11

समरूपता
(Similarity)

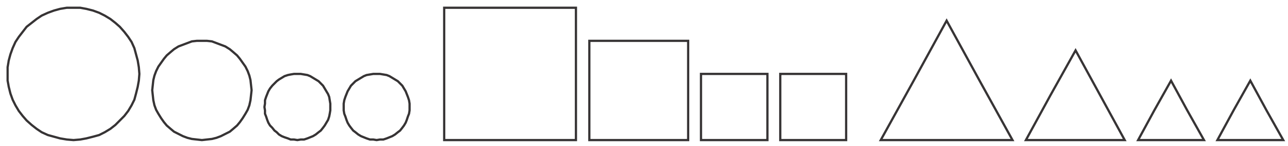
11.01 प्रस्तावना

क्या आपके मन में कभी यह प्रश्न उठा है कि दूरस्थ वस्तुओं जैसे चन्द्रमा की दूरी अथवा पर्वतों जैसे गौरीशंकर शिखर (माउन्ट एवरेस्ट), गुरू शिखर (माउन्ट आबू की सबसे ऊंची चोटी) की ऊँचाई किस प्रकार ज्ञात की होगी? क्या इन्हें एक मापन वाले फीते से सीधा (प्रत्यक्ष) मापा गया है? वास्तव में इन सभी दूरियों और ऊँचाईयों को अप्रत्यक्ष मापन की अवधारण का प्रयोग करते हुए ज्ञात किया है। यह अप्रत्यक्ष अवधारणा आकृतियों की समरूपता सिद्धान्त पर आधारित है। इस अध्याय में हम समरूपता विशेषतः समरूप त्रिभुज पर विस्तृत अध्ययन करेगें।

11.02 समरूप आकृतियाँ

याद कीजिए कक्षा 9 में आप समान आकार एवं समान माप की आकृतियों, (सर्वांगसम आकृतियों) पर चर्चा कर चुके हैं। जिसके अन्तर्गत आपने देखा होगा कि समान (एक ही) त्रिज्या वाले सभी वृत्त सर्वांगसम होते हैं, समान लम्बाई की भुजा वाले सभी वर्ग सर्वांगसम होते हैं। इसी प्रकार समान लम्बाई की भुजा वाले सभी समबाहू त्रिभुज भी सर्वांगसम होते हैं।

आइए अब निम्न आकृतियों पर विचार करते है।



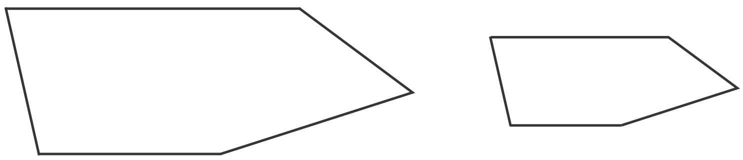
(i) (ii) (iii)

आकृति 11.01

आकृति 11.1 (i) में से कोई दो या अधिक वृत्त ले कर देखिए क्या ये सर्वांगसम हैं? चूंकि इनमें से सभी की त्रिज्या समान नहीं है इसलिए ये परस्पर सर्वांगसम नहीं हैं। ध्यान दीजिए इनमें कुछ सर्वांगसम है और कुछ सर्वांगसम नहीं है। परन्तु सभी के आकार (बनावट) समान है। अतः ये सभी वे आकृतियाँ हैं जिन्हें समरूप कहते है। दो समरूप आकृतियों के आकार समान होते है परन्तु इनके माप समान होना आवश्यक नहीं है। अतः सभी वृत्त समरूप होते हैं। इसी प्रकार आकृति 11.1 (ii), (iii) में स्थित सभी वर्गों एवं सभी समबाहू त्रिभूजों के बारे में भी सभी वृत्तों की तरह यही कहेगें कि सभी वर्ग समरूप हैं तथा सभी समबाहू त्रिभुज भी समरूप हैं।

उपर्युक्त चिंतन के पश्चात् हम ये कह सकते हैं कि सभी सर्वांगसम आकृतियां समरूप होती हैं। परन्तु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगमस होना आवश्यक नहीं है।

अब पुनः उपर्युक्त आकृति 11.1 (i), (ii), (iii) को देखकर यह बतायें कि क्या एक वृत्त और एक वर्ग परस्पर समरूप है अथवा एक वर्ग व एक समबाहू त्रिभुज परस्पर समरूप है? निश्चित ही आपका उत्तर नहीं में होगा क्योंकि इनके आकार समान नहीं हैं। आकृति 11.2 में दर्शाये गये दो पंचभुजों के बारे में आप क्या कहेंगे? क्या ये परस्पर समरूप हैं? यद्यपि ये दो आकृतियां समरूप जैसी प्रतीत हो रही है परन्तु हमें इनके समरूप होने या नहीं होने पर आशंका है।



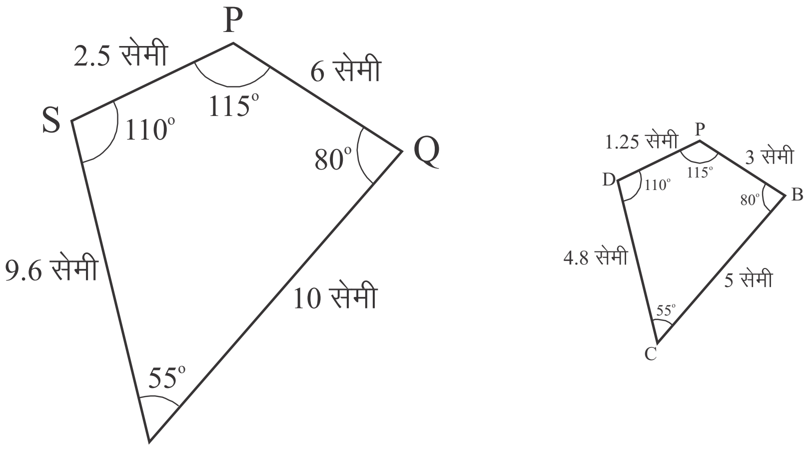
आकृति 11.02

अब हम निम्न आकृतिों में अंकित आकृतियों के बारे में विचार करते हैं। चित्र क्रमांक 11.3 देखिये।

चित्र 11.03

तीन चित्रों में हमारे देश के महान गणितज्ञ श्री निवास रामानुजन (22 दिसम्बर 1887–18 अप्रैल 1920) की भिन्न मापों में आकृतियाँ बनी हुई है। क्याँ ये आकृतियां परस्पर समरूप हैं? निःसन्देह ये समरूप आकृतियां हैं। क्या आप बता सकते हैं इन आकृतियों का अवलोकन करने के बाद आप को इन्हे समरूप में आशंका क्यों नहीं हुई? इसलिए आइये आकृतियों की समरूपता के लिए कोई परिभाषा ज्ञात करे जिससे यह सुनिश्चित कर सकें कि दो दी हुई आकृतियां समरूप हैं या नहीं।

आपने कभी अपने दस्तावेजों जैसे अंक तालिका, जन्म प्रमाण पत्र आदि की छाया प्रतियां (फोटो कॉपी) अवश्य बनवाई होंगी। इसी प्रकार फोटो ग्राफर से अपनी स्टेम्प साइज, पासपोर्ट साइज एवं पोस्टकाड़ साइज फोटो भी अवश्य बनवाई होगी। एक ही समय खींची गई आपकी सभी साइज की फोटो परस्पर समरूप होती हैं। एक सफेद कागज पर एक आकृति बनाकर फोटो कापी की मशीन द्वारा आवर्धित (बड़ी) करवाइए अब आपके पास दो आकृतियां हैं। इन आकृतियों की संगत भुजाओं एवं संगत कोणों को क्रमशः स्केल एवं प्रोटेक्टर से माप कर आकृतिों को नामांकित कीजिए। देखिए आकृति 11.04



आकृति 11.04

अब आप दोनों आकृतियों की संगत भुजाओं एवं संगत कोणों की तुलना कीजिए। आप पाएंगे बड़े आकृति की संगत भुजाएँ छोटे आकृति की संगत भुजाओं से 2 : 1 में आवर्धित (बड़ी) हो गई है। इसी प्रकार छोटे आकृति की प्रत्येक संगत भुजा बड़े आकृति की संगत भुजा से 1 : 2 में छोटी हो गई। इसी तरह प्रत्येक संगत कोण परस्पर बराबर है यहीं दो आकृतियों विशेष कर दो बहुभुजों में समरूपता के लिए निष्कर्ष मान सकते हैं। अर्थात् हम कह सकते हैं कि भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप तभी होतें हैं जब (i) इनके सभी संगत कोण बराबर हो तथा (ii) इनकी संगत भुजाएं समान अनुपात में हो।

आकृति 11.4 में दर्शाए दोनों चतुर्भुज क्रमशः ABCD एवं PQRS हो तो हम देख सकते है कि शीर्ष A, शीर्ष P के सगंत है, शीर्ष B, शीर्ष Q के संगत है, शीर्ष C, शीर्ष R के संगत है तथा शीर्ष D, शीर्ष S के संगत हैं। सांकेतिक रूप से इन संगतताओं को $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q, C \leftrightarrow R$ और $D \leftrightarrow S$ से निरूपित किया जाता है। इस प्रकार

(i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ और $\angle D = \angle S$ है।

(ii) $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CD}{RS} = \dfrac{DA}{SP} = \dfrac{1}{2}$

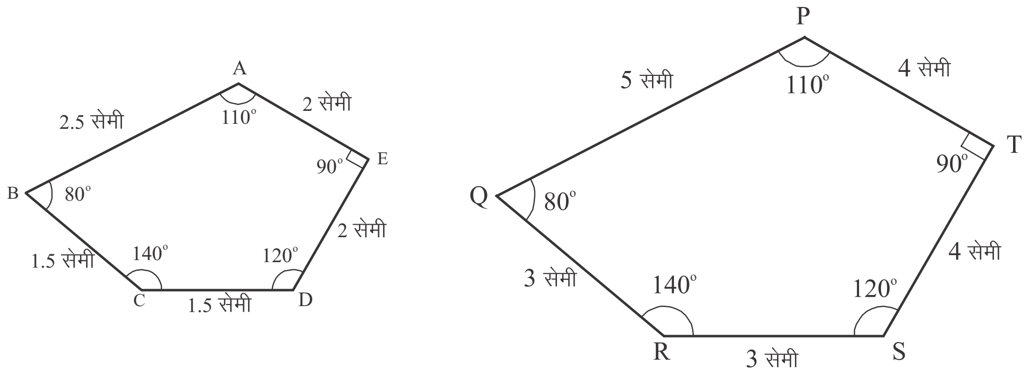
अर्थात् चतुर्भुज ABCD और चतुर्भुज PQRS परस्पर समरूप है।

उपर्युक्त निष्कर्ष के आधार पर आकृति 11.5 में बने दो पंचभुजों के लिए–

(i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R, \angle D = \angle S$ एवं $\angle E = \angle T$

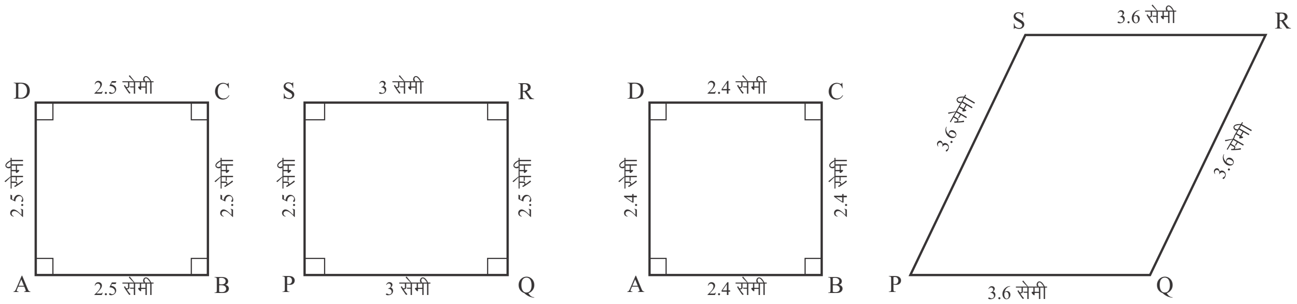
(ii) $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DE}{ST} = \frac{EA}{TP} = \frac{1}{2}$$

अतः पंचभुज ABCDE और पंचभुज PQRST समरूप हैं।



आकृति 11.05

आकृति 11.06 (i) के अन्तर्गत एक वर्ग एवं एक आयत में संगत कोण तो बराबर है, परन्तु इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती नहीं है। अतः दोनों समरूप नहीं हैं।



आकृति 11.06

इसी प्रकार आकृति 11.06 (ii) में एक वर्ग और एक समचतुर्भुज है, में संगत भुजाएँ समानुपाती है परन्तु संगत कोण समान नहीं हैं अतः दोनों चतुर्भुज समरूप नहीं हैं।

इस प्रकार हम कह सकते है कि दो बहुभुजों की समरूपता के लिए (i) संगत कोणों का बराबर होना (ii) संगत भुजाओं का समानुपाती होना में से किसी एक प्रतिबन्ध का सन्तुष्ट होना ही पर्याप्त नहीं हैं वरन् दोनों का संतुष्ट होना आवश्यक है।

प्रश्नमाला 11.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (i) सभी वृत्त .... होते है। (ii) सभी वर्ग .... होते है।

   (iii) सभी .... त्रिभुज समरूप होते हैं।

   (iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि

   (a) .... (b) ....

