(Altitude)** : वह रेखाखण्ड जो त्रिभुज के किसी एक शीर्ष से सम्मुख भुजा पर लम्ब डालने से प्राप्त हो को त्रिभुज का एक शीर्षलम्ब कहते हैं।
5. संगामी रेखाएं **(Concurrent lines)** : तीन या तीन से अधिक रेखाएँ यदि एक ही बिन्दु से होकर गुजरें तो वे संगामी रेखाएँ कहलाती हैं। इस स्थिति में उनका उभयनिष्ठ बिन्दु रेखाओं का संगमन अथवा संगामी बिन्दु (Point of Concurrency) कहलाता है।

आइए अब उपर्युक्त रेखाखण्डों के संगामी बिन्दुओं पर विचार करते हैं– जिनसे कुछ निश्चित परिणाम प्राप्त होते हैं। जिन्हें निम्न प्रमेयों के माध्यम से सिद्ध किया जा सकता है। ये परिणाम निश्चित ही ज्यामिति अध्ययन में उपयोगी रहते हैं।

प्रमेय–10.3 त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब–समद्विभाजक संगामी होते है।

दिया है: ΔABC में भुजा AB एवं AC के लम्ब–समद्विभाजक बिन्दु O पर मिलते है और OD भुजा BC पर लम्ब है।

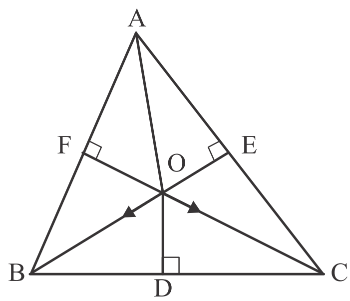
सिद्ध करना है: OD, भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है।

रचना: OA, OB और OC को मिलाया।

उपपत्ति: OE एवं OF क्रमशः AC एवं AB के लम्ब–समद्विभाजक हैं।, अतः OA=OB=OC (प्रमेय 10.1 के विलोम से)

$\because$ OD, भुजा BC पर लम्बवत है और OB=OC अतः प्रमेय 10.1 से
OD, भूजा BC का लम्ब–समद्विभाजक है।

परिकेन्द्रः त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों का संगमन बिन्दु त्रिभुज का परिकेन्द्र (Circumcentre) कहलाता है।



आकृति 10.12

प्रमेय–10.4 त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं।

दिया है: ΔABC में $\angle B$ एवं $\angle C$ के समद्विभाजक बिन्दु O पर मिलते हैं।

सिद्ध करना है: OA, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

रचनाः आकृति 10.13 में, O से लम्ब OD, OE और OF खींचे।

उपपत्ति: OB एवं OC क्रमशः $\angle B$ एवं $\angle C$ के समद्विभाजक हैं।

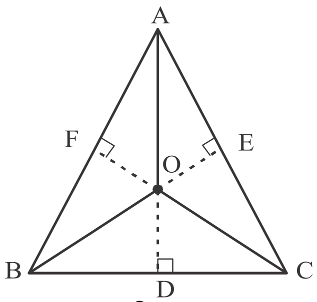
अतः OD = OF . . . (1) (प्रमेय 10.2 से)

और OD = OE . . . (2)

(1) और (2) से OE=OF अतः O, AB और AC से समान दूरी पर स्थित है अर्थात् OA, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

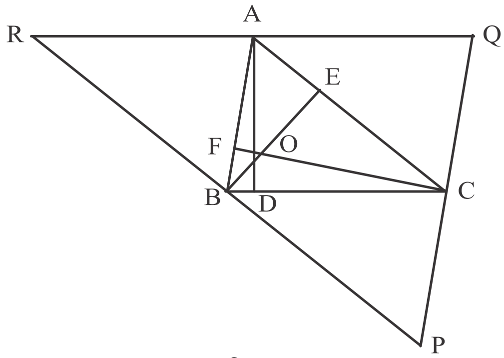
"इतिसिद्धम्"

