18

प्रायिकता
(Probability)

18.01 प्रस्तावना (Introduction):

हमारे सामने प्रतिदिन विभिन्न ऐसी घटनाएं घटित होती हैं जिनके एक से अधिक परिणाम हो सकते हैं। ऐसी घटनाओं के परिणामों की जानकारी करने की जिज्ञासा प्रत्येक व्यक्ति को होना स्वाभाविक है। ऐसी घटनाओं के परिणामों का पूर्वानुमान करके व्यक्ति लाभ उठाने का प्रयास भी करता है। किसी भी घटना से सम्बन्धित पूर्व सूचनाओं व परिस्थितियों के आधार पर परिणामों की संभावनाओं का पता करने के सिद्धान्त को प्रायिकता कहते हैं।

प्रायिकता के सिद्धान्त की उत्पत्ति 17 वीं शताब्दी में यूरोप में हुई। जहां के उद्योगपतियों एवं व्यापारियों ने उनसे सम्बन्धित व्यवसाय के परिणामों के पूर्वानुमान करने के प्रयास किये, जिससे अधिक से अधिक लाभ हो सके। इन लोगों ने अपनी समस्याओं को तत्कालीन गणितज्ञों गेलीलियो, पास्कल, फर्मा कारडेनों आदि के सामने रखा। गणितज्ञों ने इन समस्याओं के समाधान हेतु गणितीय विधियों का विकास किया, जिससे गणित की इस शाखा की उत्पत्ति हुई। 18 वीं एवं 19 वीं शताब्दी में प्रमुख गणितज्ञों लॉप्लास, गॉस और बरनौली आदि ने इस सिद्धान्त का और विकास किया। 20 वीं शताब्दी में प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित प्रतिचयन सिद्धान्त, निर्णय सिद्धान्त आदि का प्रतिपादन हुआ, जिनका श्रेय आर. एस. फिशर तथा कार्ल पियर्सन आदि को जाता है।

आधुनिक युग में प्रायिकता के सिद्धान्त का उपयोग विभिन्न क्षेत्रों में भविष्य के सम्बन्ध में निर्णय लेने हेतु किया जा रहा है जैसे किसी राज्य या देश का बजट बनाने में, बीमा कम्पनियों में, संयोग पर आधारित खेलों में, कृषि, अर्थशास्त्र, वैज्ञानिक अनुसंधान में, सैनिक विशेषज्ञ सुरक्षा सम्बन्धी नीति निर्धारण में, व्यापक रूप से व्यवसाय के क्षेत्र में, प्राकृतिक एवं भौतिक विज्ञान के क्षेत्र में, समाज एवं राज्य व्यवस्था की महत्वपूर्ण नीति निर्धारण में किया जाता है। अब सर्वप्रथम हम प्रायिकता के अध्ययन में काम में आने वाले कुछ महत्वपूर्ण शब्दावलियों को परिभाषित करेंगे।

18.02 परिभाषाएं :

1. यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment): एक प्रयोग जिसके बारे में सभी संभव परिणाम पहले से ही ज्ञात हों तथा प्रयोग के किसी विशेष परिणाम के आने का निश्चित अनुमान नहीं लगाया जा सके, यादृच्छिक प्रयोग कहलाता है। जैसे एक सिक्के के उछाल में चित्त या पट दो परिणाम पहले से ज्ञात हैं, लेकिन निश्चित परिणाम नहीं बताया जा सकता। अतः सिक्के को उछालना यादृच्छिक प्रयोग है।

2. अभिप्रयोग एवं घटना (Trial and Event): किसी भी संदर्भ का कोई प्रयोग जिसका कई सम्भावित परिणामों में से एक परिणाम अवश्य प्राप्त होता हो, एक अभिप्रयोग कहलाता है तथा इसके सम्भावित परिणाम घटनाएँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थः (i) एक सिक्के को उछालना एक अभिप्रयोग है और चित्त (H) या पट (T) आना एक घटना है।

