14

रचनाएँ
(Constructions)

14.01 प्रस्तावना

हमने पिछले अध्यायों में वृत्त, छेदन रेखा, स्पर्श रेखा एकान्तर वृत्त खण्ड, से सम्बन्धित गुणधर्मों कोसमझा और स्मरण किया। आइए यहाँ हम उन अध्ययन किये गए प्रमेयों का उपयोग करते हुए उनसे सम्बन्धित रचना कैसे करेंगे का अध्ययन करते है। बिन्दु पथ के अध्याय में हमने संगामी रेखा खण्ड एवं संगामी बिन्दुओं पर चर्चा की है। जिनमें हमने अन्तः केन्द्र और परिकेन्द्र के बारे में अध्ययन किया है। आइए अब हम इन सिद्धान्तों एवं मूलभूत अनुपातिक प्रमेय का उपयोग करके, रचना के माध्यम सेइन सिद्धांतों को समझने का प्रयत्न करते हैं।

निर्मय– ज्यामिति में किसी ज्यामितीय निर्माण सम्बन्धी पहेली को निर्मय कहते हैं।

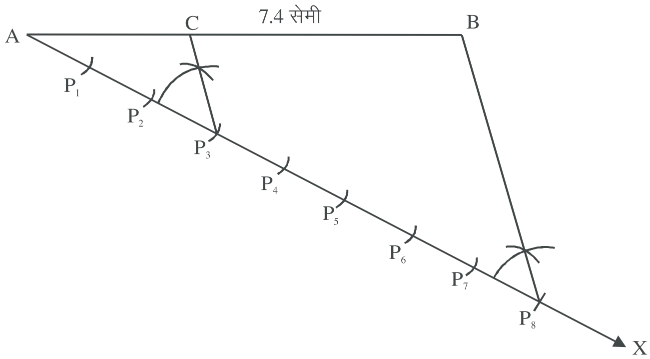
14.02 एक रेखा खण्ड का दिए गए अनुपात में आन्तरिक विभाजन

निमेय–1. एक 7. 4 सेमी लम्बाई का एक रेखा खण्ड खींच कर उसका 3 : 5 में आन्तरिक विभाजन कीजिए।

रचना के पदः

1. रेखा खण्ड AB = 7.4 सेमी खींचिए।
2. न्यून कोण BAX की रचना कीजिए।
3. सुविधाजनक त्रिज्या लेते हुवे AX पर 8 चाप (3 + 5) P_1, P_2, P_3 . . . P_8 इस प्रकार के लें कि $AP_1 = A_1P_2 = P_2P_3 = ... = P_7P_8$ हो।
4. BP_8 को मिलाइए।
5. बिन्दु P_3 से $P_3C \| P_8B$ खींचिए (इसके लिए $\angle AP_3C = \angle AP_8B$ बनाइए जो AB को बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करता है)

इस प्रकार रेखाखण्ड AB बिन्दु C पर 3 : 5 में विभाजित होता है।



आकृति 14.01

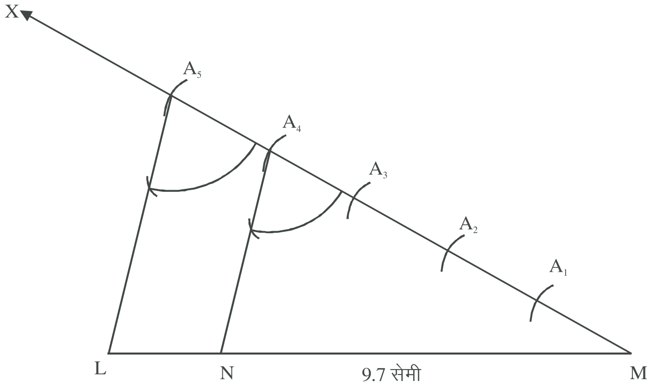
निमेय–2. एक रेखा खण्ड ML = 9.7 सेमी खींचिए तथा इस पर एक ऐसा बिन्दु N ज्ञात कीजिए कि

$$MN = \frac{4}{5} ML$$

रचना के पदः

1. रेखाखण्ड ML = 9.7 सेमी खींचिए।
2. एक न्यून कोण LMX की रचना कीजिए।
3. एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर MX पर 5 चाप A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 इस प्रकार के लेते हैं कि $MA_1 = A_1A_2 = ... = A_4A_5$
4. A_5L को मिलाए
5. बिन्दु A_4 पर $A_4N \| A_5L$ बनाइए (इसके लिए $\angle MA_4N = \angle MA_5L$ की रचना कीजिए)
6. बिन्दु N रेखाखण्ड ML पर इस प्रकार का प्राप्त होता है।

$$MN = \frac{4}{5} ML$$



आकृति 14.02

सत्यापन: त्रिभुज MLA_5 में, $NA_4 \parallel LA_5$

$$\therefore \quad \frac{LN}{NM} = \frac{A_5A_4}{MA_4} \quad \text{(मूलभूत आनुपातिक प्रमेय से)}$$

या
$$\frac{LN}{NM} + 1 = \frac{A_5A_4}{MA_4} + 1$$

या
$$\frac{LN + NM}{NM} = \frac{M_5A_4 + MA_4}{MA_4}$$

या
$$\frac{ML}{NM} = \frac{MA_5}{MA_4} = \frac{5}{4}$$

या
$$\frac{MN}{ML} = \frac{4}{5}$$

अत: रेखाखण्ड ML पर N एक ऐसा बिन्दु है कि $MN = \frac{4}{5}ML$

14.03 वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना
(Construction of a tangetn to a point on the circle)

