

अध्याय 17

आँकड़ों का प्रबन्धन

17.1 पिछली कक्षा में हमने पढ़ा कि निश्चित उद्देश्य से जो संख्यात्मक तथ्य एकत्र किए जाते हैं वे आँकड़े कहलाते हैं।

पिछली कक्षा में हमने आँकड़ों के प्रकार, आँकड़ों का संग्रह करना, आँकड़ों को व्यवस्थित करना, मिलान चिह्न की सहायता से सारणीबद्ध करना सीखा था साथ ही चित्रालेख, दण्डालेख पढ़ना एवं बनाना सीखा। आँकड़ों का संग्रहण, आलेखन और प्रस्तुतीकरण हमारे अनुभवों को संग्रहित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं।

इस अध्याय में हम आगे दोहरे दण्ड आलेख पढ़ना एवं बनाना तथा केन्द्रीय प्रवृत्तियाँ अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक आदि का अध्ययन करेंगे।

दैनिक जीवन में हमारे सामने विभिन्न प्रकार के आँकड़े आते रहते हैं। जिन्हें हम समाचार पत्र पत्रिकाओं, टेलीविजन या अन्य माध्यमों से देखते हैं। आइए आँकड़ों के कुछ सामान्य रूपों को देखें जो हमारे सम्मुख आते रहते हैं।

| अमर की दिनचर्या | |
|-----------------------|------------|
| प्रवृत्ति | व्यतीत समय |
| भोजन एवं नित्यकर्म | 2 घण्टा |
| विद्यालय | 6 घण्टा |
| खेलकूद एवं मनोरंजन | 3 घण्टा |
| गृह कार्यों में सहयोग | 2 घण्टा |
| पढ़ाई | 3 घण्टा |
| निद्रा | 8 घण्टा |

तालिका 17.1

| प्राथमिक स्वास्थ्य केन्द्र में सोमवार को आए मरीज | |
|--|-------------|
| बीमारी का नाम | मरीज संख्या |
| बुखार | 22 |
| सर्दी-जुकाम | 26 |
| आँख का रोग | 08 |
| त्वचा के रोग | 12 |
| दुर्घटना से चोट | 07 |
| दांत के रोग | 05 |

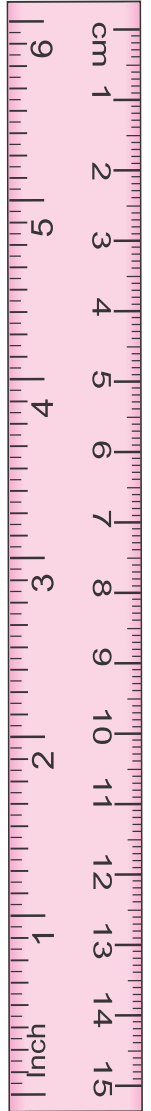
तालिका 17.2

| आरती का प्रथम दो परख में प्रदर्शन | | |
|-----------------------------------|-----------|-------------|
| विषय | प्रथम परख | द्वितीय परख |
| हिन्दी | 5 | 8 |
| अंग्रेजी | 6 | 8 |
| गणित | 3 | 9 |
| विज्ञान | 6 | 9 |
| सामा. विज्ञान | 5 | 8 |
| संस्कृत | 8 | 7 |

तालिका 17.3

आँकड़ों के ये संग्रह हमें क्या बताते हैं ? उदाहरणार्थ हम कह सकते हैं कि अमर अपनी दिनचर्या में विद्यालय में 6 घण्टे तथा 3 घण्टा घर पर पढ़ाई में व्यतीत करता है। (तालिका 17.1)

इसी प्रकार आरती ने लगभग सभी विषयों में प्रथम परख के मुकाबले द्वितीय परख में बेहतर प्रदर्शन किया और सर्वाधिक सुधार गणित विषय में हुआ है।



क्या इन आँकड़ों को और बेहतर एवं संगठित तरीके से प्रस्तुत किया जा सकता है, ताकि उनका विश्लेषण और व्याख्या करना आसान व बेहतर हो जाए ? इस अध्याय में हम इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करेंगे।

गत सत्र में हम देख चुके हैं कि किस प्रकार संग्रहित सूचनाओं को एक बारम्बारता बंटन सारणी (Frequency distribution table) के रूप में पहले व्यवस्थित करके फिर सूचनाओं को चित्रालेख (pictographs) या दण्ड आलेखों (bargraphs) के रूप में निरूपित किया जाता है। हम कह सकते हैं कि सबसे लम्बा दण्ड ही बहुलक है यदि दण्ड बारम्बारता निरूपित करता है।