अन्तः केन्द्रः त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजकों के सगमन् बिन्दु को त्रिभुज का अन्तः केन्द्र कहते हैं।



आकृति 10.13

प्रमेय–10.5 त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्ब संगामी होते हैं।



आकृति 10.14

दिया हुआ है: ΔABC के AD व CF और BE शीर्ष लम्ब हैं।

सिद्ध करना है: AD, CF एवं BE एक बिन्दु से होकर जाते हैं।

रचना: आकृति 10.14 के अनुसार त्रिभुज ABC के प्रत्येक शीर्ष से गुजरती हुई उनकी सम्मुख भुजाओं के समान्तर रेखाएँ खींच कर एक ΔPQR बनाया

उपपत्ति: चतुर्भुज BCAR में $AC \parallel RB$ (रचना से) और $BC \parallel RA$ (रचना से)

अतः चतुर्भुज BCAR एक समानतर चतुर्भुज है।

$\therefore \quad RA = BC$ ...(1)

इसी प्रकार ABCQ भी एक समान्तर चतुभुज है।

$\therefore \quad AQ = BC$ ...(2)

(1) और (2) से $AR = AQ$ ...(3)

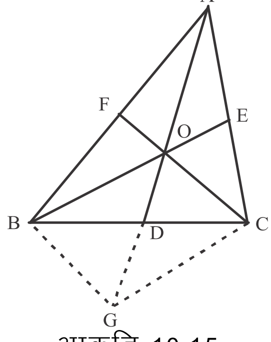
एवं $AD \perp BC$ और $BC \parallel QR$ अतः $AD \perp QR$ ...(4)

(3) और (4) से AD भुजा QR का लम्ब अर्द्धक हुआ इसी प्राकर BE, भुजा PR का एवं CF भुजा PQ के लम्ब अर्द्धक होंगे।

चूकि त्रिभुज के लम्ब अर्द्धक परस्पर संगामी होते हैं। अतः AD, CF एवं BE एक बिन्दु से होकर जाते हैं। इति सिद्धम्

लम्ब केन्द्र–त्रिभुज के शीर्ष लम्बों के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र (Orthocentre) कहते हैं।

प्रमेय–10.6 त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से गुजरती हैं और यह बिन्दु प्रत्येक माध्यिका को 2:1 में विभाजित करता है।



आकृति 10.15

दिया हुआ है: BE और CF, ΔABC की माध्यिकाएँ O पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है: (i) A को O से मिलाते हुए आगे बढ़ाने पर प्राप्त रेखा खण्ड AD भी एक माध्यिका ही है अर्थात् BD = DC

(ii) AO : OD = BO : OE = CO : OF = 2 : 1

रचना: AD को G तक इतना बढ़ाया कि AO = OG हो जाए। BG व CG को मिलाया।

उप्पत्ति: हम जानते है कि त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर एवं उसकी आधी होती है।

$\therefore$ ΔABG में F, AB का मध्य बिन्दु दिया हुआ हैं एवं O, AG का मध्य बिन्दु है (रचना द्वारा)

अतः $OF \parallel BG$ तथा $CO \parallel BG$ (चूंकि CO एवं OF, CF के ही भाग हैं) . . . (1)

एवं $OF = \frac{1}{2} BG$ . . . (2)

इसी प्रकार ΔACG में E व O क्रमशः AC व AG के मध्य बिन्दु हैं

अतः $OE \parallel GC$ तथा $BO \parallel GC$ (BO एवं OE, BE के ही भाग है) . . . (3)

एवं $OE = \frac{1}{2} GC$ . . . (4)

(1) व (3) से BOCG एक समान्तर चतुर्भज है।

चूंकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजन करते हैं।

अतः BD=DC

अर्थात् शीर्ष A से खींची गई रेखा AD भी ΔABC की माध्यिका है (एक भाग सिद्ध हुआ)

(ii) चूंकि D समान्तर चतुर्भुत BOCG के विकर्णों का प्रतिच्छेदी बिन्दु है, अतः

$OD = DG$ . . . (5)

$OD = \frac{1}{2} OG$ . . . (6)

तथा AO = OG (रचना से).