2. निम्न कथन में सत्य व असत्य बताइए।

   (i) दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं।

   (ii) दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं।

   (iii) दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएं समानुपाती हो।

   (iv) दो बहुभुज समरूप होत हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण बराबर हो।

   (v) दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हो।

3. समरूप आकृतियों के कोई दो उदाहरण आकृति बनाकर दीजिए।

त्रिभुजों की समरूपता एवं समान कोणिक त्रिभुज

इस अध्याय में अब तक हमने दो बहुभुजों के समरूप होने के लिए दो प्रतिबन्धों की अनिवार्यता को समझा। चूंकि त्रिभुज भी बहुभुज की श्रेणी में ही आता है अतः दो त्रिभुज परस्पर समरूप होगें यदि

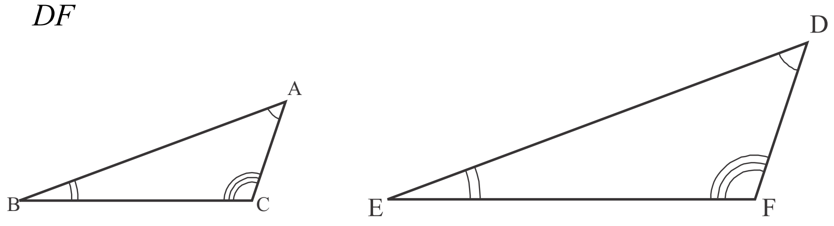
(i) दोनों के सभी संगत कोण बराबर हो

(ii) दोनों की संगत भुजाओं का अनुपात बराबर हो

आकृति 11.7 में स्थित ΔABC एवं ΔDEF समरूप होगें यदि

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$



आकृति 11.07

समानकोणिक त्रिभुज

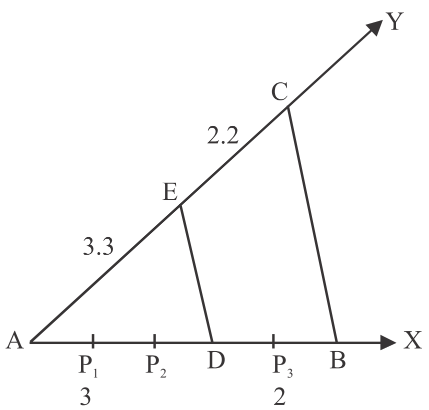
यदि दो त्रिभुजों में उनके संगत कोण बराबर हो तो वे दोनों त्रिभुज समानकोणिक त्रिभुज कहलाते हैं।

आधारभूत समानुपातिकता सम्बन्धित परिणाम –

अब हम निम्न प्रयोग के माध्यम से त्रिभुज की भुजाओं में नीहित अनुपातिक सम्बन्धों को समझने का प्रयत्न करते हैं।

(a) कोई एक कोण   खींचिए। AX पर बराबर लम्बाई लेकर P_1, P_2, D, P_3 तथा B बिन्दु लगा दीजिए। इस प्रकार हमें $AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ इकाई प्राप्त होंगे (यदि यहां प्रत्येक बिन्दु $1-1$ सेमी दूरी पर लगाएँ तो आगे मापन में सुविधा रहेगी)

(b) AY पर कोई बिन्दु C लेकर B को C से मिला दीजिए। अब D से रेखा DE, BC के समान्तर खींचिए जो AY को E पर काटती हैं। इस तरह एक   बन गया है।



आकृति 11.08

आकृति 11.08 के अनुसार

$AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3$ इकाई (3 सेमी यहाँ सभी अन्तराल $1-1$ सेमी है)

$DB = DP_3 + P_3B = 2$ इकाई (2 सेमी)

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2} \qquad \ldots (1)$$

अब AE एवं AC को मापिए (यहाँ मापने पर AE = 3.3 सेमी व EC = 2.2 सेमी है)

अतः $\frac{AE}{EC} = \frac{3.3}{2.2} = \frac{3}{2}$ . . . (2)

(1) व (2) की तुलना की जाए तो हम देखते हैं।

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

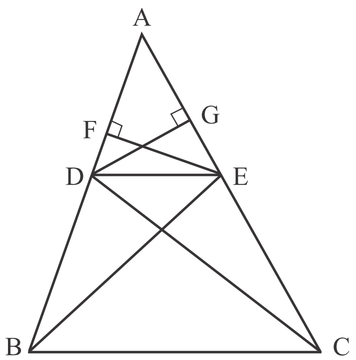
अर्थात् यदि ΔABC में इसकी भुजाएँ AB व AC पर क्रमशः D व E ऐसे दो बिन्दु ले कि DE || BC हो तो

. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ प्राप्त होता है तथा इसे सर्वप्रथम यूनान के प्रसिद्ध गणितज्ञ थेल्स ने प्राप्त किया इसलिए इसे थेल्स प्रमेय भी कहते हैं। यह परिणाम आधार भूत अनुपातिकता प्रमेय के नाम से जाना जाता है।

प्रमेय 11.1 (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय/थेल्स प्रमेय)

किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गइ एक रेखा त्रिभुज की शेष दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करे तो यह दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

दिया हुआ है: ABC एक त्रिभुज हैं जिसमें DE || BC है। DE, AB व AC को क्रमशः D व E पर काटती है।



आकृति 11.09

सिद्ध करना: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना: BE व CD को मिलाया $EF \perp BA$ और $DG \perp CA$ खींचा

उपपत्ति: चूंकि अतः EF, ΔADE तथा ΔABE की ऊँचाई है।

$\therefore$ ΔADE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2}$ AD $\times$ EF

और ΔDBE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$आधार $\times$ ऊँचाई $= \frac{1}{2}$DB $\times$ EF

$$\therefore \quad \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EF}{\frac{1}{2} DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \qquad \ldots (1)$$

इसी प्रकार $$\frac{\Delta ADE \text{का क्षेत्रफल}}{\Delta DEC \text{का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DG}{\frac{1}{2} EC \times DG} = \frac{AE}{EC}$$ . . . (2)

किन्तु ΔDBE एवं ΔDEC दोनों समान आधार DE एवं DE || BC के मध्य बने हैं

अतः ΔDBE का क्षेत्रफल =ΔDEC का क्षेत्रफल . . . (3)

(1), (2) और (3) से

$$\frac{\Delta ADE \text{का क्षेत्रफल}}{\Delta DBE \text{का क्षेत्रफल}} = \frac{\Delta ADE \text{का क्षेत्रफल}}{\Delta DEC \text{का क्षेत्रफल}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

इति सिद्धम्

इस आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की सहायता से निम्न परिणाम भी ज्ञात किए जा सकते हैं। आगे उपयोग के लिए इनका भी स्मरण में रहना आवश्यक है।

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

प्रमेय 11.2 (प्रमेय 11.1 का विलोम)

यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करे, तो यह तीसरी भुजा के समान्तर होती है।

दिया हुआ है: एक रेखा ℓ त्रिभुज ABC की भुजा AB व AC को क्रमशः D व E पर इस प्रकार काटती है कि हो $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

सिद्ध करना है: ℓ || BC अर्थात् DE || BC

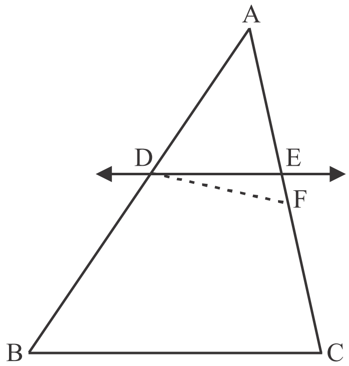
उपपत्तिः मान लें कि DE, BC के समान्तर नहीं है, तब दूसरी रेखा BC के समान्तर है माना कि DF || BC है।

$\because$ DF || BC

$\therefore$ $\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा) . . . (1)

किन्तु $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (दिया हुआ) . . . (2)

अतः $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC}$ ((1) व (2) से)



आकृति 11.10

दोनों ओर 1 जोड़ने पर

$$\frac{AF}{FC} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$$

या $$\frac{AF + FC}{FC} = \frac{AE + EC}{EC}$$

या $$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC}$$

या $$\frac{11}{FC} = \frac{}{EC}$$

या FC = EC यह परिणाम तभी आ सकता है जब F और E एक दूसरे को सम्पाती करे और DF, DE पर स्थित हो।

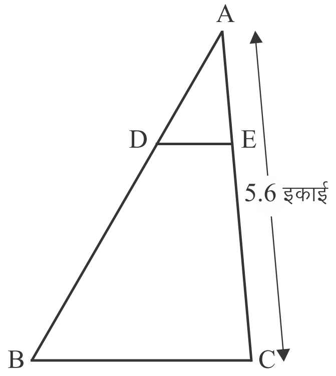
अर्थात् DE || BC इति सिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. ΔABC में $DE \parallel BC$ है तथा   है। यदि $AC = 5.6$ इकाई हो तो AE का मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में $DE \parallel BC$ दिया हुआ है।

$\therefore \quad \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा)



आकृति 11.11

या $\quad \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{(AC - AE)}$

या $\quad \dfrac{3}{5} = \dfrac{AE}{5.6 - AE}$

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{3}{5}$ एवं $AC = 5.6$ इकाई

या $\quad 3(5.6 - AE) = 5AE$

या $\quad 16.8 - 3AE = 5AE$

या $\quad 5AE + 3AE = 16.8$

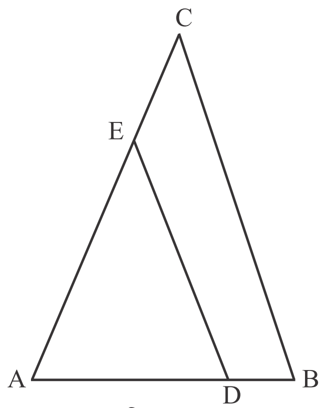
या $\quad 8AE = 16.8$

या $\quad AE = \dfrac{16.8}{8} = 2.1$ इकाई

उदाहरण-2. दिए गए आकृति में $DE \parallel BC$ है यदि $AD = x, DB = x - 2, AE = x + 2$ और $EC = x - 1$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में $DE \parallel BC$ अत:

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा)



आकृति 11.12

या $\quad \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{x+2}{x-1}$

या $\quad x(x-1) = (x+2)(x-2)$

या $\quad x^2 - x = x^2 - 4$

या $\quad x = 4$

उदाहरण-3. समलम्ब चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel DC$ है। AD व BC पर क्रमशः E और F इस प्रकार स्थित है कि $EF \parallel AB$ है।

सिद्ध कीजिए $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BF}{FC}$

हल: A व C को मिलाइए इस प्रकार AC, EF के बिन्दु G से गुजरता है।

$\because \quad AB \parallel DC$ और $EF \parallel AB$ (दिया हुआ है)

$\therefore \quad EF \parallel DC$ (एक ही रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती है)

ΔADC में $EG \parallel DC$ (यहाँ $EF \parallel DC$ और EG, EF का ही भाग है)

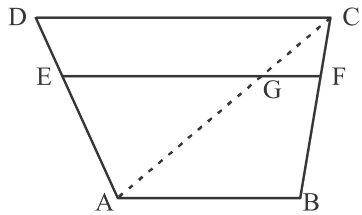
अत: $\quad \dfrac{AE}{ED} = \dfrac{AG}{GC}$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\quad \dfrac{AG}{CG} = \dfrac{AE}{ED}$ $\quad \ldots (1)$

इसी प्रकार ΔCAB में $\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

या $\frac{AG}{CG} = \frac{BF}{CF}$ ...(2)

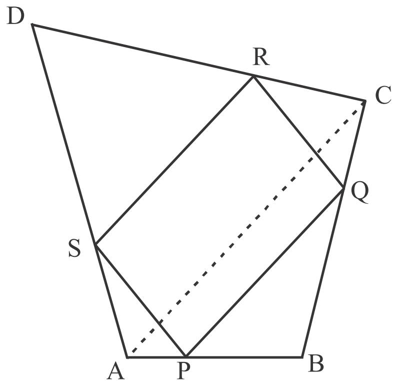
अतः (1) और (2) से $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ इति सिद्धम्



आकृति 11.13

उदाहरण-4. ABCD एक चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD और DA पर क्रमशः P,Q,R एवं S बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि ये चतुर्भुज के शीर्ष A व C के सापेक्ष इन्हें सम त्रिभाजित करते है, तो सिद्ध कीजिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

हलः PQRS के समान्तर चतुर्भुज सिद्ध करने के लिए हमें $PQ \parallel SR$ एवं $QR \parallel PS$ सिद्ध करना होगा।



आकृति 11.14

दिया हुआ है: P,Q,R और S बिन्दु क्रमशः AB, BC, CD और DA पर इस प्रकार स्थित हैं कि

BP = 2 PA, BQ = 2 QC, DR = 2RC और DS = 2SA

रचनाः A को C से मिलाया –

ΔADC में $\frac{DS}{SA} = \frac{2SA}{SA} = 2$

एवं $\frac{DR}{RC} = \frac{2RC}{RC} = 2$ (दिया हुआ है से)

$\Rightarrow \frac{DS}{SA} = \frac{DR}{RC} \Rightarrow SR \parallel AC$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा) ...(1)

$\frac{BP}{PA} = \frac{2PA}{PA} = 2$

ΔABC में

और $\frac{BQ}{QC} = \frac{2QC}{QC} = 2$ (दिया हुआ है से)

$\Rightarrow \frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow PQ \parallel AC$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा) ...(2)

(1) व (2) से $SR \parallel AC$ तथा $PQ \parallel AC \Rightarrow SR \parallel PQ$

इसी प्रकार BD को मिलाकर हम उपर्युक्तानुसार $QR \parallel PS$ सिद्ध कर सकते हैं।

अर्थात् PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

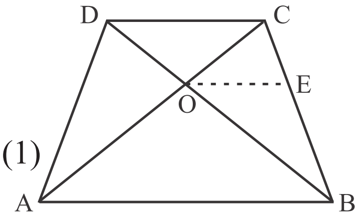
उदाहरण-5. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ है तो सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

हल: दिया हुआ है: चतुर्भुज ABCD में आकृति 11.15 के अनुसार

$$\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$$

सिद्ध करना है: ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, इसके लिए हमें $AB \parallel CD$ सिद्ध करना होगा।

रचना: O से $OE \parallel AB$ रेखा खींची



आकृति 11.15

उपपत्ति: $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ (दिया हुआ है)

या $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ ...(1)

ΔABC में $OE \parallel AB$

$\therefore$ $\frac{CO}{OA}=\frac{CE}{EB}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\frac{OA}{CO}=\frac{EB}{CE}$ ...(2)

(1) व (2) से $\frac{BO}{OD}=\frac{EB}{CE}$

या $\frac{BO}{OD}=\frac{BE}{EC}$

$\Rightarrow$ $OE \parallel CD$ (में आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से) ...(3)