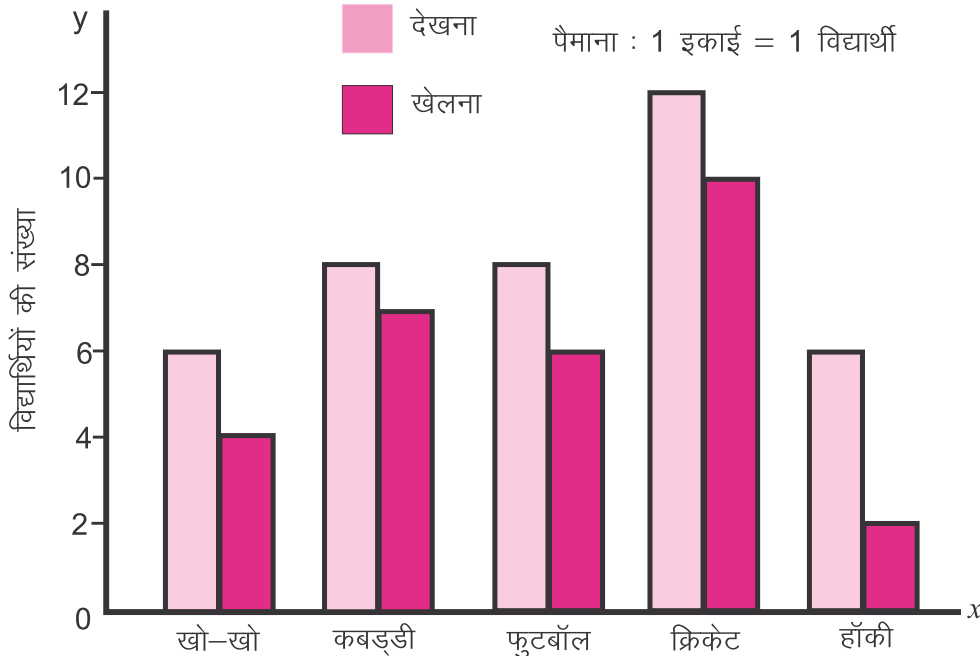
17.2 दोहरे दण्ड आलेख खींचना

एक कक्षा में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नांकित आँकड़ों पर विचार कीजिए :-

| पसंदीदा खेल | खो-खो | कबड्डी | फुटबॉल | क्रिकेट | हॉकी |
|-------------|-------|--------|--------|---------|------|
| देखना | 6 | 8 | 8 | 12 | 6 |
| खेलना | 4 | 7 | 6 | 10 | 2 |

उपर्युक्त आँकड़े कक्षा के विभिन्न विद्यार्थियों की संबंधित खेल को देखने एवं खेलने की रुचि को दर्शाते हैं। इन आँकड़ों को देखकर हम बता सकते हैं कि किस खेल को सर्वाधिक विद्यार्थी खेलते हैं, किस खेल को विद्यार्थी सबसे कम देखना पसंद करते हैं।

परन्तु एक विशेष खेल को देखने एवं खेलने वाले विद्यार्थियों में अंतर पता करने के लिए हमें देखने व खेलने वाले विद्यार्थियों की संख्या में तुलना करनी पड़ेगी। इसके लिए हम उन आलेखों को खींचना सीखेंगे, जिन्हें दोहरे दण्ड आलेख (double bar graphs) कहा जाता है। इसमें दोनों रुचियों की तुलना दण्ड आलेखों द्वारा साथ-साथ दी हुई होती है।



उदाहरण 1 एक बिजली सामग्री विक्रेता द्वारा वर्ष 2011 से 2015 तक प्रतिवर्ष बेचे गए सी.एफ.एल. ट्यूब एवं एल.ई.डी. बल्ब की संख्या नीचे दी गई है।

| वर्ष | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|-----------|------|------|------|------|------|
| CFL ट्यूब | 1200 | 1400 | 1100 | 900 | 600 |
| LED बल्ब | 100 | 400 | 700 | 1000 | 1400 |

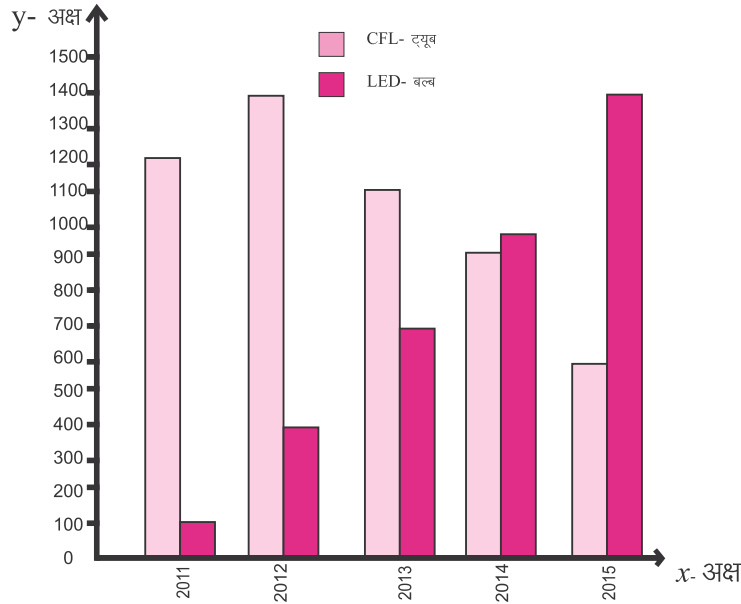
एक दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. किस प्रकार के प्रकाश उपकरण की बिक्री लगातार बढ़ी है?
2. 2011 की तुलना में 2015 में प्रकाश उपकरणों में वृद्धि हुई या कमी ?
3. दोनों प्रकार के प्रकाश उपकरणों की बिक्री में अंतर किस वर्ष सर्वाधिक रहा ?