(ii) एक पासे को उछालना एक अभिप्रयोग है और 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से किसी एक अंक का आना घटना है।

(iii) परीक्षा में किसी परीक्षार्थी का बैठना एक अभिप्रयोग है एवं उत्तीर्ण या अनुत्तीर्ण होना एक घटना है।

3. सरल घटना (Simple Event): किसी अभिप्रयोग में एक समय में केवल एक घटना घटित हो तो उसे सरल घटना कहते हैं। उदाहरणार्थः एक थैले में कुछ काली तथा सफेद गेंदें हैं उसमें से एक गेंद निकालना सरल घटना है।

4. निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ (Exhaustive events or Total number of cases): किसी अभिप्रयोग के समस्त सम्भावित परिणाम उस अभिप्रयोग की निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थः

(i) एक सिक्के को उछालना एक अभिप्रयोग है और चित्त (H) या पट (T) आ सकते हैं। अतः इस अभिप्रयोग में 2 निःशेष घटनाएँ हैं।

(ii) एक पासे को उछालने पर 1, 2, 3, 4, 5, या 6 अंक आ सकता हैं। अतः इस अभिप्रयोग में 6 निःशेष घटनाएँ हैं।

5. अनुकूल घटनाएँ या स्थितियाँ (Favourable events or cases) किसी अभिप्रयोग में किसी विशिष्ट घटना की अनुकूल स्थितियाँ उस प्रयोग के उन परिणामों की संख्या हैं जिसमें वह विशिष्ट घटना घटित होती है। उदाहरणार्थ :

(i) एक पासे को उछालने पर सम अंक आने की अनुकूल घटनाएँ 2,4,6 अर्थात् 3 हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से दो पत्ते खींचने में राजा आने की अनुकूल स्थितियाँ ${}^4C_2$ अर्थात् 6 हैं।

(iii) दो पासों को उछालने पर योग 5 आने के लिए 4 अनुकूल स्थितियाँ हैं: (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) अर्थात् 4 हैं।

6. स्वतंत्र व आश्रित घटनाएँ (Independent and dependent events): (1) **स्वतन्त्र घटनाएँ** : दो या दो से अधिक घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती हैं यदि किसी एक के घटित होने या न होने का प्रभाव शेष घटनाओं के घटित होने या न होने पर नहीं पड़ता है। उदाहरणार्थ :

एक सिक्के तथा एक पासे के साथ साथ उछालने पर सिक्के पर पट तथा पासे पर 4 आना स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।

(2) **आश्रित घटनाएँ** : दो या दो से अधिक घटनाएँ इस प्रकार हों कि एक के घटित होने का प्रभाव दूसरे पर पड़ता हो तो उन्हें आश्रित घटनाएँ कहते हैं। उदाहरणार्थ :

ताश की साधारण गड्डी से खींचे गये एक पत्ते का पान का पत्ता होना तदुपरान्त बिना इस पत्ते को गड्डी में मिलायें पुनः खींचे गये पत्ते का हुकुम का पत्ता होना दोनो आश्रित घटनाएँ हैं।

7. परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त घटनाएँ (Mutually exclusive or disjoint events): दो या दो से अधिक घटनाएँ परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त घटनाएँ कहलाती हैं यदि इनमें से कोई दो घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सके अर्थात् यदि एक घटना घटित होती है, तो शेष घटनाएँ घटित नहीं हो सके। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालने पर चित्त या पट आना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचने पर राजा होना या रानी होना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

8. समप्रायिक घटनाएँ (Equally likely events): यदि किसी प्रयोग में सभी घटनाओं के घटित होने की समान सम्भावना हो तो ऐसी घटनाओं को समप्रायिक घटनाएँ कहते हैं। उदाहरणार्थ:

(i) एक सिक्के को उछालने पर चित्त (H) या पट (T) आना समप्रायिक घटनाएँ हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से पत्ते के खींचने पर लाल या काला पत्ता होना समप्रायिक घटनाएँ हैं।