$\because$ $OE \parallel AB$ (रचना से) ...(4)

(3) व (4) से

$AB \parallel CD$

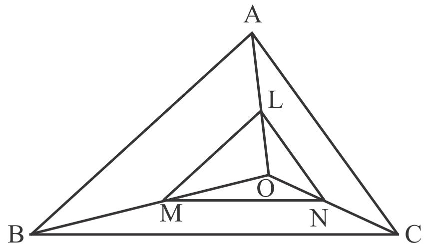
अर्थात् ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है। इति सिद्धम्

प्रश्नमाला 11.2

1. ΔABC की भुजाएं AB व AC पर क्रमश: D व E बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि $DE \parallel BC$ हो तो
   (i) यदि AD = 6 सेमी, DB = 9 सेमी और AE = 8 सेमी हो तो AC का मान ज्ञात कीजिए।
   (ii) यदि $\frac{AD}{DB}=\frac{4}{13}$ और AC = 20.4 सेमी हो तो EC का मान ज्ञात कीजिए।
   (iii) $\frac{AD}{DB}=\frac{7}{4}$ और AE = 6.3 सेमी हो तो AC का मान ज्ञात कीजिए।
   (iv) यदि $AD = 4x-3$, $AE = 8x-7$, $BD = 3x-1$ और $CE = 5x-3$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

2. ΔABC की भुजाएँ AB एवं AC पर क्रमश: D व E दो बिन्दु स्थित है, निम्न प्रश्नों में दिये गये मानों के माध्यम से $DE \parallel BC$ होने नहीं होने जाकारी दीजिए।
   (i) AB = 12 सेमी, AD = 8 सेमी, AE = 12 सेमी और AC = 18 सेमी
   (ii) AB = 5.6 सेमी, AD = 1.4 सेमी, AC = 9.0 सेमी तथा AE = 1.8 सेमी
   (iii) AD = 10.5 सेमी, BD = 4.5 सेमी, AC = 4.8 सेमी तथा AE = 2.8 सेमी
   (iv) AD = 5.7 सेमी, BD = 9.5 सेमी, AE = 3.3 सेमी तथा EC = 5.5 सेमी

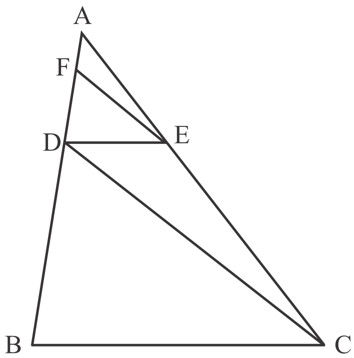
3. दिए गए आकृति 11.16 में OA, OB और OC पर क्रमशः L, M एवं N बिन्दु इस प्रकार स्थित है कि $LM \parallel AB$ तथा $MN \parallel BC$ है तो दर्शाइए $LN \parallel AC$ है।



आकृति 11.16

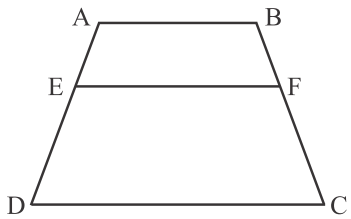
4. ΔABC में AB व AC भुजाओं पर क्रमशः D और E बिन्दु इस प्रकार स्थित है कि $BD = CE$ है यदि हो तो दर्शाइए $DE \parallel BC$

5. आकृति 11.17 में $DE \parallel BC$ और $CD \parallel EF$ हो तो सिद्ध कीजिए $AD^2 = AB \times AF$



आकृति 11.17

6. आकृति 11.18 में यदि $EF \parallel DC \parallel AB$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BF}{FC}$



आकृति 11.18

7. $ABCD$ पर समान्तर चतुर्भुज है, जिसकी भुजा BC पर कोई बिन्दु P स्थित है। यदि DP एवं AB को आगे बढ़ाएँ तो वे L पर मिलते है। तो सिद्ध कीजिए।

(i) $\dfrac{DP}{PL} = \dfrac{DC}{BL}$ (ii) $\dfrac{DL}{DP} = \dfrac{AL}{DC}$

8. ΔABC की भुजा AB पर D और E दो ऐसे बिन्दु स्थित हैं कि $AD = BE$ हो। यदि $DP \parallel BC$ तथा $EQ \parallel AC$ हो तो सिद्ध कीजिए $PQ \parallel AB$

9. $ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{CO}{DO}$

10. यदि D और E क्रमशः AB और AC, त्रिभुज ABC की भुजाओं पर स्थित ऐसे बिन्दु है कि $BD = CE$ हो तो सिद्ध कीजिए ΔABC एक समद्विबाहू त्रिभुज है।

11.04 त्रिभुज के आन्तरिक और बाह्य कोणों के समद्विभाजक

आधारभूत समानुपातिकता प्रमयों में आपने त्रिभुज की भुजाओं को एक रेखा द्वारा प्रतिच्छेद करने पर प्राप्त परिणामों को देखा और समझा। अब यदि Δ के कोणों को कोई भुजा विभाजित करती है तो विभाजन के बाद किस प्रकार के परिणाम मिलते है, तो आइए निम्न प्रयोग हमको क्या परिणाम देता है? समझते हैं।

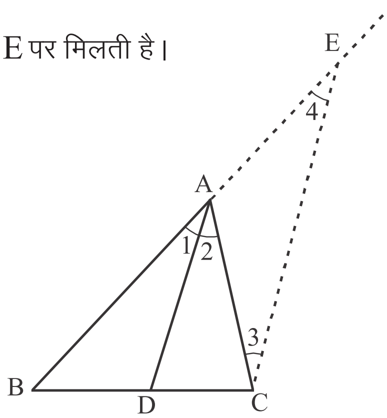
प्रमेय–11.3 यदि कोई एक रेखा किसी त्रिभुज के एक आन्तरिक कोण का समद्विभाजन करे तो वह समद्विभाजक रेखा उस कोण की सम्मुख भुजा को त्रिभुज की शेष भुजाओं की लम्बाईयों के अनुपात में विभाजित करती है।

दिया हुआ है: ΔABC में AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है।

अतः $\angle 1 = \angle 2$

सिद्ध करना है:

रचना: रेखा CE इस प्रकार खींची गई है कि $DA \parallel CE$ हो तो BA को आगे बढ़ाने पर E पर मिलती है।



आकृति 11.19

उपपत्ति: $CE \parallel DA$ और AC और BE तिर्यक रेखाएं है।

अतः $\angle 2 = \angle 3$ (एकान्तर कोण) ...(1)

एवं $\angle 1 = \angle 4$ (संगत कोण) ...(2)

परन्तु $\angle 1 = \angle 2$ (दिया हुआ)

(1) व (2) से $\angle 3 = \angle 4$

अतः में

$AE = AC$ ...(3)

ΔBCE में $DA \parallel CA$ तो आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

या $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$ ((3) से)

अर्थात् $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$

इति सिद्धम्

प्रमेय–11.4 (प्रमेय 11.3 की विलोम)

यदि एक रेखा किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से इस प्रकार खींची जाए कि वह उसके सम्मुख भुजा को शेष दोनों भुजाओं के अनुपात में विभाजित करे तो वह रेखा शीर्ष पर बने कोण का समद्विभाजन करती है।

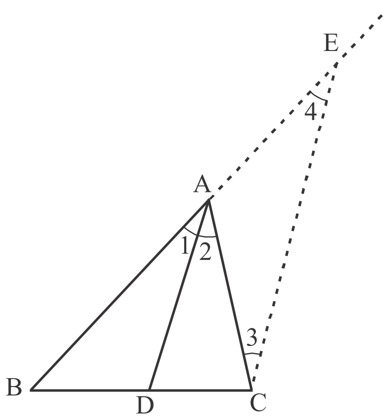
दिया हुआ है: ΔABC की भुजा BC पर D एक ऐसा बिन्दु है जिससे

$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ हो।

सिद्ध करना है: AD, $\angle A$ की समद्विभाजक है

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

रचना: BA को E तक इतना बढ़ाया कि $AE = AC$ हो जाए, E व C को मिलाया



आकृति 11.20

उपपत्ति: ΔACE में

$AE = AC$ (रचना से)

अतः $\angle 3 = \angle 4$ ...(1)

अब चूंकि $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (दिया हुआ)

अतः $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AE}$ ($\because AE = AC$ रचना से)

इस प्रकार ΔBCE में यदि $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ हो तो आधारभूत समानुपातिक विलोम प्रमेय से

$DA \parallel CE$ अतः $\angle 1 = \angle 4$ (संगत कोण) एवं $\angle 2 = \angle 3$ (एकान्तर कोण)

परन्तु $\angle 3 = \angle 4$ ((1) से) अतः $\angle 1 = \angle 2$ अर्थात् AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है इति सिद्धम्

प्रमेय–11.5 त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाले बहिष्कोण का समद्विभाजक कोण की सम्मुख भुजा बाह्य विभाजन त्रिभुज की शेष दोनों भुजाओं के अनुपात में करता है।

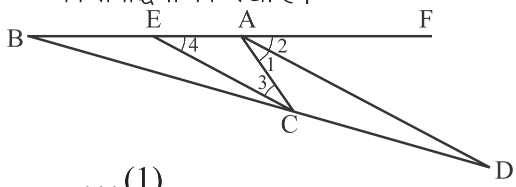
दिया हुआ है: AD, ΔABC के शीर्ष A पर बने बहिष्कोण $\angle FAC$ की समद्विभाजक रेखा है।

अर्थात्

सिद्ध करना है:

रचना: $CE \parallel DA$ खींची जो AB को E पर काटती है।

उपपत्ति: $CE \parallel DA$ है एवं AC तथा BF तिर्यक रेखाएँ है। अतः



आकृति 11.21

$\angle 1 = \angle 3$ (एकान्तर कोण) ...(1)

एवं $\angle 2 = \angle 4$ (संगत कोण) ...(2)

चूंकि $\angle 1 = \angle 2$ (दिया हुआ)

अतः $\angle 3 = \angle 4$

चूंकि है तो ΔAEC में

$AE = AC$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएं) ...(3)

अब ΔBAD में $EC \parallel AD$

तो $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{EA}$ (आधारभूत समानुपातिकता के विशिष्ट गुण)

या $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{AC}$ ((3) से)

या $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ इति सिद्धम्

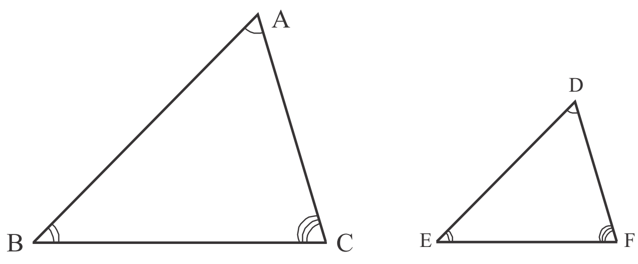
11.05 त्रिभुज की समरूपता

पिछले अनुच्छेद 11.3 में हमने पढ़ा है कि दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हो तथा (ii) संगत भुजाएँ समानुपाती हों

आकृति बनाकर समझे तो यदि ΔABC और ΔDEF में (देखिए आकृति 11.22)

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ हो तथा

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ हो तो ΔABC व ΔDEF परस्पर समरूप होते हैं



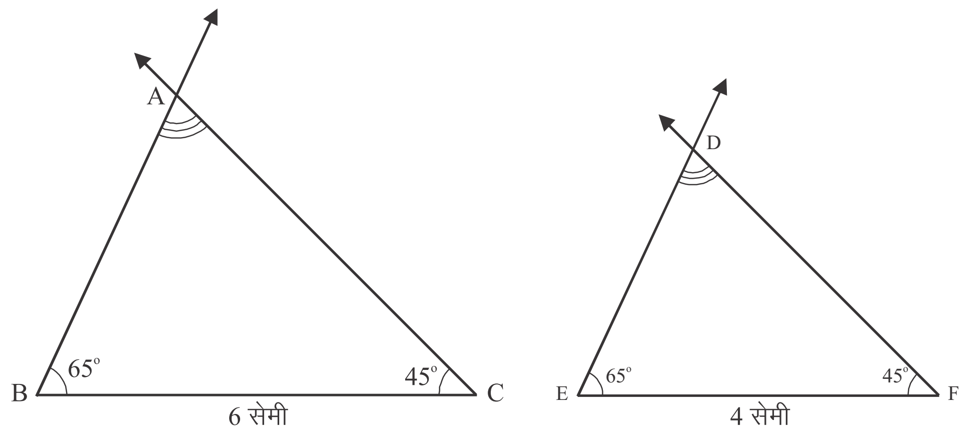
आकृति 11.22

आकृतियों में आप देख सकते है A, D के संगत, B, E के संगत तथा C, F के संगत है। संकेत में हम इन दोनों त्रिभुजों को समरूप बताने के लिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तरीके से लिखते हैं और "त्रिभुज ABC समरूप है ΔDEF के" पढ़ते हैं। याद कीजिए आपने कक्षा IX में सर्वांगसम के लिए संकेत"$\cong$" का प्रयोग किया था इस प्रकार समरूप के लिए संकेत "$\sim$" का प्रयोग होता है।

आपको याद होगा सर्वांगसम त्रिभुजों को सांकेतिक रूप से लिखते समय संगत शीर्षों का क्रम सही प्रकार से लिखे जाते हैं। इसी प्रकार त्रिभुजों की समरूपता को भी सांकेतिक लिखने के लिए उनके शीर्ष की संगतताओं को सही क्रम में लिखा जाना चाहिए। जैसा आकृति 11.25 में दोनों त्रिभुजों में समरूपता के लिए $\Delta ABC \sim \Delta EFD$ अथवा $\Delta ABC \sim \Delta FED$ नहीं लिख सकते हां इन्हें $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ या $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ या $\Delta BCA \sim \Delta EFD$ लिख सकते हैं।