हल

दोहरा दण्ड आलेख की रचना के पद –

1. ग्राफ पेपर पर x अक्ष (क्षैतिज) और y अक्ष (उर्ध्वाधर) बनाइए। वे आपस में $(0,0)$ मूल बिन्दु पर मिलते हैं।
2. x अक्ष पर वर्ष 2011 से 2015 तक लिखिए।
3. सी.एफ.एल. ट्यूब और एल.ई.डी. बल्ब की संख्या y अक्ष पर लिखें।
4. y अक्ष पर उचित पैमाना लीजिए ताकि दोनों प्रकाश उपकरणों की संख्या आसानी से लिखी जा सके। y अक्ष पर 1 सेमी = 100 ले सकते हैं।
5. संख्या को 100 से भाग देकर प्रत्येक स्तम्भ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
6. सी.एफ.एल. ट्यूब और एल.ई.डी. बल्ब को साथ-साथ स्तम्भों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।



- (1) दोहरे दण्ड आलेख को देखने से स्पष्ट है कि LED बल्ब की बिक्री लगातार बढ़ी है।
- (2) 2011 की तुलना में 2015 में कुल प्रकाश उपकरणों में वृद्धि स्पष्ट नजर आती है।
- (3) दोहरे दण्ड आलेख को देखने से स्पष्ट है कि 2011 में दोनों प्रकाश उपकरणों की बिक्री में अंतर सर्वाधिक रहा।

करो और सीखो

1. कक्षा 7 की पाँच छात्राओं के गणित और विज्ञान विषय के अंक तालिका में दिए गए हैं। इन आँकड़ों को उर्ध्वाधर दोहरे दण्ड आलेख द्वारा दर्शाए।

| छात्र का नाम | गणित | विज्ञान |
|--------------|------|---------|
| आरती | 65 | 75 |
| वर्षा | 70 | 75 |
| सिमरन | 55 | 70 |
| राधा | 75 | 80 |
| ज्योति | 50 | 60 |

2. दो परिवारों के एक महीने में होने वाले विभिन्न खर्च का विवरण निम्न तालिका में दर्शाया गया है। इस तालिका के आधार पर दोहरा दण्ड आलेख बनाइए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

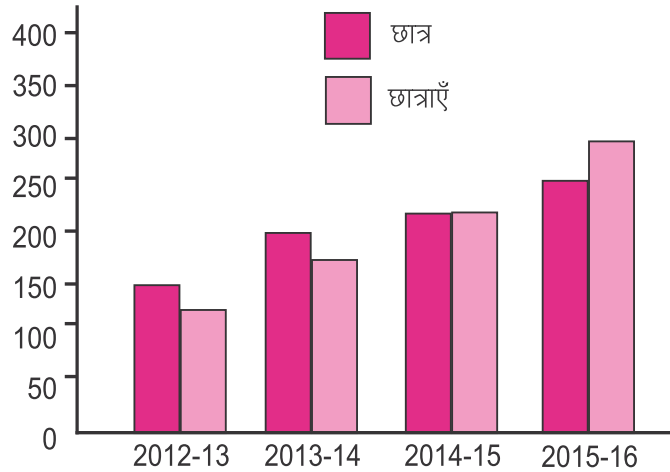
| खर्च मद | परिवार 1 | परिवार 2 |
|---------------------|----------|----------|
| मकान किराया | 2000 | 2500 |
| बिजली, पानी टेलीफोन | 800 | 600 |
| खादय सामग्री | 8000 | 7000 |
| बच्चों की शिक्षा | 2000 | 3000 |
| बचत | 2200 | 1900 |

- (i) किस मद पर खर्च अधिकतम है ?
(ii) किस मद पर खर्च न्यूनतम है ?
(ii) दोनों परिवारों की मासिक आय 15000 रु. हो तो दोनों परिवारों में बच्चों की शिक्षा पर खर्च का प्रतिशत क्या होगा ?

प्रश्नावली 17.1

1. निम्न आलेख में एक विद्यालय को सत्र के अनुसार विद्यार्थी संख्या को दर्शाया गया है। इस आलेख पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

- (i) किस सत्र में विद्यालय में छात्राओं की संख्या छात्रों से अधिक रही?
(ii) किस सत्र में विद्यालय में छात्र एवं छात्राओं की संख्या समान रही ?
(iii) 2015-16 में विद्यालय में कुल विद्यार्थियों की संख्या क्या थी ?



2. वर्ष 2011 से 2015 तक निःशुल्क पाठ्यपुस्तक वितरण के तहत एक जिले में कक्षा 7 को गणित तथा हिन्दी की पुस्तकों का वितरण निम्न तालिकानुसार हुआ।

| विषय/वर्ष | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|-----------|------|-------|-------|-------|-------|
| गणित | 8000 | 8500 | 9500 | 11000 | 13000 |
| हिन्दी | 9000 | 10000 | 10500 | 11500 | 14000 |

एक दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

- किस विषय की पुस्तक की माँग हमेशा अधिक रही है ?
 - किस वर्ष में दोनों पुस्तकों की माँग में अंतर न्यूनतम रहा है ?
 - किस वर्ष में दोनों पुस्तकों की माँग में अंतर अधिकतम रहा ?
3. उदयपुर से राजस्थान के निम्नांकित शहरों की सड़क एवं रेलमार्ग से अनुमानित दूरी निम्नांकित तालिका में दी गई है। तालिका के आधार पर दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

| भाहर उदयपुर से दूरी | सड़क मार्ग (किमी में) | रेल मार्ग (किमी में) |
|---------------------|-----------------------|----------------------|
| अजमेर | 290 | 310 |
| जयपुर | 410 | 440 |
| बीकानेर | 530 | 580 |
| जोधपुर | 270 | 300 |
| कोटा | 360 | 570 |

- सड़क मार्ग से उदयपुर से सर्वाधिक दूरी पर कौन सा शहर है ?
- कौन से शहर की दूरी में सड़क और रेलमार्ग में अंतर न्यूनतम है ?
- कौन से शहर की दूरी में सड़क और रेलमार्ग में अंतर सर्वाधिक है ?