9. मिश्र घटनाएँ (Compound events): यदि दो या दो से अधिक घटनाएँ एक साथ घटित हों तो वे मिश्र घटनाएँ या संयुक्त घटनाएँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थ :

दो थैलों में कुछ नीली व कुछ लाल गेंदें रखी हैं। किसी एक थैले का चुनाव कर उसमें से एक गेंद निकालना एक मिश्र घटना है क्योंकि दो थैलों में से एक का चयन कर और फिर चुने हुए थैले में से एक गेंद निकालना साथ–साथ घटित होने वाली घटना है।

10. प्रतिदर्श बिन्दु तथा प्रतिदर्श समष्टि (Sample point and sample space): किसी अभिप्रयोग का प्रत्येक परिणाम एक प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है तथा इन सभी प्रतिदर्श बिन्दुओं का समुच्चय उस अभिप्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है। इसे प्रायः S से व्यक्त किया जाता है। उदाहरणार्थ:

(i) दो सिक्कों के उछाल में प्रतिदर्श बिन्दु हैं

$$(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)$$

तथा $S=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$ प्रतिदर्श समष्टि हैं।

(ii) 3 बालक और 2 बालिकाओं में से 2 को चुना जाता है। इस अभिप्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि होगी (बालक B_1,B_2,B_3, बालिका G_1,G_2) :

$$S=\{B_1B_2,B_2B_3,B_3B_1,B_1G_1,B_1G_2,B_2G_1,B_2G_2,B_3G_1,B_3G_2,G_1G_2\}$$

18.03 प्रायिकता की गणितीय परिभाषा

यदि किसी अभिप्रयोग के कुल n परिणाम समप्रायिक, परस्पर अपवर्जी एवम् निःशेष हों और उनमें से m परिणाम किसी विशेष घटना A के अनुकूल हों तो A की प्रायिकता अनुपात $\frac{m}{n}$ द्वारा परिभाषित की जाती है जिसे संकेत P(A) से व्यक्त करते हैं।

$$\text{अतः } P(A) = \frac{\text{A की अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{A की निःशेष स्थितियाँ}} = \frac{m}{n} \quad \text{(संख्यात्मक माप)}$$

यदि किसी अभिप्रयोग में घटना A का घटना निश्चित हो तो $m = n$ होगा तथा

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1,$$

यदि किसी घटना A का घटना असम्भव हो तो $m = 0$ तथा

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0,$$

इसलिए किसी भी घटना A के लिए $0 \le P(A) \le 1$

अर्थात् किसी भी घटना की प्रायिकता 0 से कम तथा 1 से अधिक नहीं हो सकती है और प्रायिकता की सीमा 0 से 1 तक होती है। घटना A के घटित न होने की प्रायिकता $P(\bar{A})$ द्वारा प्रदर्शित की जाती है।

अतः $P(\bar{A}) = \dfrac{\text{घटना A की प्रतिकूल स्थितियाँ}}{\text{घटना A की निःशेष स्थितियाँ}} = \dfrac{n-m}{n} = 1 - \dfrac{m}{n}$

या $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

18.04 संकेतन (Notation) :

(i) $P(A) =$ घटना A के घटित होने की प्रायिकता

(ii) $P(\bar{A}) =$ घटना A के घटित नहीं होने की प्रायिकता

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक पासे के फेंकने पर सम अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: एक पासे के फेंकने पर 6 तरह के अंक आ सकते हैं। अतः घटना की निःशेष स्थितियाँ = 6, प्रदत्त घटना के लिए सम अंक 2,4,6 आयेंगे। जिनकी संख्या 3 हैं, अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 3

अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

उदाहरण-2. दो पासों के फेंकने पर अंको का योग 7 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: दो पासों के फेंकने पर $6 \times 6 = 36$ परिणाम प्राप्त हो सकते हैं। अतः प्रदत्त घटना के लिए निःशेष स्थितियाँ = 36