पिछली कक्षा में आपने त्रिभुजों की सर्वांगसमता बताने के लिए इनके संगत अगों के आधार पर अनेक कसौटियों पर विस्तार से अध्ययन किया है। इसी प्रकार यहाँ भी समरूपता के लिए कुछ ऐसी कसौटियाँ प्राप्त करने का प्रयत्न करते हैं जिनमें त्रिभुजों संगत भागों के सभी छः युग्मों के स्थान पर कम से कम युग्मों के बीच सम्बन्ध स्थापित कर इन्हें समरूप बता सकें। आइए इस कड़ी में सर्वप्रथम निम्न प्रयोग के माध्यम से क्या परिणाम आता है, देखते है।

सबसे पहले दो असमान माप क्रमशः 6 सेमी और 4 सेमी के रेखाखण्ड BC एवं EF की रचना करते हैं। इसके बाद हम रेखाखण्ड BC एवं EF के बिन्दु B और E पर क्रमशः $65^\circ - 65^\circ$ तथा बिन्दु C व F पर क्रमशः $45^\circ - 45^\circ$ के कोण रचित रेखाखण्ड BC व EF को क्रमशः आधार रेखा मानते हुए बनाते हैं। इस प्रकार हमें दो त्रिभुज क्रमशः ΔABC एवं ΔDEF प्राप्त होते है (देखिए आकृति 11.23 में) क्या आप इन त्रिभुजों में शेष तीसरे कोण का मान ज्ञात कर सकते है? चूंकि Δ के तीनों कोणों का योग 180° होता है।



आकृति 11.23

$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ इसी प्रकार
$\angle D = 180^\circ - (\angle E + AF) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ उपरोक्त आकृति के द्वारा हमें ज्ञात हैं
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

इस प्रकार हम देखते हैं कि ΔABC एवं ΔDEF में तीनों संगत कोण परस्पर समान है। अर्थात् दोनों त्रिभुज समान कोणिक है। अब इनकी भुजाओं को स्केल की सहायता से मापकर संगत भुजाओं के मध्य अनुपात ज्ञात करते है।

$$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{4} = 1.5,$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

तथा $$\frac{AC}{DF} = \frac{5.85}{3.9} = 1.5$$

(यहाँ AB = 3.5 सेमी, DE = 3 सेमी, AC = 5.85 सेमी एवं DF = 3.9 सेमी मापने पर प्राप्त होता है।)

अर्थात् $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ प्राप्त होता है। आप समान संगत कोण वाले अनेक त्रिभुजों के युग्म बनाकर इस प्रयोग को दोहराएगें तो प्रत्येक बार वही परिणाम प्राप्त करेगें। इस प्रयोग से हमें ज्ञात होता है "दो समान कोणिक त्रिभुजों की संगत भुजाओं का

अनुपात सदैव समान आता है।" अब चूंकि समरूप त्रिभुजों की परिभाषा अनुसार दोनों त्रिभुजों के संगत कोण समान होने एवं संगत भुजाओं में समान अनुपात होने के कारण $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ होंगे।

प्रमेय–11.6 (**AAA** समरूपता नियम) दो समानकोणिक त्रिभुज, परस्पर समरूप होते है।

दिया हुआ हैः दो ΔABC एवं ΔDEF इस प्रकार के है कि इनके संगत कोण बराबर है।

अर्थात् $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$

सिद्ध करना हैः $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

रचनाः ΔABC की भुजा AB एवं भुजा AC के बराबर माप लेकर क्रमशः DP एवं DQ, ΔDEF की भुजाएं DE व DF में से काटिए और PQ को मिलाइए।

उपपत्तिः $AB = DP$ एवं $AC = DQ$ (रचना से)

$\angle A = \angle D$ (दिया हुआ)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (भुजा कोण भुजा प्रमेय से)

इसलिए $\angle B = \angle DPQ$ एवं $\angle C = \angle DQP$

परन्तु $\angle B = \angle E$ एवं $\angle C = \angle F$ (दिया हुआ)

अतः $\angle DPQ = \angle E$ एवं $\angle DQP = \angle F$ (चूंकि ये संगत कोण है)

अतः $PQ \parallel EF$

इसलिए $\dfrac{DP}{PE} = \dfrac{DQ}{QF}$ (आधारभूत समानुपातिका प्रमेय से)

या $\dfrac{PE}{DP} = \dfrac{QF}{DQ}$

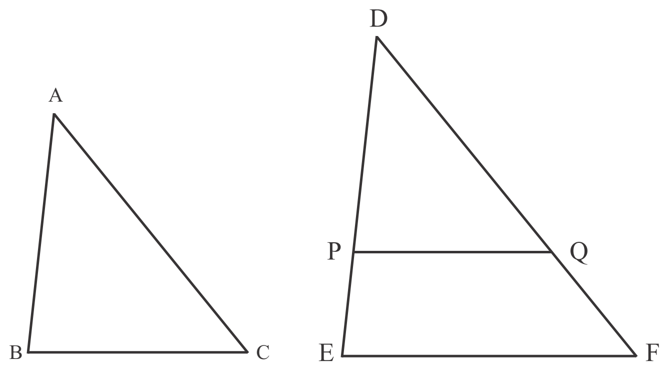
या $\dfrac{PE}{DP} + 1 = \dfrac{QF}{DQ} + 1$

या $\dfrac{PE + DP}{DP} = \dfrac{QF + DQ}{DQ}$

या $\dfrac{DE}{DP} = \dfrac{DF}{DQ}$

या $\dfrac{DP}{DE} = \dfrac{DQ}{DF}$

या $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$



आकृति 11.24

इस पद्धति से $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ भी ज्ञात किया जा सकता है।

इस प्रकार $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

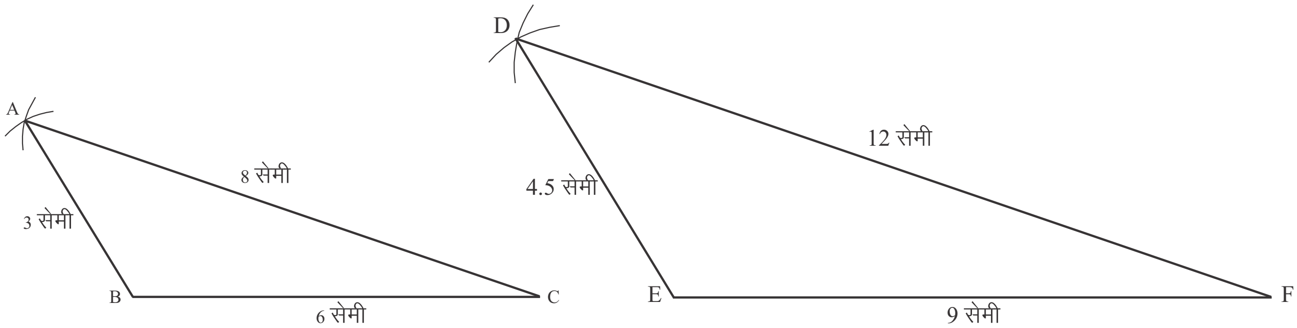
तो इस प्रकार ΔABC एवं ΔDEF में दो त्रिभुजों की समरूपता के गुण विद्यमान है।

अतः $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ इति सिद्धम्

यदि एक त्रिभुज के दो कोण किसी अन्य त्रिभुज के दो कोणों के क्रमशः समान हो तो त्रिभुज कोण योग गुणधर्म से दोनों के तीसरे कोण भी बराबर होंगे। अतः यहाँ (AAA समरूपता गुणधर्म) के स्थान पर (AA समरूपता गुणधर्म) से भी व्यक्त कर सकते हैं।

क्या सम्भव हैं यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती तो दोनों त्रिभुजों के संगत कोण भी बराबर होगें? तो आइए निम्न प्रयोग के माध्यम से जानकारी लेते हैं।

प्रयोगः ΔABC में $AB = 3$ सेमी, $BC = 6$ सेमी तथा $CA = 8$ सेमी इसी प्रकार DEF में $DE = 4.5$ सेमी, $EF = 9$ सेमी तथा $FD = 12$ सेमी लेकर त्रिभुजों की रचना करके प्रत्येक कोण प्रोटेक्टर की मदद से नाप कर दोनों त्रिभुजों के संगत कोणों की तुलना करेंगे।



आकृति 11.25

यहाँ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ $\quad$ ($\dfrac{2}{3}$ प्रत्येक संगत भुजाओं का अनुपात है)

मापन करने के पश्चात् $\angle A = \angle D = 40°, \angle B = \angle E = 120°, \angle C = \angle F = 20°$ प्राप्त हो रहे हैं अर्थात् संगत भुजाओं का अनुपात समान हो तो संगत कोण स्वतः समान होंगे। इस प्रकार $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ के। इसी प्रकार आप अनेक बार त्रिभुजों के युग्मों की रचना करके (जिनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान रखते हुए) प्रत्येक बार त्रिभुजों के संगत कोण बराबर प्राप्त कर सकते है।

आइए अब हम समरूपता के इस परिणाम को निम्न प्रेमय के माध्यम से सिद्ध करते हैं।

प्रमेय–11.7 (SSS समरूपता नियम) यदि दो त्रिभुजों में संगत भुजाओं का अनुपात बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज परस्पर समरूप होते है।

दिया हुआ हैः $\quad \Delta ABC$ एवं ΔDEF में $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ है

सिद्ध करना हैः $\quad \Delta ABC \sim \Delta DEF$

रचनाः $\quad \Delta DEF$ में $DP = AB$ और $DQ = AC$ काटिए तथा P और Q को मिलाइए।

उपपत्तिः $\quad \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ $\quad$ (दिया हुआ)

$\Rightarrow \quad \dfrac{DP}{DE} = \dfrac{DQ}{DF}$ $\quad$ (रचना से)

$\Rightarrow \quad PQ \parallel EF$ $\quad$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम से)

$\Rightarrow \quad \angle DPQ = \angle E$ तथा $\angle DQP = \angle F$ $\quad$ (संगत कोण)

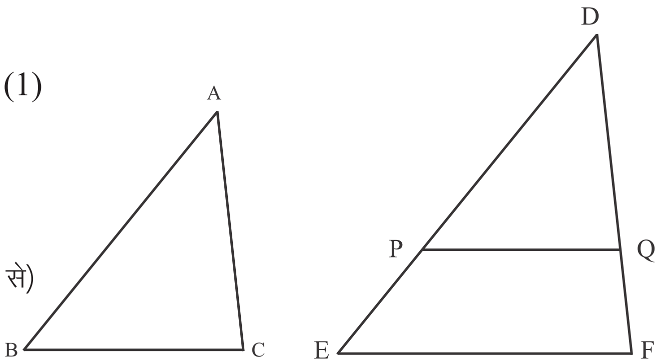
$\therefore \quad$ A A समरूपता गुण धर्म से

$\Delta DPQ \sim \Delta DEF \quad \ldots(1)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{DP}{DE} = \dfrac{PQ}{EF}$ $\quad$ (समरूपता गुणधर्म से)

$\Rightarrow \quad \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{PQ}{EF}$ $\quad$ ($\because AB = DP$ रचना से)

परन्तु $\quad \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ $\quad$ (दिया हुआ)



आकृति 11.26

अतः $\frac{PQ}{EF} = \frac{BC}{EF}$

या PQ = BC इस प्रकार ΔABC और ΔDPQ में

AB = DP, BC = PQ, और AC = DQ

अतः SSS सर्वांगसम नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ . . . (2)

(1) व (2) से $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ और $\Delta DPQ \sim \Delta DEF$ (दो सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते है)

अतः $\Delta ABC \sim DPQ$ और $\Delta DPQ \sim \Delta DEF$

या $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ इति सिद्धम्

प्रमेय–11.8 (SAS समरूपता नियम) यदि दो त्रिभुजों में कोई संगत दो भुजाएं परस्पर समानुपाती हो तथा उनके मध्य के कोण बराबर हो तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

दिया हुआ है: ΔABC एवं ΔDEF में $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ एवं $\angle A = \angle D$ है।

सिद्ध करना: ΔABC ~ ΔDEF

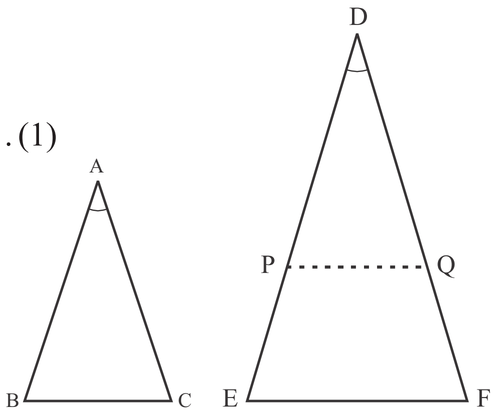
रचना: ΔDEF में AB = DP, AC = DQ क्रमशः DE एवं DF में से काटिए तथा P व Q को मिलाइए।

उपपत्तिः ΔABC एवं ΔDPQ में

AB = DP, $\angle A = \angle D$ तथा AC = DQ (रचना द्वारा)

अतः सर्वांगसमता के SAS नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ . . . (1)



आकृति 11.27

अब $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (दिया हुआ है)

$\Rightarrow \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ (रचना से AB = DP एवं AC = DQ)

$\Rightarrow$ PQ || EF (थेल्स प्रमेय के विलोम द्वारा)

$\Rightarrow \angle DPQ = \angle E$ एवं $\angle DQP = \angle F$ (संगत कोण)

इस प्रकार AA समरूपता नियम से

ΔDPQ ~ ΔDEF . . . (2)

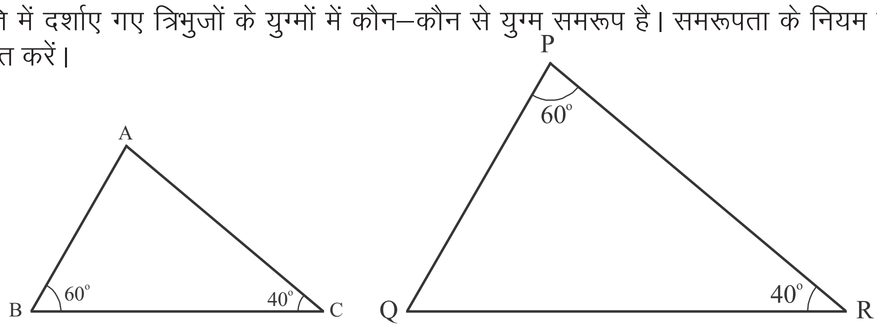
(1) व (2) से $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ तथा $\Delta DPQ \sim \Delta DEF$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DPQ$ तथा $\Delta DPQ \sim \Delta DEF$ (सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते है)