17.3 आँकड़ों का संग्रह

हमारे दैनिक जीवन में किसी तथ्य को आँकड़ों के माध्यम से व्यक्त करने का बहुत महत्व है। जैसे यह कहा जाता है कि भारत की जनसंख्या काफी है के स्थान पर यह कहना कि भारत की जनसंख्या 2011 की जनगणना के अनुसार एक अरब इक्कीस करोड़ आठ लाख है ज्यादा उपयुक्त है। इसी प्रकार हमारे स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या काफी है, के स्थान पर यह कहना उचित होगा कि हमारे स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या 867 है। अतः हम कह सकते हैं कि आँकड़ों के माध्यम से हम हमारे विचारों को अधिक स्पष्ट रूप से व्यक्त कर सकते हैं। जिस प्रकार हमें भवन निर्माण से पूर्व पत्थर, चूना, सीमेंट, ईंटे आदि एकत्रित करना होता है, उसी प्रकार आँकड़ों के विश्लेषण एवं निष्कर्ष निकालने हेतु प्रारम्भ में आँकड़े एकत्रित करना अति आवश्यक है। आँकड़ों के उचित उपयोग से हम जटिल से जटिल समस्याओं को समझ कर इनका समाधान तार्किक रूप से ज्ञात करने में सक्षम हो सकते हैं। परन्तु इसके लिए यह अति आवश्यक है कि लिए गए आँकड़े शुद्ध, व्यापक एवं प्रमाणिक हो।

आँकड़ों को एकत्रित करने के स्रोतों के आधार पर इन्हें दो भागों में विभाजित किया जा सकता है।

(क) प्राथमिक आँकड़े (Primary Data) (ख) द्वितीयक आँकड़े (Secondary data)

(क) प्राथमिक आँकड़े – जिन आँकड़ों को स्वयं या कार्यकर्ताओं के सहयोग से नए सिरे से पहली बार संग्रहित करते हैं उन्हें हम प्राथमिक आँकड़े कहते हैं। उदाहरणार्थ यदि आपको अपनी कक्षा के विद्यार्थियों का पारिवारिक स्थिति का अध्ययन करना है तो कुछ आँकड़े यथा उनके घर की मासिक आय-व्यय, भाई-बहनों की संख्या, आय के स्रोत आदि के बारे में जानकारी एकत्र करनी होगी। ये आँकड़े प्राथमिक आँकड़े कहलाएँगे।

(ख) द्वितीयक आँकड़े – ये वे आँकड़े होते हैं जिनका पूर्व में किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा संकलन किया जा चुका है। जो प्रकशित अथवा अप्रकशित स्थिति में हो सकते हैं जैसे जनगणना या साक्षरता संबंधी आँकड़ों को भारत सरकार की अधिकृत संस्था भारत के जनगणना विभाग से प्राप्त किए जा सकता है।

17.4 आँकड़ों का संगठन

जब हम आँकड़ों को एकत्रित करते हैं तो हमें उन्हें व्यवस्थित करना होता है। हमें इसकी आवश्यकता क्यों पड़ती है ?

निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए –

विद्यालय में स्वास्थ्य परीक्षण के अंतर्गत 8 विद्यार्थियों की ऊँचाई निम्नांकित पाई गई –

| | | |
|----------------------|------------------|-------------------|
| विजय – 140 सेमी | किशोर – 138 सेमी | विद्या – 130 सेमी |
| तब्बसुम – 135 सेमी | रमेश – 145 सेमी | सारिका – 125 सेमी |
| दिव्यांशी – 131 सेमी | मोहित – 144 सेमी | |

इस रूप में इन आँकड़ों से कोई निष्कर्ष निकाल पाना आसान नहीं था। सारिका ने उन ऊँचाईयों को आरोही क्रम में लिखकर उन्हें तालिका के रूप में लिखा।

| विद्यार्थी का नाम | ऊँचाई (सेमी में) | विद्यार्थी का नाम | ऊँचाई (सेमी में) |
|-------------------|------------------|-------------------|------------------|
| सारिका | 125 | किशोर | 138 |
| विद्या | 130 | विजय | 140 |
| दिव्यांशी | 131 | मोहित | 144 |
| तब्बसुम | 135 | रमेश | 145 |

निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

1. सबसे लम्बे विद्यार्थी का नाम क्या है ?
2. सबसे छोटे विद्यार्थी का नाम क्या है ?
3. किशोर और तब्बसुम की ऊँचाई में अंतर कितना है ?

इस प्रकार हम समझ सकते हैं कि आँकड़े यदि व्यवस्थित रूप में संगठित किए जाए तो उनका अध्ययन एवं निष्कर्ष निकालना आसान हो जाएगा। हमारे सामने आने वाले अनेक आँकड़े सारणीबद्ध रूप में होते हैं। हमारे स्कूल के रजिस्टर, प्रगति पत्र, तापमान के रिकॉर्ड, प्रतिदिन की उपस्थिति तथा अन्य आँकड़े सारणीबद्ध रूप में होते हैं।

क्या आप कुछ और आँकड़ों के बारे में सोच सकते हैं जो सारणीबद्ध रूप में हों ?