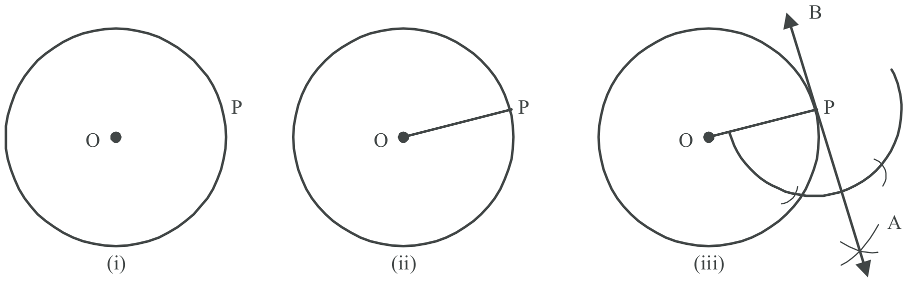
(A) जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो (प्रमेय 14.1 का उपयोग)

यदि आपसे एक वृत्त जिसकी त्रिज्या r दी गई हो की रचना करके उस पर एक स्पर्श रेखा खींचने को कहा जाए तो आप (जैसा अधिकांश विद्यार्थियों में देखा गया है) परकार की सहायता से r त्रिज्या वाला वृत्त बनाकर अपने विवेक से वृत्त पर एक बिन्दु चयन कर एक रेखा खींच देते हैं। यदि आप स्पर्श रेखा की रचना ऐसे ही करते हैं तो पूर्णतः त्रूटि युक्त है।

सही प्रकार से रचना (प्रमेय 13.1 का उपयोग करते हुए) निम्न निर्मय द्वारा समझेंगे–

निमेय–3. दिए गए वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना करना, जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो।

रचना (i) O केन्द्र वाला वृत्त दी गई त्रिज्या को परकार की सहायता से बनाकर उस पर एक बिन्दु P अंकित करते हैं। देखिए आकृति 14.03(i)



आकृति 14.03

(ii) O व P को मिलाया अर्थात् OP वृत्त की त्रिज्या है। देखिए आकृति 14.03 (ii)

(iii) OP (त्रिज्या) को आधार रेखा मानकर, OP पर लम्ब AB खींचा। देखिए आकृति 14.03 (iii)

इस प्रकार प्राप्त AB ही दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखा है।

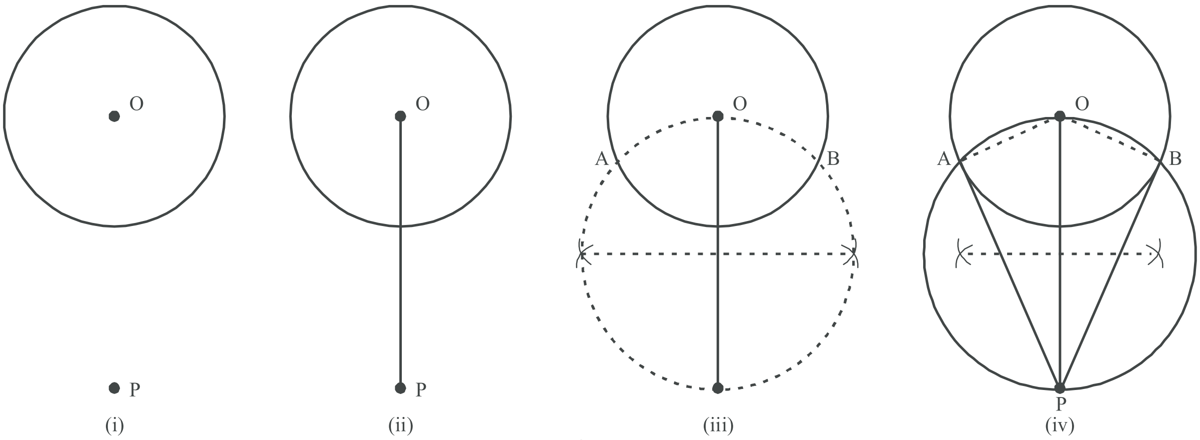
14.04 वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से स्पर्श रेखा खींचना

(A) जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात है। (प्रमेय 13.3 का उपयोग)

हम जानते हैं कि वृत्त में व्यास पर बना कोण समकोण होता है। वृत्त और व्यास के मध्य इस गुणधर्म पर विचार कीजिये।

निमेय–4. दिए गए वृत्त पर बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखा की रचना करना जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो।

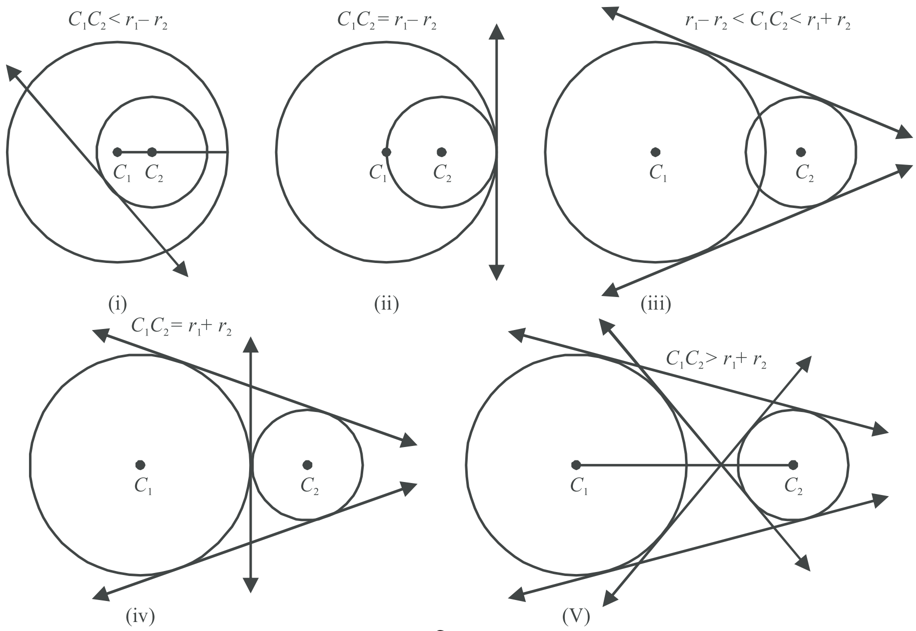
(1) एक वृत्त जिसका केन्द्र O है इसके बाहर एक बिन्दु P लेते हैं (ii) OP को मिलाया (iii) OP का लम्ब अर्द्धक के माध्यम से OP का मध्य बिन्दु M प्राप्त किया और MO त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया जो दिए गए वृत्त को A व B पर प्रतिच्छेद करता है। अत: PA व PB दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।