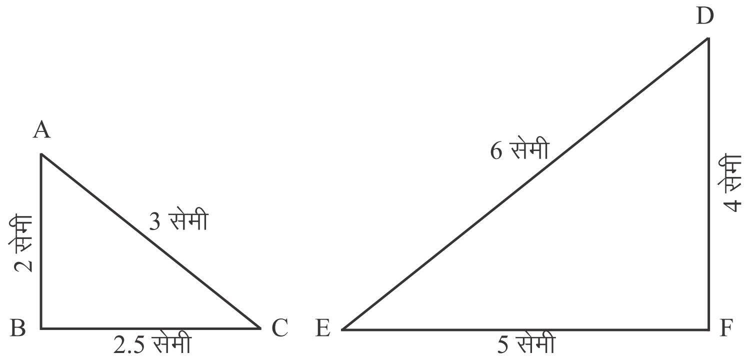
$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$ इति सिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

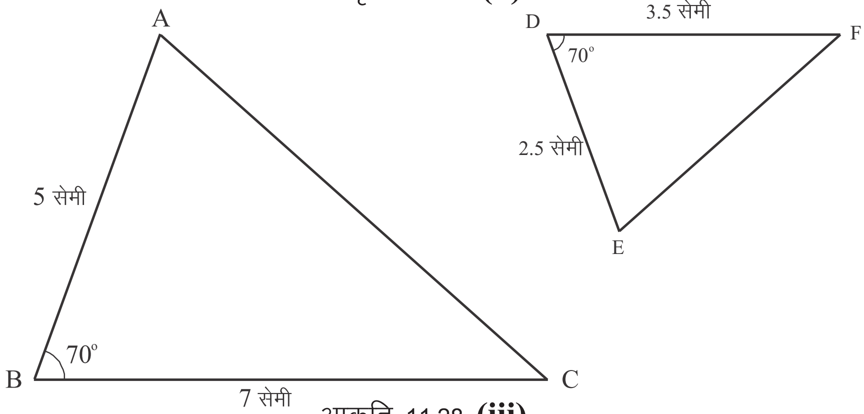
उदाहरण-1. आकृति में दर्शाए गए त्रिभुजों के युग्मों में कौन–कौन से युग्म समरूप है। समरूपता के नियम लिखते हुए सांकेतिक रूप से लिखकर व्यक्त करें।



आकृति 11.28 **(i)**



आकृति 11.28 **(ii)**



आकृति 11.28 **(iii)**

हल: (i) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$

चूंकि $\angle B = \angle P = 60°, \quad \angle C = \angle R = 40$

अत: $\angle A = 180 - (60 + 40) = \angle Q = 80°$

अत: AAA समरूपता प्रमेय द्वार $\Delta BCA \sim \Delta PRQ$ होगा

(ii) ΔABC व ΔDEF में

$$\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED} = \frac{1}{2}$$

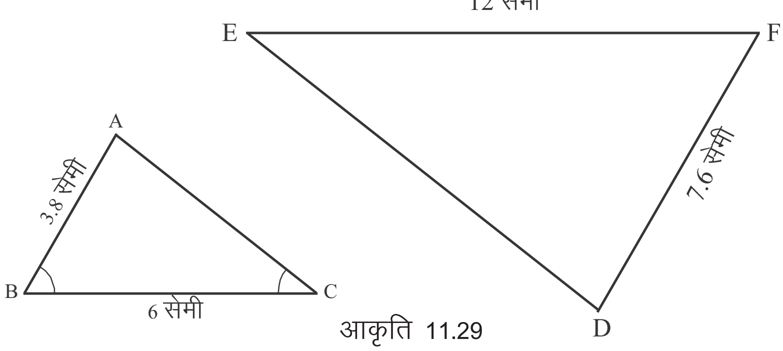
अत: SSS समरूपता प्रमेय से $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(iii) ΔABC व ΔDEF में

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF} = 2 \quad \text{एवं} \quad \angle ABC = 70° = \angle EDF$$

अत: SAS समरूपता प्रमेय से $\Delta ABC \sim \Delta EDF$

उदाहरण-2. दिए गए आकृति में ΔABC व ΔDEF को तुलनाकर $\angle D, \angle E$ एवं $\angle F$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.29

हल: ΔABC एवं ΔDEF में $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED} = \frac{1}{2}$

अतः SSS समरूपता प्रमेय से

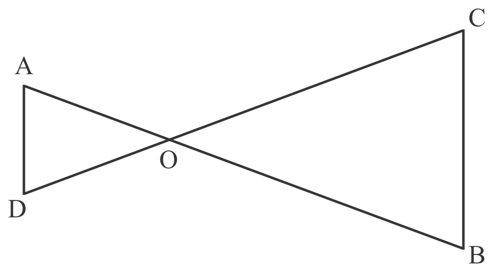
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\Rightarrow \angle A = \angle D,\ \angle B = \angle F$ एवं $\angle C = \angle E$

$\Rightarrow \angle F = 60°, \angle E = 40°$

$\Rightarrow \angle D = 180 - (60 + 40) = 80°$

उदाहरण-3. आकृति में यदि $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ है तो दर्शाइए $\angle A = \angle C$ व $\angle B = \angle D$



आकृति 11.30

हल: ΔAOD व ΔBOC में $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ दिया हुआ है

अतः $\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$ . . .(1)

तथा $\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण) . . . (2)

(1) व (2) से $\Delta AOD \sim \Delta COB$

इसलिए $\angle A = \angle C$ एवं $\angle D = \angle B$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण) इति सिद्धम्

उदाहरण-4. आकृति में QA तथा PB, AB पर लम्ब है यदि AB = 16 सेमी, $OQ = 5\sqrt{3}$ सेमी और $OP = 3\sqrt{13}$ सेमी है तो AO एवं BO के मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔAOQ एवं ΔBOP में $\angle OAQ = \angle OBP$ (प्रत्येक 90°)

$\angle AOQ = \angle BOP$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः A A समरूपता प्रमेय द्वारा

$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP}$ . . . (1)

परन्तु $AB = AO + BO = 16$ सेमी

माना कि $AO = x$ तो $BO = 16 - x$.

अतः $\frac{x}{16-x} = \frac{OQ}{OP}$ ((1) से)

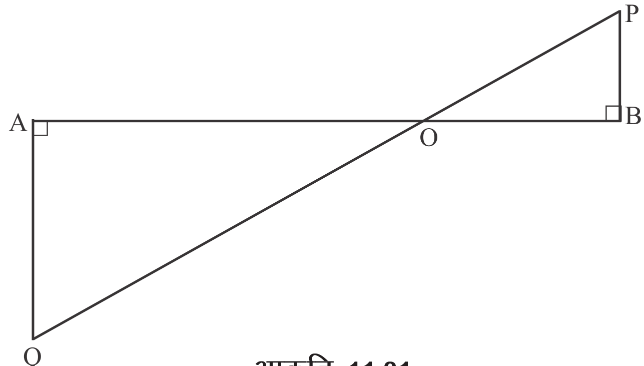
या $\frac{x}{16-x} = \frac{5\sqrt{13}}{3\sqrt{13}}$

या $3x = 80 - 5x$

या $8x = 80$

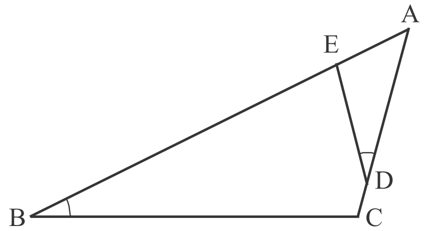
या $x = 10$ सेमी अतः $AO = 10$ सेमी

एवं $BO = 16 - 10 = 6$ सेमी



आकृति 11.31

उदाहरण-5. आकृति में $\angle ADE = \angle B$ और AD = 3.8 सेमी, AE = 3.6 सेमी, BE = 2.1 सेमी और BC = 4.2 सेमी तो DE का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.32

हलः ΔADE एवं ΔABC में

$\angle ADE = \angle B$ (दिया हुआ) $\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

अतः AA समरूपता प्रमेय से $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

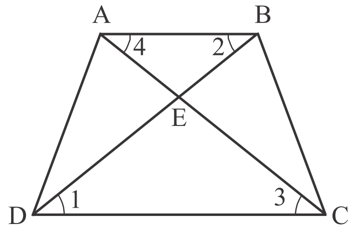
$$\text{या} \quad \frac{AD}{AE+EB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3.8}{3.6+2.1} = \frac{DE}{4.2}$$

$$\text{या} \quad DE = \frac{3.8 \times 4.2}{5.7} = \frac{15.96}{5.7}$$

या DE = 2.8 सेमी

उदाहरण-6. आकृति में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसकी AB || DC है। यदि $\Delta AED \sim \Delta BEC$ हो तो सिद्ध कीजिए AD = BC है।



आकृति 11.33

हलः ΔEDC एवं ΔEBA में

$\angle 1 = \angle 2$ एवं $\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोण)

तथा $\angle DEC = \angle AEB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः AAA समरूपता प्रमेय द्वारा

$\Delta EDC \sim \Delta EBA$

$$\text{अतः} \quad \frac{ED}{EB} = \frac{EC}{EA}$$

$$\text{या} \quad \frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA} \qquad \ldots (1)$$

चूंकि $\Delta AED \sim \Delta BEC$

$$\text{अतः} \quad \frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{BC} \qquad \ldots (2)$$

$$\text{(1) व (2) से} \quad \frac{EB}{EA} = \frac{AE}{BE}$$

या $(BE)^2 = (AE)^2$

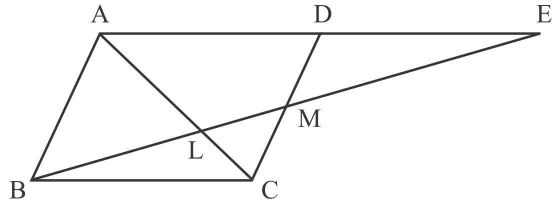
या BE = AE

$$\text{(2) में BE = AE रखने पर} \quad \frac{AE}{AE} = \frac{AD}{BC}$$

$$\text{या} \quad \frac{AD}{BC} = 1$$

या AD = BC इति सिद्धम्

उदाहरण-7. समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजा CD के मध्य बिन्दु M को B से मिलाने वाली रेखा AC को L पर काटती है। यदि AD व BM को आगे बढ़ावें तो वह E पर मिलती है तो सिद्ध कीजिए। EL = 2 BL



आकृति 11.34

हल: ΔBMC व ΔEMD में

$MC = MD$ (M, CD का मध्य बिन्दु है)

$\angle CMB = \angle DME$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle MCB = \angle MDE$ (एकान्तर कोण)

अतः ASA सर्वांगसम नियम द्वारा

$\Delta BMC \cong \Delta EMD$

अतः $BC = ED$ परन्तु $AD = BC$ (ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है)

और $AE = AD + DE$

या $AE = BC + BC$

या $AE = 2BC$ . . . (1)

ΔAEL व ΔCBL में

$\angle ALE = \angle CLB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle EAL = \angle BCL$ (एकान्तर कोण)