करो और सीखो

भार ज्ञात करने वाली मशीन द्वारा अपनी कक्षा के विद्यार्थियों का वजन ज्ञात करें। इन आँकड़ों को व्यवस्थित कर तालिका बनाइए। इन आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखिए। फिर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. कक्षा में किस विद्यार्थी का भार सबसे अधिक है ?
2. कक्षा में कितने विद्यार्थियों का भार 25 किग्रा से अधिक है ?
3. कक्षा में कितने विद्यार्थियों का भार 20 से 30 किग्रा है ?

17.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

अपने दैनिक जीवन में आपने निम्न कथन अवश्य ही पढ़े या सुने होंगे।

1. कक्षा 7 के विद्यार्थियों की औसत आयु 13 वर्ष है।
2. मध्याह्न भोजन में प्रति विद्यार्थी ग्रहण किया भोजन 150 ग्राम है।
3. पिछले 10 दिनों का औसत तापमान 30 डिग्री (सेल्सियस) है।
4. लक्ष्य प्रतिदिन 5 घण्टे पढ़ाई करता है।

उपर्युक्त कथनों पर विचार कीजिए।

क्या आप कह सकते हैं कि पहले कथन के अनुसार कक्षा 7 के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 13 वर्ष है या द्वितीय कथन के अनुसार प्रत्येक विद्यार्थी प्रतिदिन पूरा-पूरा 150 ग्राम भोजन ही ग्रहण करता है।

स्पष्टतः इन प्रश्नों का उत्तर है “नहीं”।

तो इन कथनों का क्या आशय है ?

“औसत” से हम समझते हैं कि कक्षा 7 के अधिकतम विद्यार्थियों की आयु 13 वर्ष के आसपास है। कुछ विद्यार्थियों की आयु 13 वर्ष से कुछ कम या कुछ अधिक हो सकती है।

इसी प्रकार पिछले दिनों का औसत तापमान 32 डिग्री से आशय है कि तापमान लगभग 32 डिग्री के आसपास रहा। कभी वह 32 डिग्री से कम भी हुआ हो सकता है कभी 32 डिग्री से अधिक भी रहा होगा।

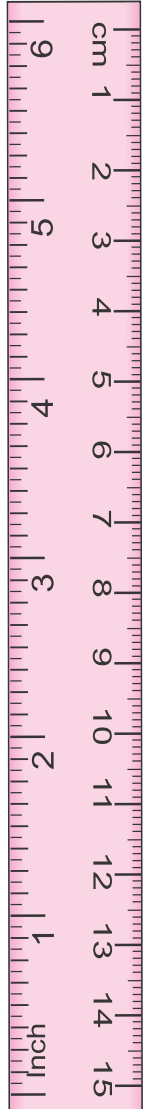
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि “औसत” एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षकों या आँकड़ों के एक समूह को केन्द्रीय प्रवृत्ति को निरूपित करती या दर्शाती है क्योंकि औसत सबसे अधिक और सबसे कम आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है। विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने वाले विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि या केन्द्रीय मानों की आवश्यकता होती है।

इनमें से एक प्रतिनिधि मान अंकगणितीय या समान्तर माध्य है।

17.6 समान्तर माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किया जाने वाला प्रतिनिधि मान समान्तर माध्य है, संक्षेप में इसे माध्य (mean) भी कहते हैं। निम्न उदाहरण को देखें –

उदाहरण 2 एक फल बेचने वाले को एक सप्ताह की शुद्ध कमाई क्रमशः 500 रु, 650 रु, 400 रु, 425 रु, 450 रु, 600 रु, तथा 475 रु है। फल बेचने वाले की औसत कमाई ज्ञात कीजिए ?



हल

$$\begin{aligned} \text{फल बेचने वाले की औसत कमाई} &= \frac{\text{सप्ताह की कुल कमाई}}{\text{सप्ताह में दिनों की संख्या}} \\ &= \frac{500 + 650 + 400 + 425 + 450 + 600 + 475}{7} \\ &= \frac{3500}{7} = 500 \text{ रु} \end{aligned}$$

फल बेचने वाले की औसत कमाई होगी = 500 रु प्रतिदिन

उदाहरण 3 प्रथम 6 सम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए ।

हल

हम जानते हैं कि प्रथम छः सम संख्याएँ हैं 2, 4, 6, 8, 10, 12

समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए हम सभी प्रेक्षणों का योग ज्ञात करके उसमें प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देते हैं। अतः इस स्थिति में

$$\begin{aligned} \text{समान्तर माध्य} &= \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}} \\ &= \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12}{6} \\ &= \frac{42}{6} = 7 \end{aligned}$$

इस प्रकार प्रथम छः सम संख्याओं का समान्तर माध्य 7 होगा।

17.7 प्रसार या परिसर

निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए –

उदाहरण 4 एक विद्यालय में कार्यरत पाँच शिक्षकों का वेतन क्रमशः 25000, 18000, 20000, 22000, तथा 23000 रुपये मासिक है।

1. सबसे अधिक वेतन पाने वाले शिक्षक का वेतन कितना है ?
2. सबसे अधिक और सबसे कम वेतन पाने वाले शिक्षकों के वेतन का अंतर कितना है ?
3. इन शिक्षकों के वेतन का माध्य ज्ञात कीजिए ?