(5) और (6) से

$$OD = \frac{1}{2} AO$$

या $\frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$

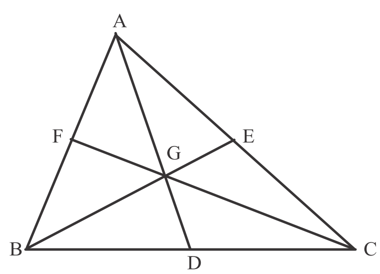
या AO : OD = 2 : 1

इसी प्रकार BO : OE = 2 : 1 तथा CO : OF = 2 : 1

अर्थात् AO : OD = BO : OE = CO : OF = 2 : 1 इतिसिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक ΔABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF एक बिन्दु G से गुजरती हैं। यदि AG = 6 सेमी, BE = 12.6 सेमी और FG = 3 सेमी हो, तो AD, GE और GC ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.16

हल: हम जानते हैं कि केन्द्रक G त्रिभुज की माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अतः $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ या $\frac{GD}{AG} = \frac{1}{2}$ दोनों ओर 1 जोडने पर

$\frac{GD}{AG} + 1 = \frac{1}{2} + 1$ या $\frac{GD + AG}{AG} = \frac{1+2}{2}$

या $\frac{AD}{AG} = \frac{3}{2}$ या $\frac{AD}{6} = \frac{3}{2}$

या $AD = \frac{3}{2} \times 6$ या $AD = 9$ सेमी

इसी प्रकार $\frac{BG}{GE} = \frac{2}{1}$ या $\frac{BG}{GE} + 1 = \frac{2}{1} + 1$

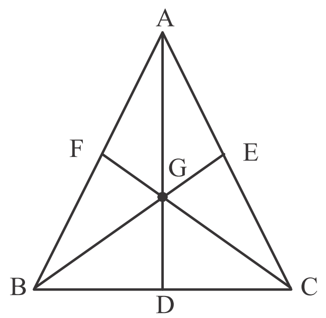
या $\frac{BG + GE}{GE} = \frac{2+1}{1}$ या $\frac{BE}{GE} = \frac{3}{1}$

या $GE = \frac{1}{3} BE$ या $GE = \frac{12.6}{3}$

या $GE = 4.2$ और $\frac{FG}{GC} = \frac{1}{2}$

या $2FG = GC$ या $GC = 2 \times 3 = 6$ सेमी

उदाहरण-2. यदि एक त्रिभुज की सभी माध्यिकाएँ समान हों, तो वह समबाहु त्रिभुज होगा।



आकृति 10.17

हल: दिया है: ΔABC की माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर मिलती हैं, और $AD = BE = CF$ ।

सिद्ध करना है: ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

उपपत्तिः हम जानते हैं कि त्रिभुज की माध्यिकाओं को केन्द्रक 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अतः $AD = BE = CF$ (दिया है)

$\therefore \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$

$\Rightarrow AG = BG = CG$ ...(1)

इसी प्रकार $\frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}BE = \frac{1}{3}CF$

$\Rightarrow GD = GE = GF$ ...(2)

अब ΔBGF और ΔCGE में,

$BG = CG \qquad [(1) \text{से}]$

$GF = GE \qquad [(2) \text{से}]$

और $\angle BGF = \angle CGE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta BGF \cong \Delta CGE$

अतः सर्वागासम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होगी।

$\therefore \quad BF = CE$

$\therefore \quad 2BF = 2CE$

$\Rightarrow \quad AB = AC$ ...(3)

इसी प्रकार $\Delta CGD \cong \Delta AGF$ होंगे।

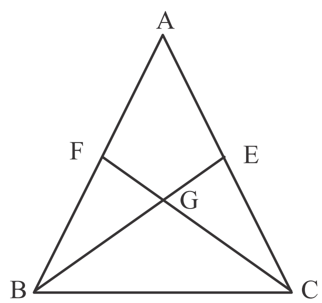
अतः $BC = AB$ ...(4)