अतः AA समरूपता प्रमेय द्वारा

$\Delta AEL \sim \Delta CBL$

$$\Rightarrow \frac{EL}{BL} = \frac{AE}{CB}$$

$$\Rightarrow \frac{EL}{BL} = \frac{2BC}{BC} \quad \text{(समीकरण (1) से)}$$

$$\Rightarrow \frac{EL}{BL} = 2$$

$\Rightarrow$

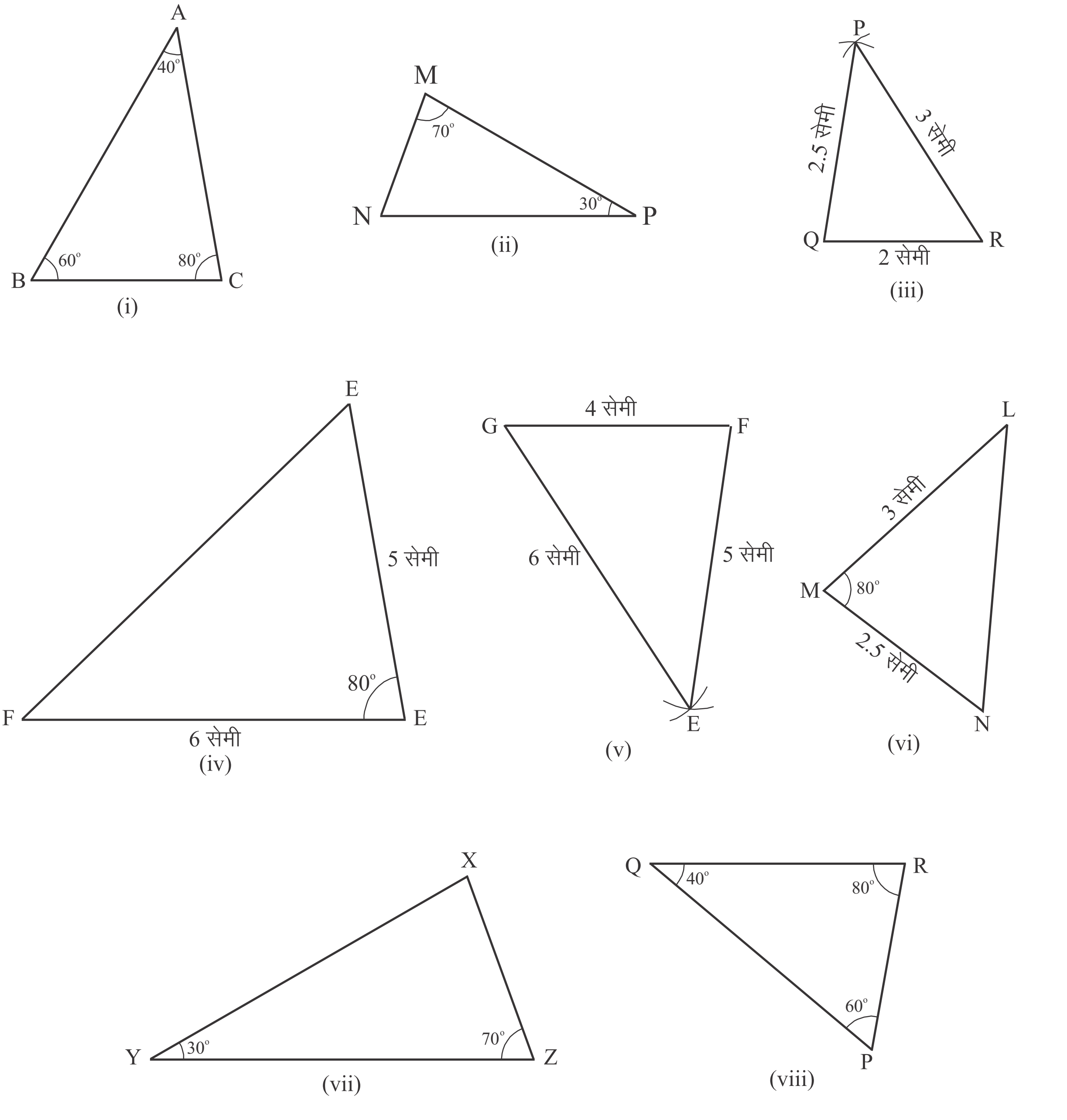
$EL = 2\ BL$ इति सिद्धम्

प्रश्नमाला 11.3

1. दो त्रिभुज ABC और PQR में $\frac{AB}{PQ}$ और $\frac{BC}{QR}$ दोनों त्रिभुजों में से दो कोणों के नाम बताइए जो बराबर होना चाहिए, ताकि ये दोनों Δ समरूप हो सके। अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।
2. त्रिभुजों ABC एवं DEF में, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle F$ हो तो क्या $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
3. यदि त्रिभुज $ABC \sim \Delta FDE$ हो तो क्या $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ बताया जा सकता है? उत्तर को कारण सहित लिखिए।
4. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण के क्रमशः समानुपाती एवं बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते है। क्या यह कथन सत्य है? कारण सहित उत्तर लिखिए।

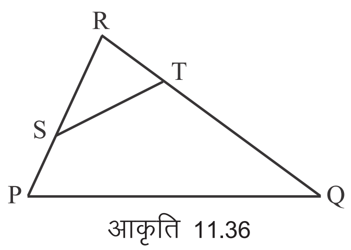
5. समान कोणिक त्रिभुजों से क्या तात्पर्य है? इनमें परस्पर क्या सम्बन्ध हो सकता है?

6. निम्न दिए गए त्रिभुजों की आकृतियों में से समरूप त्रिभुज युग्मों का चयन कीजिए। और उन्हें समरूप होने की सांकेतिक भाषा में लिखिए।



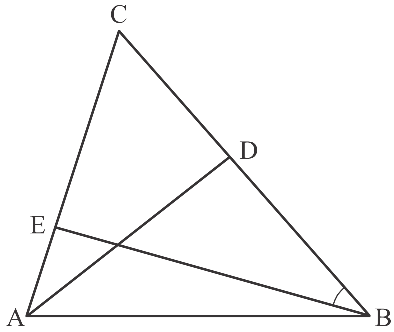
आकृति 11.35

7. आकृति में $\Delta PRQ \sim \Delta TRS$ हो तो बताइए इस समरूप त्रिभुज युग्म में कौन–कौन से कोण परस्पर समान होने चाहिए?



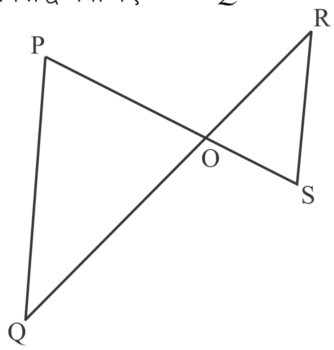
आकृति 11.36

8. आपको आकृति में स्थित उन दो त्रिभुजों का चयन करना है जो परस्पर समरूप है। यदि $\angle CBE = \angle CAD$ है।



आकृति 11.37

9. आकृति में PQ और RS समान्तर है तो सिद्ध कीजिए $\Delta POQ \sim \Delta SOR$



आकृति 11.38

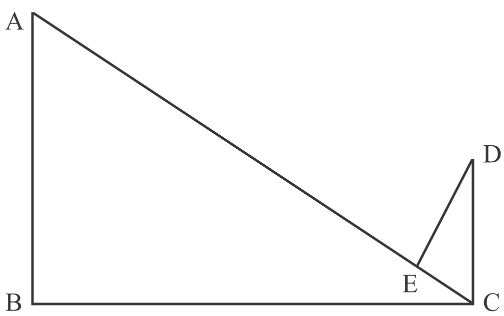
10. 90 सेमी. की लम्बाई वाली लड़की बल्ब लगे खम्बे के आधार से परे 1.2 मीटर / सैकण्ड की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6 मीटर की ऊँचाई पर हो तो 4 सैकण्ड के बाद उस लड़की की छाया कितने मीटर होगी?

11. 12 मीटर लम्बाई वाले उर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लम्बाई 8 मीटर है, उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 56 मीटर हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

12. किसी ΔABC के शीर्ष A से उसकी सम्मुख भुजा BD पर लम्ब डालने पर $AD^2 = BD \times DC$ प्राप्त होता है तो, सिद्ध कीजिए ABC एक समकोण त्रिभुज है।

13. सिद्ध कीजिए किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को क्रमशः मिलाने पर बनने वाले चारों त्रिभुज अपने मूल त्रिभुज के समरूप होते है।

14. आकृति दर्शाए अनुसार यदि $AB \perp BC, DC \perp BC$ और $DE \perp AC$ हो तो सिद्ध कीजिए। $\Delta CED \sim \Delta ABC$



आकृति 11.39

15. ΔABC की भुजा BC के मध्य बिन्दु D है। यदि AD का समद्विभाजन करती हुई एक रेखा B से इस प्रकार खींची जाए कि वह भुजा AD को E पर काटते हुए AC को X पर काटे तो सिद्ध कीजिए $\frac{EX}{BE} = \frac{1}{2}$ है।

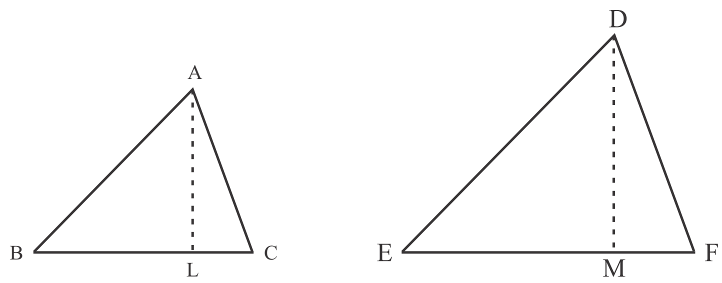
11.5.2 दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल

इस अनुच्छेद में हम दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपातों के बारे में अध्ययन करेगें।

प्रमेय–11.13 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।

दिया हुआ है: ΔABC एवं ΔDEF में $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है

सिद्ध करना: $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2}$



आकृति 11.40

रचना: $AL \perp BC$ एवं $DM \perp EF$ खींचा

उपपत्तिः $\because$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\therefore$ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E,$ और $\angle C = \angle F$ . . . (1)

एवं $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$

ΔALB व ΔDME में . . . (1)

$\angle ALB = \angle DME$ (प्रत्येक कोण $90°$)

$\angle B = \angle E$ (1 के द्वारा)

अतः $\Delta ALB \sim \Delta DME$ (A-A समरूपता प्रमेय द्वारा)

$\Rightarrow \dfrac{AL}{DM} = \dfrac{AB}{DE}$ . . . (3)

(2) व (3) से $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AL}{DM}$ . . . (4)

अब $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{\frac{1}{2} BC \times AL}{\frac{1}{2} EF \times DM}$ (त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई)

$= \dfrac{BC}{EF} \times \dfrac{AL}{DM}$

$= \dfrac{BC}{EF} \times \dfrac{BC}{EF}$ ((4) से)

$= \dfrac{BC^2}{EF^2}$

परन्तु $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

$$\frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

इति सिद्धम्

इस प्रमेय के माध्यम से हम अन्य परिणाम भी प्राप्त कर सकते हैं जिन्हें निम्न उपप्रमयों के रूप में लिखा जा सकता है।

उपप्रमेय–11.2 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात किसी एक शीर्ष से डाले गए संगत लम्ब के वर्गों के अनुपातों के बराबर होता है।

उपप्रमेय–11.3 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत माध्यिकाओं के वर्गों के अनुपातों के बराबर होता है।

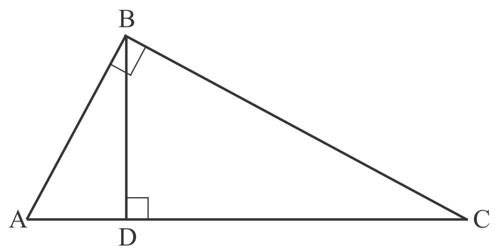
उपप्रमेय–11.4 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत कोणों के समद्विभाजकों के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

11.5.3 समरूपता की अवधारणा से बोधायन प्रमेय का सत्यापन

पिछली कक्षाओं में आपने बोधायन प्रमेय के बारे में अध्ययन किया है। इस पर आधारित अनेक प्रश्न हल किये है तथा उपपत्ति कक्षा IX में आपने देखी। यहां हम इस प्रमेय को त्रिभुजों की समरूपता की अवधारणा का प्रयोग करके सिद्ध करेगें।

प्रमेय–11.9 समकोण त्रिभुज में, कर्ण पर बना कोण शेष भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

दिया हुआ है: ABCD एक समकोण त्रिभुज है। जिसका कोण B 90°है।



आकृति 11.41

सिद्ध करना: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना: B से AC पर लम्ब BD डाला ।

उपपत्ति: ΔADB एवं ΔABC में

$\angle ADB = \angle ABC$ (प्रत्येक 90° दिया हुआ एवं रचना से)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

अतः AA समरूपता प्रमेय से

$\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय)

$\Rightarrow \quad AB^2 = AC \times AD$ .....(1)

ΔBDC एवं ΔABC में

$\angle CDB = \angle ABC$ (प्रत्येक कोण 90° दिया हुआ एवं रचना से)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

अतः A–A समरूपता प्रमेय से

$\Delta CDB \sim \Delta CBA$

$\frac{CD}{CB} = \frac{BC}{AC}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय)

या $\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow \quad BC^2 = AC \times DC$ .....(2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times DC$

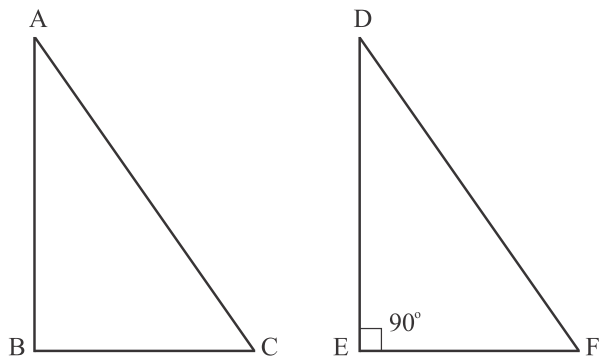
$\Rightarrow \quad AB^2 + BC^2 = AC(AD + DC)$

$\Rightarrow \quad AB^2 + BC^2 = AC \times AC$

$\Rightarrow \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$ इति सिद्धम्

आइए अब हम इस प्रमेय की विलोम भी समरूपता अवधारणा का ही प्रयोग करके पुनः सिद्ध करते है।

प्रमेय–11.10 (बोधायन प्रमेय का विलोम) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं पर बने वर्गों का योग उसकी तीसरी भुजा पर बने वर्ग के बराबर हो तो, वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।



आकृति 11.42

दिया हुआ है: ΔABC में $AC^2 = AB^2 + BC^2$

सिद्ध करना: ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

रचना: एक समकोण त्रिभुज DEF की रचना इस प्रकार करे कि $DE = AB, EF = BC$ एवं $\angle E = 90°$ हो।

उपपत्ति: $DF^2 = DE^2 + EF^2$ (वो धायन प्रमेय से)

$\Rightarrow \quad DF^2 = AB^2 + BC^2$ (रचना से)

परन्तु $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (दिया हुआ)

अतः $AC^2 = DF^2$

या $AC = DF$ .....(1)

ΔABC एवं ΔDEF में

$AB = DE, BC = EF$ (रचना से)

एवं $AC = DF$ [1] से

अतः SSS सर्वांगसमता प्रमेय से

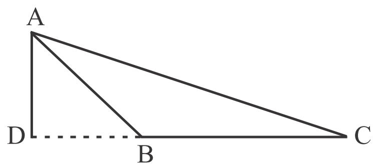
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

$\Rightarrow \quad \angle B = \angle D = 90°$

$\Rightarrow \quad \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है। इति सिद्धम्

11.5.3 बोधायन प्रमेय पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

प्रमेय–11.11 एक अधिक कोण त्रिभुज ABC जिसका $\angle B$ अधिक कोण हो और $AD \perp BC$ है तो



आकृति 11.43

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$

दूसरे शब्दों में अधिक कोण त्रिभुज में अधिक कोण के सम्मुख भुजा का वर्ग शेष दोनों भुजाओं के वर्गों एवं एक भुजा व दूसरी

भुजा से का पहली भुजा पर पक्ष के गुणनफल के दुगने के योग के बराबर होता है।

दिया हुआ हैः ABC एक अधिक कोण त्रिभुज हैं, जिसमें $\angle B$ अधिक कोण है।

सिद्ध करनाः $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times DB$

उपपत्तिः ΔADB में $\angle D = 90°$ है। (दिया हुआ है)

अतः $AB^2 = AD^2 + DB^2$ .....(1)