आकृति 14.04

14.05 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ

दो वृत्तों की विभिन्न स्थितियों के अन्तर्गत उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या की सम्भावना के लिए हमें सभी स्थितियों पर विचार करना होगा। अतः इसे निम्न आकृतियों के माध्यम से समझ सकते हैं।



आकृति 14.05

I. आकृति 14.05 (i) में छोटे वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा खींची जाती है तो वह बडे वृत्त को प्रतिच्छेद करती है। अतः जब $C_1C_2 < r_1 - r_2$ तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की संख्या $= 0$ है।

II. आकृति 14.05 (ii) में दोनों वृत्तों के स्पर्श बिन्दु पर केवल एक उभयनिष्ठ रेखा है चूंकि यहाँ दोनों वृत्त उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा के एक ही ओर स्थित है अतः यह उभयनिष्ठ अनु स्पर्श रेखा कहलाती है। अतः जब $C_1C_2 = r_1 - r_2$ हो तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या $= 1$ (उभयनिष्ठ अनु स्पर्श रेखा)

III. आकृति 14.05 (iii) में दोनों वृत्त परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं अतः दो वृत्तों के दो ओर कुल दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएं हैं। चूंकि यहाँ दोनों उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार स्थित हैं कि प्रत्येक वृत्त दोनों उभयनिष्ठ रेखाओं के क्रमशः एक ही ओर स्थित है। अतः दोनों उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ मानी जायेगी।

इस प्रकार जब $r_1 - r_2 < C_1C_2 < r_1 + r_2$ तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या $= 2$ (उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाऐं)

IV. आकृति 14.05 (iv) में दोनों वृत्त परस्पर बाह्य स्पर्श करते हैं अतः कुल उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या तीन है। यहाँ एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा दोनों वृत्तों के स्पर्श बिन्दु पर स्थित है, जिसे उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा कहेगें क्योंकि दोनों वृत्त इसके दोनों ओर स्थित हैं और दो उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ हैं।

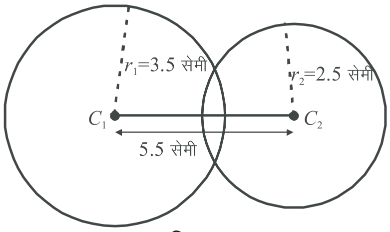
इस प्रकार जब $C_1C_2 = r_1 + r_2$ तब कुल स्पर्श रेखाओं की संख्या$= 3$ (2 उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ एवं उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा)

V. आकृति 14.05 (v) में दोनों वृत्त बाहर स्थित है अतः कुल उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या चार है। यहाँ 2 उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ एवं 2 उभयनिष्ठ तिर्यक रेखाएँ है।

इस प्रकार जब $C_1C_2 > r_1 + r_2$ तब कुल उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 4 (2 उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएं एवं 2 उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएं) आइए अगले अनुच्छेद में उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा एवं उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा के रचना करना सीखते हैं।

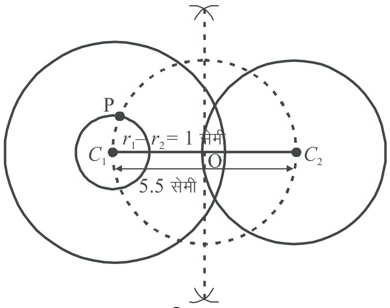
निमेय–5. दो भिन्न त्रिज्या वाले वृत्तों के केन्द्रों की दूरी ज्ञात हो, तो दोनों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की रचना करना

(i) रचना – $C_1C_2 = 5.5$ सेमी का एक रेखाखण्ड खींचकर C_1 व C_2 पर क्रमशः $r_1 = 3.5$ सेमी और $r_2 = 2.5$ सेमी. त्रिज्या के दो वृत्तों की रचना की।



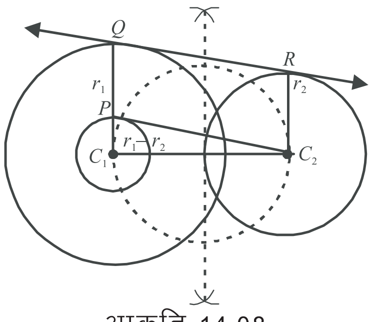
आकृति 14.06

(ii) दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $r_1 - r_2 = 3.5 - 2.5 = 1$ सेमी की त्रिज्या का एक वृत्त बडे वृत्त के केन्द्र C_1 पर क बनाया और C_1C_2 का समद्विभाजन बिन्दु O प्राप्त कर O से $OC_1 = OC_2$ की त्रिज्या लेकर डोटेड वृत्त बनाया जो $r_1 - r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त को P पर काटता है।



आकृति 14.07

(iii) PC_2 को मिलाकर $r_1 - r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त C_2 से PC_2 स्पर्श रेखा खींची। C_1P को मिलाते हुए C_1Q रेखा खींची जो r_1 त्रिज्या वाले वृत्त को Q पर काटती है PC_2 के समान चाप लेकर Q को केन्द्र मान कर r_2 त्रिज्या वाले वृत्त का प्रतिच्छेदी बिन्दु R प्राप्त किया। QR का मिलाया QR ही अभीष्ट उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा है।



आकृति 14.08

नोट: आप ध्यान से देखेगें तो PQ RC_2 एक आयत दिखाई देता है अर्थात् QR पर दोनों वृत्तों की त्रिज्याएं r_1 व r_2 लम्ब है। इसीलिए QR ही दोनों वृत्तो की अभीष्ट उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा कही जा सकती है। ऐसा ही उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा C_1C_2 के दूसरी आरे भी खींची जा सकती है।