हल

शिक्षकों के वेतन को आरोही क्रम में लिखने पर हमें प्राप्त होता है –

18000, 20000, 22000, 23000, 25000

इससे हम पता लगा सकते हैं कि

1. सबसे अधिक वेतन पाने वाले शिक्षक का वेतन 25000 रुपये है।
2. सबसे अधिक वेतन 25000 है तथा सबसे कम वेतन 18000 है। दोनों के मध्य अंतर $25000 - 18000 = 7000$ रु है।
3. शिक्षकों के वेतन का माध्य $= \frac{18000 + 20000 + 22000 + 23000 + 25000}{5}$

$$= \frac{108000}{5} = 21600 \text{ रुपये}$$

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अंतर में हमें प्रेक्षणों के प्रसार का एक अनुमान लग जाता है। हम इस परिणाम को आँकड़ों या प्रेक्षणों का **प्रसार** या **परिसर** कहते हैं।

करो और सीखो

1. अपने परिवार के सदस्यों की ऊँचाइयों का माध्य ज्ञात कीजिए।
2. अपने परिवार के सदस्यों की आयु का माध्य ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 17.2

1. एक विद्यालय की कक्षा 6 से 12 में विद्यार्थियों की संख्या क्रमशः निम्नलिखित है 78, 72, 67, 59, 54, 49, 48 तो बताइए –
 - (i) सबसे अधिक विद्यार्थी किस कक्षा में है ?
 - (ii) सबसे कम विद्यार्थी किस कक्षा में है ?
 - (iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है ?
 - (iv) इन आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए
2. प्रथम 10 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए ।
3. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 6 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए—
68, 03, 17, 78, 12, 104 रनों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।
4. बीकानेर से उदयपुर चलने वाली बस में सोमवार से शुक्रवार तक निम्नांकित संख्या में यात्रियों ने सफर किया— 45, 48, 32, 40, 30 प्रत्येक दिवस में यात्रियों का माध्य क्या होगा ?
5. एक गाँव में पाँच वर्षों तक निम्न फसलें उगाई गई फसल पर प्रति एकड़ लाभ (रुपये में) निम्नानुसार रहा।

| फसल | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---------|------|------|-------|------|-------|
| बाजरा | 6000 | 8000 | 5000 | 6500 | 8500 |
| ग्वार | 7000 | 8000 | 12000 | 9000 | 8500 |
| मूंगफली | 9000 | 7000 | 10000 | 8000 | 13000 |

ऊपर दी गई तालिका के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- (i) प्रत्येक फसल का पाँच वर्ष में माध्य लाभ ज्ञात कीजिए।
 - (ii) उपर्युक्त उत्तर के आधार पर अगले वर्ष कौन सी फसल उगानी चाहिए ?
6. यदि 3, 4, 8, 5, x , 3 अंको का समान्तर माध्य 4 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
 7. एक पुस्तकालय से 10 दिन में छात्रों को दी गई पुस्तकों की संख्या निम्नलिखित है –
40, 57, 32, 59, 72, 66, 40, 62, 72, 60
प्रतिदिन दी गई पुस्तकों का माध्य ज्ञात कीजिए।
 8. पाँच संख्याओं का औसत 18 है यदि चार संख्याएँ क्रमशः 22, 20, 14, 13 हो तो पाँचवी संख्या ज्ञात कीजिए।

9. एक शहर में किसी सप्ताह विशेष का तापमान निम्नानुसार अंकित किया गया ।

| दिन | सोमवार | मंगलवार | बुधवार | गुरुवार | शुक्रवार | शनिवार | रविवार |
|------------------------|--------|---------|--------|---------|----------|--------|--------|
| तापमान (डिग्री C° में) | 37 | 37.5 | 40 | 36.5 | 37.5 | 35 | 35.5 |

- उपर्युक्त आँकड़ों से तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए।
- इस सप्ताह का माध्य तापमान ज्ञात कीजिए।
- कितने दिन तापमान औसत से अधिक रहा ?

10. एक विद्यालय में आयोजित गायन प्रतियोगिता में तीन निर्णायकों द्वारा चार गायक प्रतिभागियों को निम्नानुसार 100 में से अंक दिए गए –

| प्रतिभागी का नाम | निर्णायक I | निर्णायक II | निर्णायक III |
|------------------|------------|-------------|--------------|
| राशि | 78 | 75 | 72 |
| सुमन | 82 | 75 | 83 |
| पूनम | 68 | 64 | 69 |
| खुशबु | 49 | 56 | 51 |

- निर्णायकों द्वारा दिए गए अंकों का परिसर क्या होगा ?
- कुल अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए ?
- विजेता प्रतिभागी का नाम बताइए।
- विजेता प्रतिभागी और चतुर्थ स्थान प्राप्त प्रतिभागी के माध्यों के मध्य कितना अंतर है ?

17.7 बहुलक

प्रतिनिधित्व मान का दूसरा प्रकार बहुलक है, आइए उदाहरण देखें।

उदाहरण 5 एक जूतों की दुकान पर विभिन्न नाप के जूते उपलब्ध हैं। दुकानदार ने जूतों की साप्ताहिक मांग को ज्ञात करने के लिए निम्न तालिकानुसार जूतों की बिक्री को रिकॉर्ड किया।

| जूते का नम्बर | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------------|----|----|----|----|----|----|
| बिक्री | 12 | 27 | 40 | 45 | 26 | 18 |

अगर दुकानदार के बेचे गए जूतों का माध्य ज्ञात करें तो –

हल

$$\text{माध्य} = \frac{\text{बेचे गए जूतों की कुल संख्या}}{\text{जूतों के नम्बर के कुल प्रकार}} = \frac{168}{6} = 28$$