अब ΔADC में

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

या $AC^2 = AD^2 + (DB + BC)^2$

या $AC^2 = AD^2 + DB^2 + BC^2 + 2DB \times BC$

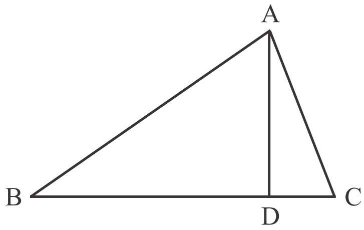
या $AC^2 = [AD^2 + DB^2] + BC^2 + 2DB \times BC$

या $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times DB$ [1] से इति सिद्धम्

यदि यहाँ अधिक कोण त्रिभुज के स्थान पर न्यून कोण त्रिभुज होता तो परिणाम निम्नानुसार प्राप्त होता है।

प्रमेय–11.12 ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है, और $AD \perp BC$ तो

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$



आकृति 11.44

(न्यून कोण त्रिभुज में किसी एक भुजा का वर्ग शेष दोनों भुजाओं के वर्गों के योग में से एक भुजा व दूसरी भुजा से पहली भुजा पर प्रक्षेपण के गुणनफल के दुगने में से घटाने पर प्राप्त मान के बराबर होता है।)

दिया हुआ हैः ABC एक त्रिभुज हैं जिसमें $AD \perp BC$ है।

सिद्ध करनाः $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$

उपपत्तिः $AB^2 = AD^2 + BD^2$ .....(1) (ΔABD एक समकोण त्रिभुज है)

इसी प्रकार $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (ΔADC समकोण त्रिभुज है)

$AC^2 = AD^2 + (BC - BD)^2$ (आकृति से $DC = BC - BD$)

$\Rightarrow$ $AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD$

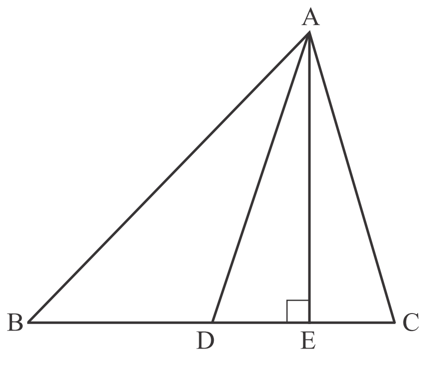
$\Rightarrow$ $AC^2 = (AD^2 + BD^2) + BC^2 - 2BC \times BD$

$\Rightarrow$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$ [1] से

$\Rightarrow$

अर्थात् $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$ इति सिद्धम्

उपप्रमेय– त्रिभुज दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली माध्यिका के वर्ग एवं तीसरी भुजा के आधे के वर्ग के योग के दुगने के बराबर होता है।



आकृति 11.45

दिया हुआ है:　ABC एक त्रिभुज हैं जिसमें AD उसकी एक माध्यिका है।

सिद्ध करना:　$AB^2+AC^2= 2\left[AD^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$

या　$AB^2+AC^2=2[AD^2+BD^2]$

रचना:　$AE \perp BC$ की रचना कीजिए।

उपपत्ति–　$\angle AED = 90°$, ΔADE में हम देखते हैं।

$\angle ADE < 90° \Rightarrow \angle ADB > 90°$

इस प्रकार　ΔADB एक अधिक कोण त्रिभुज एवं ΔADC न्यून कोण त्रिभुज होंगें।

∴　अधिक कोण ΔABD में BD को आगे बढ़ाने पर और $AE \perp BD$　अतः प्रमेय–11.11 से

$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \times DE$　. . . (1)

ΔACD एक न्यून कोण त्रिभुज हैं और $AE \perp CD$ तो प्रमेय–11.12 से

$AC^2=AD^2+DC^2-2DC \times DE$

या　$AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \times DE$　[∵ CD = BD]　. . . (2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$AB^2+AC^2=AD^2+BD^2+2BD \times DE+AD^2+BD^2-2BD \times DE$

या　$AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^2$

या　$AB^2+AC^2=2AD^2+2\left(\frac{BC}{2}\right)^2$

या　$AB^2+AC^2= 2\left[AD^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$

अर्थात्　$AB^2+AC^2= 2\left[AD^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$ अथवा $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$　इति सिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. 10 मीटर लम्बी एक सीढ़ी को एक दीवार पर टिकाने से वह भूमि से 8 मीटर ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुंचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल:　आकृति के अनुसार ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका $\angle B = 90°$ हैं

अतः　बौधायन प्रमेय से

$AC^2=AB^2+BC^2$

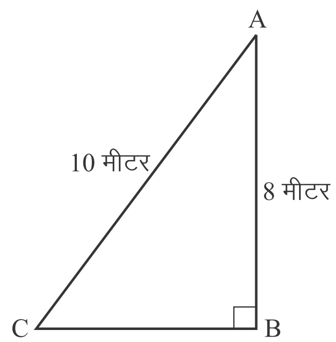
या　$BC^2=AC^2-AB^2$

या　$BC^2=10^2-8^2$

या　$BC^2=100-64$

या　$BC^2=36$

या　$BC = \sqrt{36} = 6$ मीटर



आकृति 11.46

उदाहरण-2. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 किमी/घ. की चाल से उड़ता है उसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 किमी/घ. की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद दोनों हवाई जहाजों के मध्य की दूरी कितनी होगी।

हल: प्रथम हवाईजहाज की उत्तर दिशा में $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद हवाई अड्डे से दूरी = चाल × समय $= 1000 \times \frac{3}{2} = 1500$ किमी

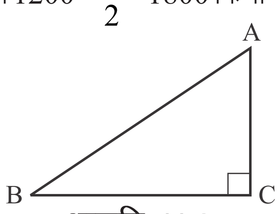
दूसरे हवाईजहाज की पश्चिम दिशा में घंटे बाद हवाई अड्डे से दूरी = चाल × समय $1200 \times \frac{3}{2} = 1800$ किमी

आकृतिानुसार $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (बोधायन प्रमेय)

$AB^2 = 1500^2 + 1800^2$

$= 2250000 + 3240000$

$= 5490000 = 30\sqrt{61}$ किमी



आकृति 11.47

उदाहरण-3. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है जिनमें AB = 2.2 सेमी. और DE = 3.3 सेमी. हो तो ΔABC और ΔDEF के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते है। दो त्रिभुज समरूप हो तो उनकी संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात उनके क्षेत्रफलों के बराबर होता है।

अतः $$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(2.2)^2}{3.3^2} = \left(\frac{22}{33}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

उदाहरण-4. दो समरूप त्रिभुज ABC और PQR की संगत भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल क्रमशः 36 वर्ग सेमी एवं 49 वर्ग सेमी है।

हल: हम जानते है कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपातों के बराबर होता है।

अतः $$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2} = \frac{36}{49}$$

या $$\frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$$

उदाहरण-5. यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हो ΔABC का क्षेत्रफल = 16 सेमी² एवं ΔPQR का क्षेत्रफल 9 सेमी² तथा AB = 2.1 सेमी हो तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: $$\because \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{(2.1)^2}{PQ^2}$$

दोनों ओर वर्ग मूल लेने पर

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2.1}{PQ}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{2.1 \times 3}{4} = \frac{6.3}{4} = 1.575 \text{ सेमी.}$$

उदाहरण-6. आकृति में ΔABC में एक रेखा जो BC के समान्तर है, AB और AC को क्रमशः D व E पर काटती हुई इस प्रकार निकलती हैं कि AD : DB = 1 : 2 हो जाता हैं, तो इस प्रकार बने समलम्ब चतुर्भुज BDEC एवं ΔADE क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: चूंकि $\ell \parallel BC$

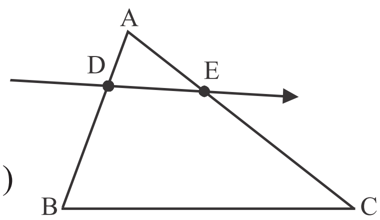
अतः $\angle ADE = \angle B$ एवं $\angle AED = \angle C$ (संगत कोण)

अतः ΔADE व ΔABC में

$\angle ADE = \angle B$

एवं $\quad \angle AED = \angle C$

$\Rightarrow \quad \Delta ADE \sim \Delta ABC$ (AA समरूपता प्रमेय)



आकृति 11.48

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AD^2}{AB^2} \quad \ldots(1)$$

परन्तु $\quad \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{AD+DB} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = \frac{AD}{AB} \quad \ldots(2)$$

(1) व (2) से $\quad \dfrac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{1^2}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow \quad \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= 9 \times \Delta ADE$ का क्षेत्रफल $\quad \ldots(3)$

किन्तु समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल $= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $- \Delta ADE$ का क्षेत्रफल

$\Rightarrow \quad$ समीकरण (3) से समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल

$= 9 \times \Delta ADE$ का क्षेत्रफल $- \Delta ADE$ का क्षेत्रफल

$\Rightarrow \quad$ समलम्ब BDEC का क्ष्झेत्रफल $= 8 \times \Delta ADE$ का क्षेत्रफल

या $\quad \dfrac{\text{समलम्ब } BDEC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{8}{1}$

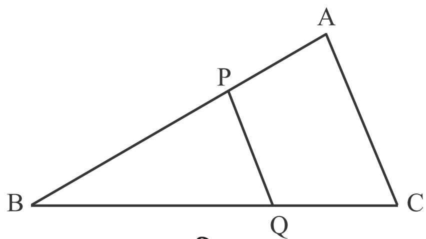
उदाहरण-7. आकृति 11.49 के अनुसार एक त्रिभुज ABC की भुजा AC के समान्तर रेखाखण्ड PQ उसकी भुजा AB और AC को इस प्रकार विभाजित करती है कि $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ हो तो सिद्ध कीजिए रेखा खण्ड PQ, ΔABC को समान क्षेत्रफल में विभाजित करती है।

हल: दिया हुआ है: $\because$ PQ $\|$ AC दिया हुआ है।

अतः: $\quad \angle A = \angle BPQ$ (संगत कोण)

एवं $\quad \angle C = \angle BQP$ (संगत कोण) एवं $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

अतः: $\quad \Delta BAC \sim \Delta BPQ$ (AA समरूपता प्रमेय से)



आकृति 11.49

सिद्ध करना है: $\quad \Delta BPQ$ का क्षेत्रफल $=$ समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल

या $\quad$ समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \Delta BAC$ का क्षेत्रफल $= \Delta BPQ$ का क्षेत्रफल (दिया हुआ है)

अर्थात् $\quad 2\Delta BPQ$ का क्षेत्रफल $= \Delta BAC$ का क्षेत्रफल भी सिद्ध करेगें तो प्रश्न हल हो जाएगा।

उपपत्ति: चूंकि $\quad \Delta BAC \sim \Delta BPQ$ या $\Delta BPQ \sim \Delta BAC$

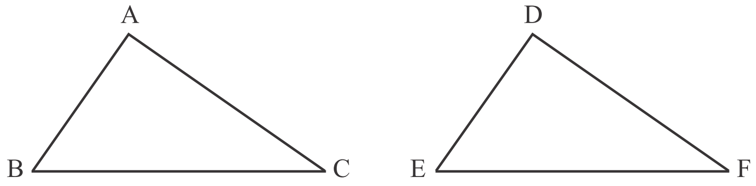
अतः: $\quad \dfrac{\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{BP^2}{BA^2}$

या $\quad \dfrac{\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{1^2}{\sqrt{2}^2}$

या $\quad \dfrac{\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{1}{2}$

या $\quad 2\Delta BPQ$ का क्षेत्रफल $= \Delta BAC$ का क्षेत्रफल $\qquad$ इति सिद्धम्

उदाहरण-8. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगमस होते है।



आकृति 11.50

हलः दिया हुआ हैः $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ एवं ΔABC का क्षेत्रफल $= \Delta DEF$ का क्षेत्रफल

सिद्ध करनाः $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उपपत्तिः $\because$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\therefore$ ΔABC एवं ΔDEF समानकोणिक त्रिभुज है।

एवं $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$

या $1 = \dfrac{BC^2}{EF^2}$ (दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान है दिया हुआ है)

या $BC^2 = EF^2$ या $BC = EF$ . . . (1)

$\Rightarrow$ ΔABC व ΔDEF में

$\angle B = \angle E$ (समानकोणिक त्रिभुज से)

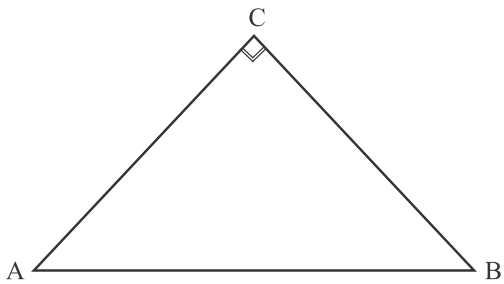
$BC = EF$ ((1) से)

$\angle C = \angle F$ (समान कोणिक त्रिभुज से)

अतः A S A सर्वांगसम प्रमेय से

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उदाहरण-9. ABC एक समद्विबाहू त्रिभुज है, जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए $AB^2 = 2AC^2$ है।



आकृति 11.51

हलः ABC एक समकोण त्रिभुज है। जिसमें

$\angle C = 90°, \; AC = BC$ (दिया हुआ) . . . (1)

समकोण त्रिभुज में बोधायन प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

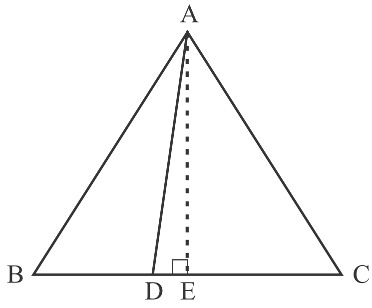
या $AB^2 = AC^2 + AC^2$ [(1)] से

या $AB^2 = 2AC^2$ इति सिद्धम

उदाहरण-10. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है, तो सिद्ध कीजिए। $9AD^2 = 7AB^2$ है।

हलः ∵ ΔABC एक समबाहू त्रिभुज है। और A से BC पर AE लम्ब डाला है

अतः किसी भी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उसका समद्विभाजन करता हैं।



आकृति 11.52

अतः $BE = EC = \frac{1}{2}BC$ [रचना से]

तथा $BD = \frac{1}{3}BC$ [दिया हुआ है]