ध्यान देने योग्य बिन्दु– उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की रचना करने के लिए

(i) $r_1 - r_2$ ज्ञात करना होता है।

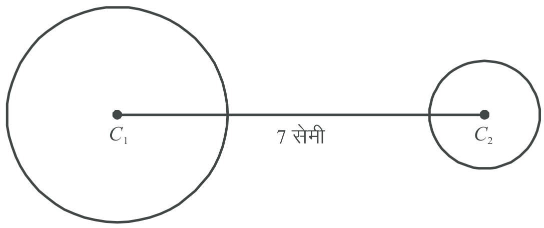
(ii) $r_1 - r_2$ त्रिज्या का वृत्त, बड़े वृत्त के केन्द्र से बनाया जाता है

(iii) यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याऐं समान हो तो C_1 व C_2 पर सीधे r_1 व r_2 लम्ब खींचकर दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मिलाकर उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा खींची जाती है।

निमेय–6. दो भिन्न त्रिज्या वाले वृत्तों के केन्द्रों की दूरी ज्ञात है पर उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना करना।

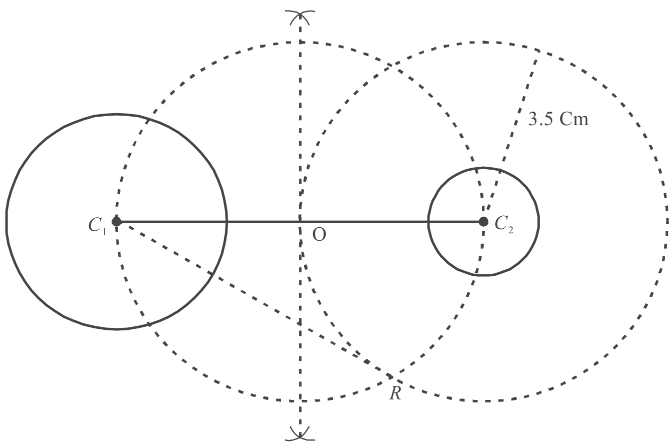
उदाहरणः दो वृत्त 2.5 सेमी एवं 1 सेमी त्रिज्याओं के केन्द्र परस्पर 7 सेमी दूरी पर है, एक उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

(i) $C_1C_2 = 7$ सेमी का एक रेखाखण्ड खींचकर C_1 व C_2 पर क्रमशः 2.5 सेमी एवं 1 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों की रचना की।



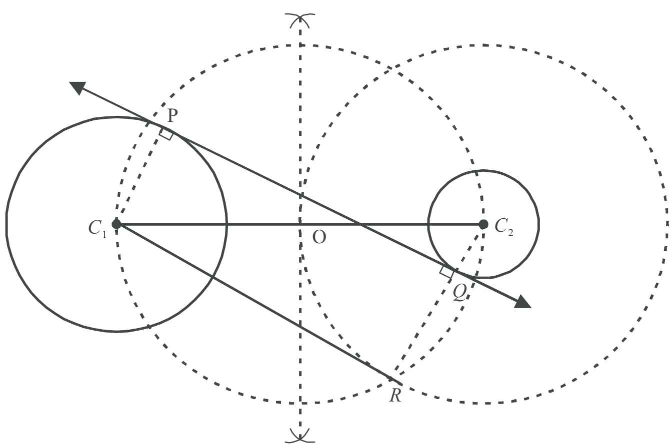
आकृति 14.09

(ii) दोनो वृत्तों की त्रिज्याओं का योग $r_1 + r_2 = 2.5 + 1.00 = 3.5$ सेमी त्रिज्या का डोटेड वृत्त केन्द्र C_2 पर (छोटे वृत्त के केन्द्र पर) खींचा। C_1C_2 का समद्विभाजक बिन्दु O प्राप्त कर एक वृत्त $OC_1 = OC_2$ त्रिज्या लेकर एक और डोटेड वृत खींचा जो $r_1 + r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त को R पर काटता है। C_1R को मिलाकर $r_1 + r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त की स्पर्श रेखा खींची।



आकृति 14.10

(iii) RC_2 को मिलाया जो r_2 त्रिज्या वाले छोटे वृत्त को Q पर काटता है RC_1 त्रिज्या लेकर Q को केन्द्र मानकर r_1 त्रिज्या लेकर Q को केन्द्र मानकर r_1 त्रिज्या वाले वृत्त पर चाप काटा जो P पर काटता है।
PQ को मिलाया। यही r_1 व r_2 त्रिज्या वाले वृत्तों के लिए उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा है।



आकृति 14.11

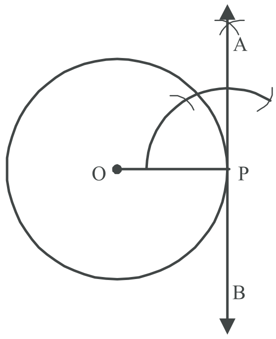
दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक 2.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

हल: (i) 2.5 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त बनाया जिसका केन्द्र O है।

(ii) इस वृत्त पर एक बिन्दु P लिया जिसे केन्द्र O से मिलाया

(iii) बिन्दु P पर OP लम्ब की रचना कीजिए अर्थात् $\angle OPA = 90°$ का बनाइए AP को आगे B तक बढाइए इस प्रकार APB ही अभीष्ट स्पर्श रेखा है।



आकृति 14.12

उदाहरण-2. एक 2.8 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत बनाइए तथा जिसके केन्द्र से 4.3 सेमी दूर स्थित बिन्दु P से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं खींचीएं और उन्हें मापकर दोनों बराबर है की जाँच कीजिये।

हल: (i) 2.8 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया जिसका केन्द्र O है