तो क्या दुकानदार को प्रत्येक साइज के 28 जोड़ी जूते प्रति सप्ताह मंगवाने होंगे। निश्चित ही उपर्युक्त रिकॉर्ड के आधार पर दुकानदार अन्य नाप के मुकाबले 7, 8 नम्बर के जूते अधिक मंगवाएगा क्योंकि 7, 8 नम्बर नाप के जूतों की बिक्री अधिकतम हुई है।

इसमें से भी 8 नम्बर साइज के जूतों की बिक्री सबसे अधिक हुई है। यह आँकड़ों का एक अन्य प्रतिनिधि मान है। यह प्रतिनिधि मान आँकड़ों का बहुलक कहलाता है।

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं अर्थात् जिस पद की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वह पद बहुलक कहलाता है।

उदाहरण 6 निम्नांकित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5, 4, 4, 2, 5, 7, 5, 6, 5, 4, 3, 5

हल संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 7

प्रेक्षणों के निरीक्षण से स्पष्ट है अंक 5 सबसे अधिक बार आया है।

अतः बहुलक 5 होगा।

17.7.1 बड़े व अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

यदि आँकड़ों की संख्या अधिक हो तो उसको आरोही या अवरोही क्रम में लिखकर फिर गिनना इतना आसान नहीं होता है। ऐसी स्थिति में हम आँकड़ों को मिलान चिह्न की सहायता से सारणीबद्ध करते हैं। आँकड़ों को सारणीबद्ध करना हम पिछली कक्षा में सीख चुके हैं।

उदाहरण 7 100 मीटर की दौड़ प्रतियोगिता में 30 धावकों ने भाग लिया। दौड़ पूरी करने में उनके द्वारा लिया गया समय (सैकण्ड में) निम्नानुसार है –

14, 12, 13, 12, 10, 12, 14, 13, 12, 11, 12, 13, 14, 12, 14, 12, 13, 14, 14,
11, 10, 11, 12, 14, 13, 12, 12, 11, 12, 14 इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल आँकड़ों को सारणीबद्ध करने पर

| समय सैकण्ड में | मिलान चिह्न | धावकों की संख्या |
|----------------|-------------|------------------|
| 10 | | 2 |
| 11 | | 4 |
| 12 | | 11 |
| 13 | | 6 |
| 14 | | 7 |
| | योग | 30 |

इस सारणी को देखकर हम तुरंत कह सकते हैं कि इन आँकड़ों का बहुलक 12 है क्योंकि सबसे अधिक धावकों ने दौड़ 12 सैकण्ड में पूरी की।

सोचे एवं चर्चा करें

- क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं ?
- क्या बहुलक प्रेक्षण मात्र से ज्ञात किया जा सकता है ?

करो और सीखो

- कक्षा 7 के 40 विद्यार्थियों ने अपने अपने परिवार के सदस्यों की संख्या को एक साथ लिखा। यह संख्या नीचे दर्शाई गई है।
4, 3, 5, 4, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 4, 7, 6, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 4, 5, 3, 4, 6, 4, 5, 5, 4,
3, 4, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 5 इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।
- निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए।
21, 22, 25, 24, 22, 23, 23, 24, 25, 24, 22, 24, 23, 24, 23, 24, 22, 21, 25, 23

हमने देखा कि जहाँ माध्य हमें आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों का औसत प्रदान करता है वहीं बहुलक आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षणों को दर्शाता है।

निम्नांकित उदाहरणों पर विचार करें।

1. आपको अपने घर में प्रतिदिन बिजली की खपत के बारे में पता करना है।
2. रेडीमेड वस्त्र विक्रेता को अपने स्टॉल की आपूर्ति करनी है।
3. हमें अपने घर के लिए दरवाजे की ऊँचाई ज्ञात करनी है।
4. कक्षा के विद्यार्थियों के लिए पसंद की मिठाई के रूप में एक मिठाई का चयन करना है। तब किस मिठाई का चयन किया जाएगा।

पहले कथन पर विचार करें तो प्रतिदिन बिजली की खपत ज्ञात करने के लिए बिजली के मीटर से एक सप्ताह की खपत युनिट ज्ञात कर उसके माध्य से प्रतिदिन की खपत ज्ञात कर सकते हैं।

क्या दूसरे कथन के लिए भी हम इस विधि का उपयोग कर सकते हैं ?

हम जूतों के उदाहरण से देख सकते हैं कि वस्त्रों की आपूर्ति के लिए माध्य एक उपर्युक्त प्रतिनिधि मान नहीं होगा। बहुलक इसके लिए उपर्युक्त मान होगा।

इसी प्रकार तीसरे कथन के लिए माध्य और बहुलक दोनों से प्रतिनिधि मान नहीं होंगे। यहाँ परिवार के सबसे लम्बे सदस्यों के हिसाब से दरवाजे की ऊँचाई तय करनी होगी। इसी प्रकार शेष चौथे कथन पर विचार कर विश्लेषण करें तथा इसके लिए उपयुक्त प्रतिनिधि मान ज्ञात करें।

17.8 माध्यिका

हम देख चुके हैं कि कुछ स्थितियों में समांतर माध्य एक उपयुक्त केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है। तथा कुछ स्थितियों में बहुलक उपयुक्त केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है।

एक अन्य उदाहरण पर विचार करते हैं—

एक फ़ैक्ट्री में नौ कर्मचारियों का वेतन निम्नानुसार है।

3300, 4200, 5000, 3500, 4300, 3500, 4400, 3500, 5500

यदि हम वेतन के आधार पर कर्मचारियों को दो समूहों में बाँटता चाहते हैं तो इस स्थिति में समांतर माध्य या बहुलक क्या उचित प्रतिनिधि मान होगा ? इन आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर—