(3) और (4) से

$AD = BC = CF$

$\therefore$ ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। "इतिसिद्धम्"

उदाहरण-3. एक त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ समान माप की हो तो वह त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज होता है।



आकृति 10.18

दिया हुआ है: ΔABC में BE एवं CF दो समान माप की माध्यिकाएँ है।

तथा BE = CF, F तथा E क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं।

सिद्ध करना है: ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

उपपत्तिः ΔABC का केंद्रक G है (ज्ञात है)

$\therefore \quad BG : GE = CG : GF = 2 : 1$

अतः $BG = \frac{2}{3} BE$ ...(1)

$GE = \frac{1}{3} BE$ ...(2)

तथा $CG = \frac{2}{3} CF$ ...(3)

$GF = \frac{1}{3} CF$ ...(4)

परन्तु $BE = CF$ (ज्ञात है)

$\therefore$ (1) और (3) से $BG = CG$ और (2) और (4) से $GE = GF$

अब ΔBGF और ΔCGE में

BG = CG (सिद्ध कर चुके हैं)

GE = GF (सिद्ध कर चुके हैं)

$\angle BGF = \angle CGE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\Delta BGF \cong \Delta CGE$ (भुजा–कोण–भुजा नियम से)

अतः BF = CE या $2BF = 2CE$

$\therefore$ $AB = AC$

$\therefore$ ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्नमाला 10.2

1. त्रिभुज के तीनों शीर्षों एवं तीनों भुजाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
2. एक ΔABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि AG=6 सेमी, BE=9 सेमी और GF=4.5 सेमी हो, तो GD, BG और CF ज्ञात कीजिए।
3. एक ΔABC में, माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि $AD + BE > \frac{3}{2} AB$,

   [संकेत : $AG + BG > AB$]
4. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की दो माध्यिकाओं का योग तीसरी माध्यिका से अधिक होता है।
5. एक ΔABC में, माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

   $4(AD ? BE ? CF) ? 3(AB ? BC ? CA)$
6. ΔABC का लम्ब केंद्र P है। सिद्ध कीजिए कि ΔPBC का लम्ब केंद्र बिन्दु A है।
7. ΔABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G से गुजरती है।
   (a) यदि GF=4 सेमी हो तो GC का मान ज्ञात कीजिए।
   (b) यदि AD=7.5 सेमी हो तो GD का मान ज्ञात कीजिए।
8. ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC, BC का मध्य बिन्दु D है। सिद्ध कीजिए कि परिकेंद्र, अंतकेंद्र, लम्ब केंद्र तथा केंद्रक सभी AD रेखा पर स्थित हैं।
9. ΔABC का लम्ब केंद्र H है। AH, BH और CH में मध्य बिन्दु क्रमशः X, Y और Z हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔXYZ का लम्ब केंद्र भी H है।
10. ΔABC की भुजा BC में वह बिन्दु किस प्रकार ज्ञात करेंगे जो भुजाओं AB और AC से समदूरस्थ हों?

विविध प्रश्नमाला–10

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 7 तक)

1. किसी त्रिभुज के शीर्षों से समदूरस्थ बिन्दु कहलाता है–

   (क)गुरूत्व केन्द्र (ख) परिकेन्द्र (ग) लम्बकेन्द्र (घ) अन्तःकेन्द
2. त्रिभुज का गुरूत्व केन्द्र होता है–

   (क) त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से खींचे गये लम्ब–समद्विभाजक का संगामी–बिन्दु
   (ख) त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक का संगामी–बिन्दु
   (ग) त्रिभुज की माध्यिकाओं का संगामी –बिन्दु
   (घ) त्रिभुज के शीर्षलम्ब का संगामी बिन्दु
3. समतल में लुढ़कने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ होता है–