(ii) 0 से 4.3 दूर P लेकर OP को मिलाया

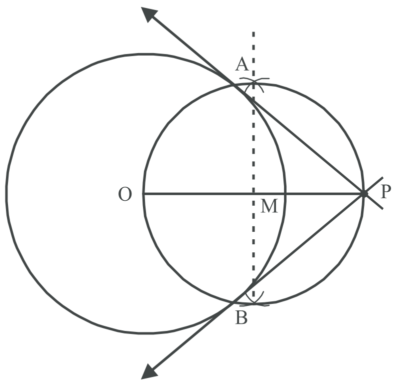
(iii) OP का लम्ब समद्विभाजक खींचकर OP का मध्य बिन्दु M प्राप्त किया।

(iv) M को केन्द्र मानकर OM = PM त्रिज्या लेकर एक वृत्त की रचना की जो दिए गए वृत्त को A व B पर काटता है।

(v) A व B को क्रमशः P से मिलाया।

PA व PB की वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से खींची गई अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ है।

यहाँ PA = PB = 3.2 सेमी है। अर्थात् दोनों स्पर्श रेखाएँ बराबर माप की है।

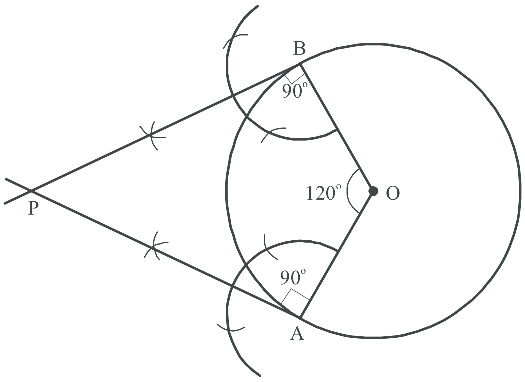


आकृति 14.13

उदाहरण-3. एक 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाकर केन्द्र O पर OA व OB त्रिज्याएँ परस्पर $120°$ कोण बनाती है की रचना कर A व B पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

हल: (i) 3 cm त्रिज्या का वृत्त बनाकर O पर $120°$ का कोण बनाते हुए OA व OB त्रिज्याएँ खींची।

(ii) A व B पर लम्ब क्रमशः PA एवं PB की रचना की PA व PB ही अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।



आकृति 14.14

उदाहरण-4. एक 4 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाओं PA, PB की रचना कीजिए जहाँ PA तथा PB के मध्य का कोण 80° है।

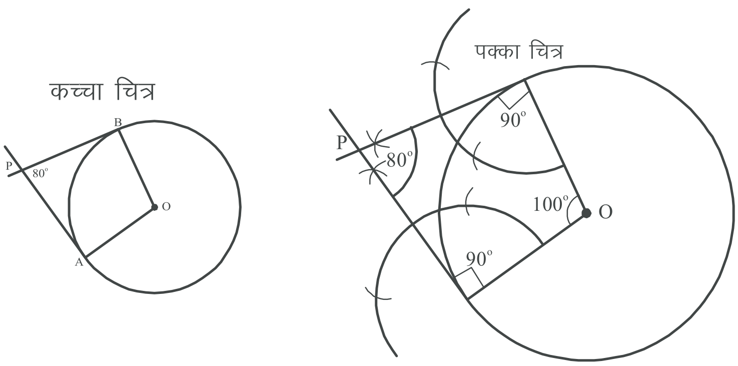
हल: चूंकि $\angle APB = 80°$ दिया हुआ

$\angle A = \angle B = 90°$

अतः चतुर्भुज AOBP का चौथा कोण

$\angle AOB = 360 - (80 + 90 + 90) = 360 - 260 = 100°$

अर्थात् जीवा OA व OB के मध्य $\angle AOB = 100°$



(i) (ii)

आकृति 14.15

रचना – (i) 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाया एवं त्रिज्याएँ OA व OB के मध्य $100°$ का कोण बनाया

(ii) OA व OB के A व B पर लम्ब क्रमशः AP व BP खींचे जो एक दूसरे को P पर मिलते हैं

$\angle APB$ को मापने पर $\angle APB = 80°$ प्राप्त होता है। इस प्रकार अभीष्ट स्पर्श रेखाओं की रचना होती है।

उदाहरण-5. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएं 4 सेमी और 3 सेमी है। तथा दोनों के केन्द्रों की मध्य दूरी 6.5 सेमी है की रचना कर उन पर एक उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

हल: (i) $C_1C_2 = 6.5$ सेमी की रेखा खींच कर C_1 व C_2 पर क्रमशः 4 सेमी एवं 3 सेमी. त्रिज्या के दो वृत्त बनाएं

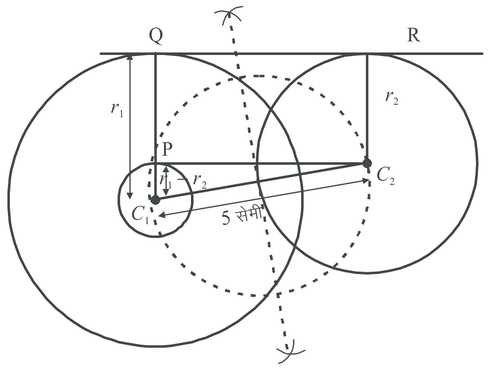
(ii) $r_1 - r_2 = 4 - 3 = 1$ सेमी की त्रिज्या का C_1 को केन्द्र मानकर बडे वृत्त के अन्दर एक वृत्त और बनाया।

(iii) $r_1 - r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त पर निर्मय 13.3 का उपयोग कर PC_2 एक स्पर्श रेखा खींची

(iv) C_1 को P से मिलाते हुए C_1Q रेखा खींची जो r_1 त्रिज्या वाले वृत्त को Q पर काटती है।