3300, 3500, 3500, 3500, 4200, 4300, 4400, 5000, 5500

हम देखते हैं कि उपर्युक्त आँकड़ों में 4200 ऐसी संख्या है जिसके दोनों ओर 4 - 4 संख्याओं के समूह हैं। अर्थात् चार कर्मचारियों का वेतन 4200 से कम है तथा चार कर्मचारियों का वेतन 4200 से अधिक है। इस प्रकार संख्याओं को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर ठीक मध्य में आने वाली संख्या को हम "माध्यिका" या माध्यक कहते हैं।

यदि आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए जो मध्य में आने वाले पद का मान माध्यिका कहलाता है।

उदाहरण 8 निम्नांकित आँकड़ों की माधिका ज्ञात कीजिए –

0, 47, 35, 20, 30, 40, 50

हल आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है

0, 20, 30, 35, 40, 47, 50

उपर्युक्त आँकड़ों में कुल 7 पद हैं जिनका मध्य पद ज्ञात करने के लिए उसमें 1 जोड़कर 2 का भाग दिया जाता है। (जब पदों की संख्या विषम हो)

अर्थात् उपर्युक्त आँकड़ों का माधिका पद चौथा है, जो 35 है। अतः उपर्युक्त आँकड़ों की माधिका 35 है।

इसी प्रकार यदि पदों की संख्या सम हो तो आरोही क्रम में जमाने के पश्चात् मध्य के दो पदों का माध्य ही माधिका होती है।

$$\text{माधिका पद} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} \text{ चौथा पद}$$

करो और सीखो

1. आरोही क्रम में व्यवस्थित प्रेक्षण निम्नानुसार है –
8, 11, 12, 16, $16 + x$, 20, 25, 30
यदि माधिका 18 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
2. ज्योति के विभिन्न विषयों में अंक (10 में से) निम्नानुसार आए –
5, 7, 0, 3, 5, 8
ज्योति ने 0 को छोड़ कर शेष अंकों से माध्य, माधिका तथा बहुलक निकाला। क्या उसने सही किया ?

प्रश्नावली 17.3

1. निम्न आँकड़ों से बहुलक ज्ञात कीजिए।
7, 6, 4, 5, 6, 4, 6, 3, 2, 7, 8, 6, 4, 6, 5
2. वंदना ने एक पासा लिया। उसने पासे को 20 बार उछाला और प्रत्येक बार प्राप्त संख्या को निम्न प्रकार लिखा –
3, 4, 6, 3, 5, 2, 2, 3, 5, 4
5, 6, 6, 1, 5, 6, 3, 5, 2, 4
उपर्युक्त आँकड़ों की सहायता से माधिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।
3. एक फैक्ट्री में काम करने वाले 40 मजूदारों के वजन (किग्रा में) निम्नांकित है –
60, 65, 70, 65, 60, 70, 65, 70, 75, 80, 75, 60, 65, 70, 65, 65
70, 65, 60, 70, 65, 75, 80, 75, 80, 65, 60, 65, 70, 80
उपर्युक्त आँकड़ों की सहायता से माधिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

4. निम्न चरों की माधिका ज्ञात कीजिए।

37, 31, 42, 43, 46, 25, 39, 45, 32

5. एक कक्षा की 21 व्यक्तियों की ऊँचाई निम्न प्रकार से है –

147, 149, 150, 152, 148, 151, 148, 150, 151, 149

152, 151, 152, 151, 150, 148, 149, 152, 153, 151, 152

(i) उपर्युक्त आँकड़ों की माधिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

(ii) क्या उपर्युक्त आँकड़ों के एक से अधिक बहुलक है।

6. एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार है –

105, 47, 0, 36, 50, 16, 7, 70, 65, 36, 52

उपर्युक्त आँकड़ों से माध्य, माधिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान है ?

हमने सीखा

1. एकत्रित किए गए आँकड़ों को बारम्बारता बंटन सारणी की सहायता से दण्ड आलेखों के रूप में दर्शाया जा सकता है। दंड आलेख संख्याओं का समान चौड़ाई वाले दंडों द्वारा एक चित्र निरूपण है।
2. एक दोहरा दंड आलेख एक ही निरीक्षण में प्रेक्षणों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक होता है।
3. आँकड़ों के संग्रहण, सारणीयन एवं प्रस्तुतीकरण से हमें अपने अनुभवों को संग्रहित करने तथा निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।
4. आँकड़ों को एकत्रित करने से पूर्व यह जानना आवश्यक है कि उनका उपयोग किन कार्यों में किया जाता है।
5. एकत्रित आँकड़ों को सारणीबद्ध किया जाना आवश्यक है ताकि इनको सरलता से समझा जा सके और व्याख्या की जा सके।
6. समांतर माध्य, बहुलक तथा माधिका आँकड़ों के प्रतिनिधि मान है।
7. आँकड़ों के समूह को जोड़कर आँकड़ों की संख्या से भाग देने पर माध्य प्राप्त होता है। जो आँकड़ों के न्यूनतम एवं अधिकतम मान के मध्य होता है।
8. आँकड़ों के समूह में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं। यह एक या एक से अधिक हो सकता है।
9. यदि आँकड़ों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए तो मध्य में आने वाले पद का मान माधिका कहलाता है।