एवं $AB = BC = CA$ [दिया हुआ है]

समकोण ΔABE में $AB^2 = AE^2 + BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$ $\left[\because BE = \frac{1}{2}BC\right]$

या $AE^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4}$

या $AE^2 = \frac{4AB^2 - BC^2}{4}$ . . . (1)

समकोण ΔADE में

$AD^2 = AE^2 + DE^2$

या $AE^2 = AD^2 - DE^2$

या $AE^2 = AD^2 - (BE - BD)^2$

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC\right)^2$ $\left[\because BE = \frac{1}{2}BC \text{ एवं } BD = \frac{1}{3}BC\right]$

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{BC}{6}\right)^2$

या $AE^2 = \frac{36AD^2 - BC^2}{36}$ .....(2)

(1) व (2) से $\frac{4AB^2 - BC^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

या $\frac{4AB^2 - AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$ $[\because AB = BC = CA]$

या $\frac{3AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

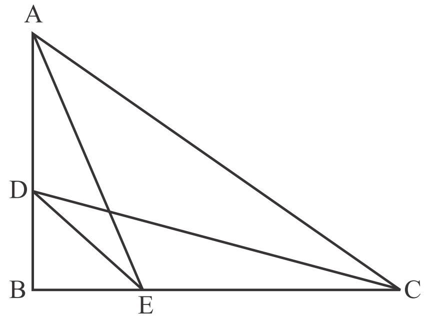
या $27AB^2 = 36AD^2 - AB^2$

या $28AB^2 = 36AD^2$

या $7AB^2 = 9AD^2$

अर्थात् $9AD^2 = 7AB^2$ इति सिद्धम

उदाहरण-11. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण $\angle B = 90°$ है। माना कि D और E क्रमशः AB एवं BC पर दोबिन्दु स्थित है। सिद्ध कीजिए $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$



आकृति 11.53

हल: ΔABE समकोण त्रिभुज है तथा $\angle B = 90°$

$\therefore$ $AE^2 = AB^2 + BE^2$ . . . (1)

पुनः ΔDBC समकोण त्रिभुज है और $\angle B = 90°$

$CD^2 = BD^2 + BC^2$ . . . (2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$AE^2 + CD^2 = (AB^2 + BC^2) + (BE^2 + BD^2)$ . . . (3)

इसी प्रकार समकोण ΔABC एवं समकोण ΔDBE में

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ एवं $DE^2 = BE^2 + BD^2$ . . . (4)

(3) व (4) से

$AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ इति सिद्धम्

प्रश्नमाला 11.4

1. निम्न के उत्तर सत्य एवं असत्य में देना है। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए (यदि सम्भव हो)

   (i) दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 4 : 9 है तो इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 9 है।

   (ii) दो त्रिभुजों क्रमशः ABC व DEF में यदि $\dfrac{\Delta ABC \text{ क`क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ क`क्षेत्रफल}} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{9}{4}$ है तो $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ होगा।

   (iii) दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी भुजाओं के वर्गों के समानुपाती होता है।

   (iv) ΔABC एवं ΔAXY समरूप हो और उनके क्षेत्रफलों का मान समान हो तो XY, एवं BC सम्पाती भुजाएँ हो सकती है।

2. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 वर्ग सेमी. और 121 वर्ग सेमी. है यदि EF = 15.4 सेमी हो तो BC ज्ञात कीजिए।

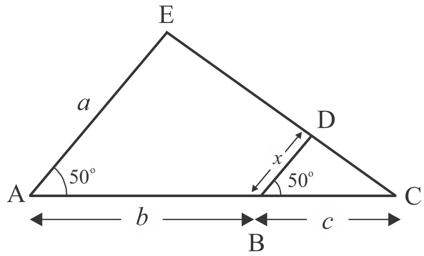
3. एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC एवं DBC बने हैं। यदि AD व BC परस्पर O पर प्रतिच्छेद करे तो सिद्ध कीजिए
   $$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AO}{DO}$$

4. निम्न प्रश्नों के हल ज्ञात कीजिए।

   (i) ΔABC में DE || BC एवं AD : DB = 2 : 3 हो तो ΔADE एवं ΔABC के क्षेत्रफलों के अनुपात ज्ञात कीजिए।

   (ii) रेखा खण्ड AB के बिन्दु A व B पर PB और QA लम्ब है। यदि P व Q, AB के दोनों ओर स्थित हो और P व Q को मिलाने पर वह AB को O पर प्रतिच्छेद करे तथा PO = 5 सेमी, QO = 7 सेमी, ΔPOB का क्षेत्रफल 150 सेमी^{2} हो तो ΔQOA का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   (iii) आकृति में x का मान a, b एवं c के पदों में ज्ञात कीजिए।



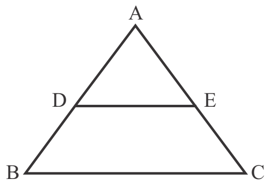
आकृति 11.54

5. ΔABC में $\angle B = 90°$ हो एवं BD कर्ण AC पर लम्ब हो तो सिद्ध कीजिए। $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

6. सिद्ध कीजिए कि वर्ग की एक भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

विविध प्रश्नमाला–11

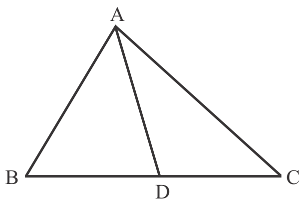
1. आकृति में $DE || BC$ हो, $AD = 4$ सेमी. $DB = 6$ सेमी एवं $AE = 5$ सेमी हो, तो EC का मान होगा–



आकृति 11.55

(क) 6.5 सेमी (ख) 7.0 सेमी (ग) 7.5 सेमी (घ) 8.0 सेमी

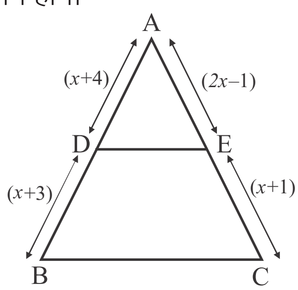
2. आकृति में ADए कोण A का समद्विभाजक है, $AB = 6$ सेमी. $BD = 8$ सेमी. $DC = 6$ सेमी हो, तो AC का मान होगा–



आकृति 11.56

(क) 4.0 सेमी (ख) 4.5 सेमी (ग) 5 सेमी (घ) 5.5 सेमी

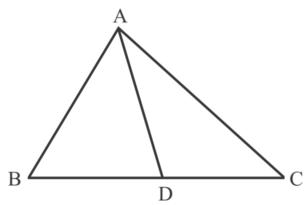
3. आकृति में, यदि $DE || BC$ हो, तो x का मान होगा–



आकृति 11.57

(क) $\sqrt{5}$ (ख) $\sqrt{6}$ (ग) $\sqrt{3}$ (घ) $\sqrt{7}$

4. आकृति 11.58 में, यदि $AB = 3.4$ सेमी, $BD = 4$ सेमी, $BC = 10$ सेमी हो, तो AC का मान होगा–



आकृति 11.58

(क) 5.1 सेमी (ख) 3.4 सेमी (ग) 6 सेमी (घ) 5.3 सेमी

5. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल क्रमशः 25 25 सेमी एवं 36 सेमी है, यदि छोटे त्रिभुज की माध्यिका 10 सेमी हो, तो बड़े त्रिभुज की संगत माध्यिका होगी–

(क) 12 सेमी (ख) 15 सेमी (ग) 10 सेमी (घ) 18 सेमी

6. एक समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \| CD$ है एवं इसके विकर्ण O बिन्दु पर मिलते है। यदि $AB = 6$ सेमी एवं सेमी हो, तो ΔAOB के क्षेत्रफल एवं ΔCOD के क्षेत्रफल का अनुपात होगा–

(क) 4 : 1 (ख) 1 : 2 (ग) 2 : 1 (घ) 1 : 4

7. यदि ΔABC एवं ΔDEF में $\angle A = 50°, \angle B = 70°, \angle C = 60°, \angle D = 60°, \angle E = 70°$ एवं $\angle F = 50°$ हो तो निम्नलिखित में सही है

(क) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ख) $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ (ग) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (घ) $\Delta ABC \sim \Delta FED$

8. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ हो, एवं $AB = 10$ सेमी, $DE = 8$ सेमी हो, तो ΔABC का क्षेत्रफल ΔDEF का क्षेत्रफल होगा–

(क) 25 : 16 (ख) 16 : 25 (ग) 4 : 5 (घ) 5 : 4

9. ΔABC की भुजाओं AB एवं AC पर बिन्दु D और E इस प्रकार है कि $DE \| BC$ है एवं $AD = 8$ सेमी, $AB = 12$ सेमी तथा $AE = 12$ सेमी हो, तो CE का माप होगा–

(क) 6 सेमी (ख) 18 सेमी (ग) 9 सेमी (घ) 15 सेमी

10. एक 12 सेमी लम्बी उर्ध्वाधर छड़ की जमीन पर छाया की लम्बाई 8 सेमी. लम्बी है। यदि इसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 40 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई होगी–

(क) 60 मीटर (ख) 60 सेमी (ग) 40 सेमी (घ) 80 सेमी

11. ΔABC में यदि D, BC पर कोई बिन्दु इस प्रकार है कि $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ हो एवं $\angle B = 70°, \angle C = 50°$ हो तो $\angle BAD$ ज्ञात कीजिए।

12. यदि ΔABC में $DE \| BC$ हो, एवं $AD = 6$ सेमी, $DB = 9$ सेमी, और $AE = 8$ सेमी हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।

13. यदि ΔABC में $\angle A$ का समद्विभाजक AD हो एवं $AB = 8$ सेमी, $BD = 5$ सेमी एवं $DC = 4$ सेमी हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।

14. यदि दो समरूप त्रिभुजों की ऊँचाईयों का अनुपात 4:9 हो, तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. समरूप आकृतियाँ आकार में समान एवं माप में समान हो यह आवश्यक नहीं है।
2. दो बहुभुज समरूप होते है यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण समान हो।
3. दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण समान हो।
4. थेल्स प्रमेय (आधारभूत आनुपातिक प्रमेय) यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को काटते हुए कोई रेखा खींची जाए तो वह त्रिभुज की अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती हैं।
5. यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती हो, तो यह रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।
6. दो सरल रेखीय आकृतियाँ समान कोणिक होती है यदि इनके संगत कोण समान हो एवं इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती होती है एवं ये समरूप होते हैं।
7. कोण कोण कोण समरूपताः यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण समान हो, तो त्रिभुज समरूप होते है।
8. कोण कोण समरूपताः यदि एक त्रिभुज के दो कोण, दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों के समान हो, तो त्रिभुज समरूप होते है।
9. भुजा कोण भुजा समरूपताः यदि किसी त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के किसी कोण के बराबर हों एवं उन कोणों को अन्तर्विष्ट करने वाली भुजाएँ समानुपाती हो, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते है।
10. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।
11. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत ऊँचाइयों के वर्गों के अनुपात के समान होता है।
12. अधिक कोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ अधिक कोण हो और $AD \perp BC$ हो तो $\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+2\,\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}$ होता है।
13. ΔABC न्यून कोण त्रिभुज हो और $AD \perp BC$ हो तो $\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}$ होता है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 11.1

1. (i) समरूप (ii) समरूप (iii) समबाहू (iv) (a) उनके संगत कोण समान हो (b) संगत भुजाओं का अनुपात समान हो।
2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (क्योंकि केवल संगत भुजाओं का समानुपाती होना पर्याप्त नहीं हैं। (iv) सत्य (v) असत्य

प्रश्नमाना 11.2

1. (i) 20 सेमी. (ii) 15.6 सेमी. (iii) 9.9 सेमी. (iv) x = 1, $\frac{-1}{2}$
2. (i) समान्तर है (ii) समान्तर नहीं है (iii) समान्तर नहीं है (iv) समान्तर है।

प्रश्नमाला 11.3

1. यदि $\angle A = \angle P$ व $\angle C = \angle R$ हो तो $\angle B$ व $\angle Q$ स्वतः समान हो जाएगें तो दो त्रिभुज समान कोणिक हो जावेगें।
2. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ नहीं है। क्योंकि दिए गए कोणों के क्रम के अनुसार $\Delta ABC \sim \Delta DFE$ होने चाहिए।
3. $\Delta ABC \sim \Delta FDE$ के लिए प्रश्न में दिया गया अनुपात नहीं लिखा जा सकता वास्तव में शीर्षों के क्रम में $\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EF}$ लिया जाना चाहिए।
4. यह कथन सत्य नहीं हैं क्योंकि दोनों त्रिभुजों में दो भुजाएं और उनके अन्तर्गत कोण समान होने पर ही दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।
5. दो समानकोणिक त्रिभुजों में संगत कोण बराबर होते हैं। यदि संगत कोण बराबर हो तो दोनों Δ समरूप होते है।
6. (i) व (viii) $\Delta ABC \sim \Delta QRP$, (ii) व (vii) $\Delta MPN \sim \Delta ZYX$, (iii) व (v) $\Delta PQR \sim \Delta EFG$, (iv) व (vi) $\Delta EDF \sim \Delta NML$
7. $\angle P = \angle RTS, \angle Q = \angle RST$
8. $\Delta ADC \sim \Delta BEC$
10. 1.6 मी.
11. 84 मी.

प्रश्नमाला 11.4

1. (i) असत्य भुजाओं के वर्गों के अनुपात अर्थात् 16 : 81 होगा

   (ii) असत्य चूंकि संगत भुजाओं का अनुपात $\frac{3}{2}$ है जबकि सर्वांगसमता के लिए यह अनुपात 1 : 1 होता है।

   (iii) असत्य क्योंकि क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

   (iv) सत्य

11. 11.2 सेमी.

4. (i) $4:25$ (ii) 294 सेमी^{2} (iii) $x = \frac{ac}{b+c}$

विविध प्रश्नमाला—11

1. (ग)	2. (ख)	3. (घ)	4. (क)	5. (क)	6. (क)	7. (घ)
8. (क)	9. (क)	10. (क)	11. 20	12. 20 सेमी	13. 6.4 सेमी	14. 16:81