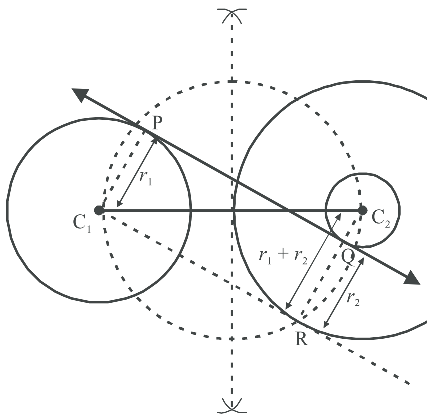
(v) PC_2 के बराबर चाप खोलकर बिन्दु Q से r_2 त्रिज्या वाले वृत्त पर चाप व वृत्त का प्रतिच्छेदी बिन्दु R प्राप्त किया

, (vi) QR को मिलाए यही अभीष्ट उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है।



आकृति 14.16

उदाहरण-6. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 2.5 सेमी एवं 1.5 सेमी है जिनके केन्द्र 8 सेमी दूरी पर स्थित है। पर एक उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।



आकृति 14.17

रचनाः

(i) $C_1C_2 = 8$ सेमी की रेखा खींचकर उसके दोनों सिरे पर क्रमशः 2.5 सेमी एवं 1.5 सेमी की त्रिज्याएँ लेकर वृत्त खींचे।

(ii) $r_1 + r_2 = 2.5 + 1.5 = 4$ सेमी त्रिज्या का छोटे वृत्त $r_2 = 1.5$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र C_2 से एक और वृत्त बनाया।

(iii) निर्मय 13.3 का उपयोग करते हुए $r_1 + r_2 = 4$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर C_1 से स्पर्श रेखा C_1R की रचना की एवं R को C_2 से मिलाया तो इस प्रकार रेखा $R\,C_2$, $r_2 = 1.5$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त को प्रतिच्छेद करती हुई निकलती है। इस प्रतिच्छेद बिन्दु को Q नाम दिया।

(iv) RC_1 के बराबर लम्बाई लेकर Q से $r_1 = 2.5$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर प्रतिच्छेदी बिन्दु P प्राप्त किया P व Q को मिलाया। इस प्रकार PQ ही अभीष्ट उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा है।

प्रश्नमाला 14.01

1. 6.7 सेमी लम्बाई के एक रेखा खण्ड को 2:3 में विभाजित कीजिए।

2. एक रेखा खण्ड AB = 8.3 सेमी लम्बाई का बनाइए। रेखा खण्ड AB पर एक बिन्दु C ऐसा ज्ञात कीजिए कि $AC = \frac{1}{3}AB$ इसे सत्यापित भी कीजिए।

3. एक 2.8 सेमी के वृत्त की रचना कर उस पर स्थित बिन्दु P पर एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिये।

4. एक 3 सेमी त्रिज्या के व्यास के दोनों सिरों पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए। क्या वह परस्पर प्रतिच्छेद करेगी कारण सहित उत्तर लिखिए।

5. एक 13.1 सेमी त्रिज्या के वृत्त में एक 2.3 सेमी की जीवा काटिए और उसके दोनों सिरों पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

6. एक 2.7 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना कीजिए। उस वृत्त पर एक स्पर्श रेखा खींचिए।

7. किसी बिन्दु O पर 2.4 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त बनाइए। इसमें $60°$ का कोण बनाती हुई दो त्रिज्याएँ OA और OB की रचना करके A व B पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए जो परस्पर T बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है कोण ATP को मापिए।

8. एक 13.2 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिएं उस पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार खींचिए कि वे परस्पर $70°$ का कोण बनाती हो।

9. एक वृत्त 3 सेमी त्रिज्या का खींचिए जिसके केन्द्र O से 5 सेमी दूर स्थित P से दो स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

10. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 3 सेमी एवं 4 सेमी है। जिनके केन्द्रों के मध्य की दूरी 8 सेमी है। दोनों वृत्तों पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ कितनी खींची जा सकती है। तथा दो उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

11. दो वृत्तों जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 1.7 सेमी. और 2.8 सेमी की है कि एक उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए जबकि दोनों के केन्द्र एक दूसरे से 6 सेमी दूरी पर है।

14.06 पहले त्रिभुज की रचना कर वृत्त की रचना करना

(A) परिवृत्त (परिगत वृत्त) की रचना

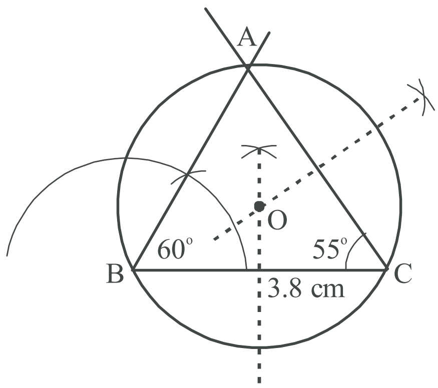
चूंकि परिकेन्द्र त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों के संगामी बिन्दु है तथा इसकी स्थिति त्रिभुजों की प्रकृति पर निर्भर करती है। अतः परिगत वृत्त की रचना के लिए निम्न चरणों पर ध्यान केन्द्रित करेंगे।

(i) त्रिभुज की दो भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक खींचकर परिकेन्द्र की रचना करते हैं।

(ii) प्राप्त परिकेन्द्र को केन्द्र मानकर किसी एक शीर्ष की दूरी तक त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना करते हैं। इस प्रकार प्राप्त वृत्त तीनों शीर्षों से होकर गुजरेगा। यही अभीष्ट परिगत वृत्त है।

I. त्रिभुज के परिकेन्द्र की स्थिति एवं परिगत वृत्त की रचना

उदाहरण-7. ΔABC की रचना कीजिए जिसमें भुजा $BC = 3.8$ सेमी, $\angle B = 60^\circ$ तथा $\angle C = 55^\circ$ हो। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की भी रचना कीजिए और परिकेन्द्र की स्थिति की जाँच कीजिए। (देखिए आकृति 14.16)



आकृति 14.18

रचना

(i) ΔABC की रचना दिए मापों के अनुसार की गई।

(ii) ΔABC की कोई दो भुजाएँ BC एवं AC लेकर लम्ब समद्विभाजक खींचिए परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। इस प्रकार O वृत्त का परिकेन्द्र प्राप्त हो चुका है।