   (क) वृत्त (ख) वक्र (ग) समतल के समान्तर रेखा (घ) समतल पर लम्बवत् रेखा
4. यदि किसी त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ समान हों, तो त्रिभुज होगा–

   (क) समकोण त्रिभुज (ख) समद्विबाहु त्रिभुज (ग) समबाहु त्रिभुज (घ) इनमें से कोई नहीं

5. यदि AB और CD दो असमान्तर रेखाएँ हो, तो इनसे समान दूरी पर रहने वाले बिन्दु P का बिन्दुपथ होगा–
   (क) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB के समान्तर रेखा,
   (ख) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD से अन्तरित कोण की समद्विभाजक रेखा
   (ग) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD के समान्तर रेखा
   (घ) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD के लम्बवत् रेखा
6. वह त्रिभुज जिसके लम्बकेन्द्र, परिकेन्द्र और अन्तःकेन्द्र संपाती हो कहलाता है
   (क) समबाहु त्रिभुज (ख) समकोण त्रिभुज (ग) समद्विबाहु त्रिभुज (घ) इनमें से कोई नहीं
7. वह त्रिभुज जिसका लम्बकेंद्र त्रिभुज का शीर्ष बिन्दु होता है, कहलाता है
   (क) समकोण त्रिभुज (ख) समबाहु त्रिभुज (ग) समद्विबाहु त्रिभुज (घ) इनमें से कोई नही
8. घडी के पेन्डुलम के सिरे का बिन्दुपथ लिखिये।
9. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिन्दु, क्रमश D, E और F हों, तो सिद्ध कीजिए कि EF, AD को समद्विभाजित करती है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. किन्हीं प्रतिबन्धों के अर्न्तगत एक बिन्दु का बिन्दुपथ वह ज्यामितीय आकृति है, जिसका प्रत्येक बिन्दु दिए गए प्रतिबंधों का सन्तुष्ट करता है।
2. किन्हीं दो बिन्दुओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ दिए हुए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का लम्ब–समद्विभाजक होता है।
3. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ उन दोनों रेखाओं से बने कोणों का समद्विभाजक होता है।
4. त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब–समद्विभाजक संगामी होते हैं, और संगमन बिन्दु को त्रिभुज का परिकेन्द्र कहते हैं।
5. त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं और संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अन्तः केन्द्र कहते हैं।
6. त्रिभुज के तीनों शीर्षलम्ब संगामी होते हैं और संगमन बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहते हैं।
7. त्रिभुज के तीनों माध्यिकाएँ संगामी होती है। संगमन बिन्दु त्रिभुज की माध्यिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभापित करता है। संगमन बिन्दु को त्रिभुज का केन्द्रक कहते हैं।

उत्तरमाला–10

प्रश्नमाला–10.1

1. (i) असत्य–किसी रेखा से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दु पथ उसके दोनों ओर उस रेखा के समान्तर रेखाएँ होती हैं।
(ii)सत्य
(iii)असत्य–तीन दिए गए बिन्दु संरेख तभी होंगे जब तीनों उस एक रेखा पर स्थित हो जिसके सभी बिन्दुओ केसमुच्चयों में से तीनों दिए गए बिन्दु भी समुच्चय के अवयव हो।
(iv) असत्य, यह निर्भर करता है, दोनों रेखाएँ किस स्थिति में स्थित हैं। यदि दोनों समान्तर हो तो उनके समान्तर रेखा होगी और यदि प्रतिच्छेदी रेखाएँ हों तो प्रतिच्छेदी बिन्दुओं पर बनने वाले कोण के अर्द्धक वाली रेखा होगी।
(v) सत्य

प्रश्नमाला–10.2

1. परिकेन्द्र, अन्तःकेन्द्र 2. 3 सेमी, 6 सेमी, 13.5 सेमी, 7.8 सेमी, 2.5 सेमी

विविध प्रश्नमाला 10

1. (ख) 2. (ग) 3. (ग) 4. (ख) 5. (ख) 6. (क) 7. (क)
8. एक वृत्त चाप