(iii) O को केन्द्र मान कर त्रिभुज के शीर्ष में से किसी एक शीर्ष की परिकेन्द्र से दूरी की त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना की यही ΔABC का अभिष्ट परिवृत्त (परिगत वृत्त) है।

विशेषः ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है जिसका परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर स्थित है।

उदाहरण-8. ΔABC की रचना कीजिए जिसकी भुजा BC = 4 सेमी $\angle B = 40^\circ$ एवं $\angle A = 90^\circ$ हों। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए और परिकेन्द्र की स्थिति की जाचँ कीजिए।

रचना (देखिए आकृति 14.17)

(i) चूंकि त्रिभुज में $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (भुजा BC के C पर स्थित कोण ज्ञात करने के लिए)

अतः $\angle C = 180 - (\angle A + \angle B)$

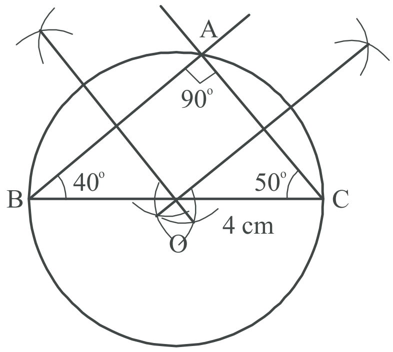
या $\angle C = 180 - (90 + 40) = 50^\circ$

(ii) ΔABC की BC=4 सेमी $\angle B = 40^\circ$ व $\angle C = 50^\circ$ का उपयोग कर रचना की। इस रचना से $\angle A = 90^\circ$ स्वतः प्राप्त होगा

(iii) AB एवं AC के लम्ब समद्विभाज खींच कर परिकेन्द्र O प्राप्त किया

(iv) परिकेन्द्र से एक शीर्ष A तक त्रिज्या लेकर एक वृत्त की रचना की जो ABC के सभी शीर्षों से गुजरता है।

यही ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त (परिगत) वृत्त है। ΔABC एक समकोण त्रिभुज है। जिसका परिकेन्द्र त्रिभुज के कर्ण BC पर स्थित है।



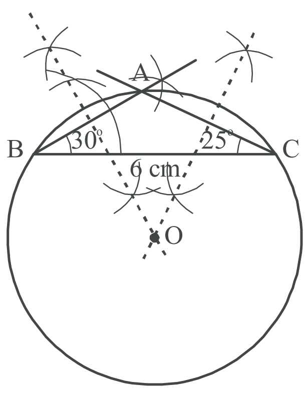
आकृति 14.19

उदाहरण-9. एक त्रिभुज ABC की रचना की रचना कीजिए जिसकी भुजा BC=6 सेमी $\angle B = 30^\circ$ एवं $\angle C = 25^\circ$ इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए और परिकेन्द्र स्थिति का पता लगाइए।

(i) दिए मापों के आधार पर त्रिभुज ABC की रचना की

(ii) AB एवं AC के लम्ब समद्विभाजक खीचें जो परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(iii) O को केन्द्र मान कर OC के बराबर त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना की जो ΔABC के तीनों शीर्षों से गुजरता है। यह वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिगत वृत्त है।



आकृति 14.20

यहाँ ΔABC का परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर सबसे बड़ी भुजा की ओर स्थित है।

त्रिभुजों की प्रकृति के आधार पर इनके परिकेन्द्र की स्थितियाँ भिन्न–भिन्न रहती है।

(a) न्यूनकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर स्थित होता है। देखिए उदाहरण–1 का आकृति 10.16

(b) समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के कर्ण पर स्थित होता है। देखिए उदाहरण–2 का आकृति 14.17

(c) अधिक कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर स्थित होता है। देखिए उदाहरण–3 का आकृति 14.18

(B) अन्तः वृत्त (अन्तर्गत वृत्त) की रचना

चूंकि अन्तः केन्द्र–त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजकों के संगमन बिन्दु है। अतः अन्तः वृत्त (अन्तर्गत वृत्त) की रचना के लिए सर्व प्रथम त्रिभुज का अन्तः केन्द्र प्राप्त करते हैं। इनके लिए

(i) दिये गए त्रिभुज के किन्हीं दो कोणों के समद्विभाजक खींचते हैं।

(ii) दोनों समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु (अन्तः केन्द्र) से त्रिभुज की एक भुजा पर लम्ब डालते हैं (किसी कोण का समद्विभाजक कोण की दोनों भुजाओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दु है)

(iii) इस लम्ब की लम्बाई की त्रिज्या लेकर प्राप्त अन्तः केन्द्र से वृत्त खींचेंगे। यह वृत्तत्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता हुआ गुजरेगा यही दिए गए त्रिभुज का अभीष्ट अन्तर्गत वृत्त होगा।

आइए अंतर्गत वृत्त की रचना समझने के लिए निम्न उदाहरण का उपयोग करते हैं।

उदाहरण-10. ΔABC के अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए, जबकि BC = 5.8 सेमी, AB = 5 सेमी और $\angle B = 55^o$ हो।

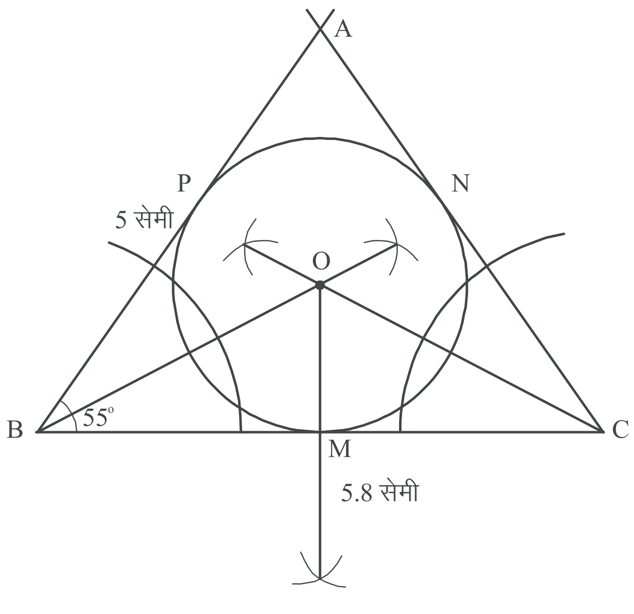
हलः प्रश्नानुसार ΔABC की रचना की (देखिए आकृति 14.19)

(ii) $\angle B$ व $\angle C$ के समद्विभाजक खींचे जो O पर मिलते हैं O D का अन्तः केन्द्र है।

(iii) अन्तः केन्द्र O से BC पर लम्ब OM खींचा

(iv) O को केन्द्र मान पर OM त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा जो ΔABC की भुजाएं AB, BC व CA को क्रमशः P, M, N पर स्पर्श करता हुआ गुजरता है।

यही ΔABC का अभीष्ट अन्तर्गत वृत्त है।



आकृति 14.21

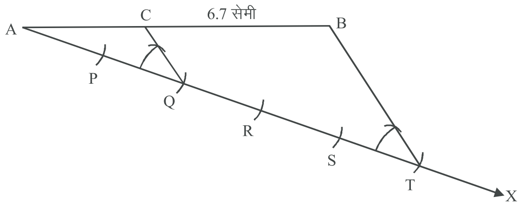
प्रश्नमाला 14.02

1. निम्न में सत्य अथवा असत्य बताइए और अपने उत्तर का यदि सम्भव हो तो कारण लिखिए
   (i) समबाहु त्रिभुज के अंतर्गत वृत्त एवं परिगत वृत्त की रचना, एक ही बिन्दु को केन्द्र मान कर की जा सकती है।
   (ii) त्रिभुज की सभी भुजाएं उसके अन्तर्गत वृत्त को स्पर्श करती है।
   (iii) त्रिभुज का परिकेन्द्र उसकी एक भुजा पर स्थित होता है, जब वह त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज होता है।
   (iv) त्रिभुज के परिकेन्द्र त्रिभुज की अन्दर स्थित होता है जब वह न्यून कोण त्रिभुज होता है।
   (v) त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की रचना त्रिभुज की दो भुजाओं के लम्ब व समद्विभाजकों के प्रतिच्छेदों बिन्दु को ज्ञात करके की जाती है।
2. 4.6 सेमी भुजा वालो समबाहू त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए। क्या इसका परिकेन्द्र एवं अन्तः केन्द्र सम्पाती हैं? क्यों कारण सहित बताइए।
3. ΔABC के अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए, जहाँ $AB = 4.6$ सेमी, $AC = 4.2$ सेमी एवं $\angle A = 90^o$ है।
4. एक त्रिभुज के परिगत वृत्त की की रचना कीजिए, भुजाएं क्रमशः 10.5, 12.7, 13 सेमी की है और बताइए इस त्रिभुज का परिकेन्द्र 13 सेमी वाली भुजा पर ही क्यों स्थित है?
5. 5 सेमी, 4.5 सेमी एवं 7 सेमी भुजाओं वाले त्रिभुज का परिकेन्द्र कहाँ स्थित होना चाहिए की पुष्टी रचना के द्वारा कीजिए साथ ही इसके परिगत वृत्त की भी रचना कीजिए।
6. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 6$ सेमी, $BC = 4$ सेमी और $\angle B = 120^o$ हो त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए।

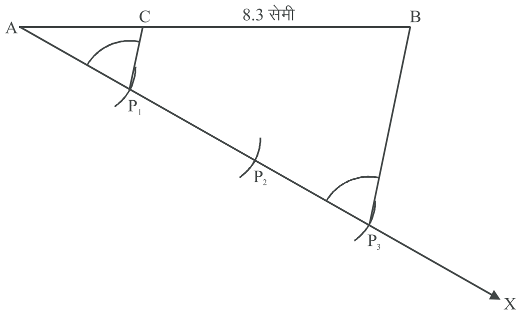
उत्तरमाला

प्रश्नमाला 4.1

1.



2.



सत्यापनः त्रिभुज ABP_3 में, $CP_1 \parallel BP_3$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{P_1P_3}{AP_1} \text{ (मूलभूत आनुपातिक प्रमेय से)}$$

$$\text{या } \frac{BC}{AC} + 1 = \frac{P_1P_3}{AP_1} + 1 \text{ या } \frac{BC + AC}{AC} = \frac{P_1P_3 + AP_1}{AP_1}$$

$$\text{या } \frac{AB}{AC} = \frac{AP_1 + P_1P_3}{AP_1} = \frac{3}{1} \text{ या } \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}$$

अतः रेखाखण्ड AB पर C एक ऐसा बिन्दु है कि $AC = \frac{1}{3} AB$

अन्य रचनाओं का निर्माण अध्यापक की सहायता से स्वयं कीजिए।

प्रश्नमाला 4.2

(1) (i) सत्य, क्योंकि समबाहु त्रिभुज के अन्तः केन्द्र, परिकेन्द्र एवं लम्ब केन्द्र परस्पर सम्पाती होते हैं।
(ii) सत्य, क्योंकि अन्तर्गत वृत्त की रचना के लिए अन्तः केन्द्र से एक भुजा पर डाले गए लम्ब को त्रिज्या मान कर करते हैं।
(iii) असत्य– त्रिभुज का परिकेन्द्र केवल समकोण त्रिभुज के कण पर स्थित होता है।
(iv) सत्य
(v) असत्य – अन्तः केन्द्र की रचना त्रिभुज के दो कोणों के अर्द्धकों के प्रतिच्छेदी बिन्दु को केन्द्र मान कर की जाती है।

4. क्योंकि 13 सेमी भुज समकोण त्रिभुज का कर्ण है और परिकेन्द्र समकोण त्रिभुज में कर्ण पर स्थित होता है।