अंकों का योग 7 आने के लिए निम्नलिखित युग्म बनते हैं

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) जिनकी संख्या 6 है।

अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 6

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

उदाहरण-3. यदि एक लीप वर्ष का यादृच्छिक चयन किया गया हो तो इस वर्ष में 53 सोमवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: हमें ज्ञात है कि लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं। अतः 52 पूर्ण सप्ताह तथा दो दिन शेष बचते हैं। इन दो दिनों की सात संभावनाएँ निम्नलिखित प्रकार से हो सकती हैं। 1. सोमवार और मंगलवार 2. मंगलवार और बुधवार 3. बुधवार और बृहस्पतिवार 4. बृहस्पतिवार और शुक्रवार 18. शुक्रवार और शनिवार 6. शनिवार और रविवार 7. रविवार और सोमवार।

अतः प्रदत्त घटना के लिए निःशेष स्थितियाँ = 7 इन सात संभावित स्थितियों में से दो में सोमवार आते हैं। अतः प्रदत्त घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 2

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{2}{7}$

उदाहरण-4. बारह टिकटों पर एक–एक संख्या 1 से 12 तक लिखी गई हैं। यदि उनमें से कोई एक टिकट का यादृच्छिक चयन किया जाये तो इस पर लिखी हुई संख्या के 2 या 3 के गुणज होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: 1 से 12 तक अंकों में 2 या 3 के गुणज 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12 हैं। अतः समप्रायिक 12 स्थितियों में से 8 अनुकूल हैं।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

उदाहरण-5. एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: एक सिक्के को एक बार उछालने के प्रयोग में, सम्भव परिणामों की संख्या 2 है। चित (H) पर (T)। मान लीजिए घटना E "पट प्राप्त करना" है। तब, E के अनुकूल (अर्थात् पट प्राप्त करने के अनूकूल) परिणामों की संख्या 1 है। अतः

$$P(E) = P(\text{पट}) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण-6. एक थैले में एक सफेद गेंद, एक काली गेंद और एक लाल गेंद एक ही आकार की हैं। सविता बिना थैले के अंदर झाँके, इसमें से एक गेंद निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद लाल होगी?

हल: सविता द्वारा कोई भी गेंद निकालना समप्रायिक है। अतः सभी सम्भव परिणामों की संख्या 3 है।

माना 'लाल गेंद निकालना' घटना R है। अतः R के अनुकूल परिणामों की संख्या 1 है।

अतः $\quad P(R)=\dfrac{1}{3}$

उदाहरण-7. एक पासे को एक बार उछाला जाता है। 5 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

हल: एक पासे को एक बार उछालने पर सभी सम्भव परिणाम छः ये 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। माना लीजिए 5 से छोटी या 3 बराबर संख्या प्राप्त करना घटना E है। अतः घटना E के अनुकूल परिणाम 1, 2, 3, 4 और 5 हैं।

अतः घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या 5 है।

अतः $\quad P(E)=\dfrac{5}{6}$

उदाहरण-8. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इस पत्ते के बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: 52 पत्तों की एक गड्डी में 4 बादशाह होते हैं। मान लीजिए

घटना E 'एक बादशाह होता' है।

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

संभव परिणामों की संख्या = 52

अतः $\quad P(E)=\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$

उदाहरण-9. दो खिलाड़ी राम और श्याम शतरंज का एक मैच खेलते हैं यह ज्ञात है कि राम द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता $\dfrac{4}{5}$ है। श्याम के जीतने की क्या प्रायिकता है?

हल: मान लीजिए R और S क्रमशः राम के जीतने और श्याम के जीतने की घटनाएँ व्यक्त करते है।

राम के जीतने की प्रायिकता $\quad = P(R)=\dfrac{4}{5}$

श्याम के जीतने की प्रायिकता $\quad = P(S)=1-P(R)=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

उदाहरण-10. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है। कम से कम एक चित्त की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: एक सिक्के को दो बार उछालने पर सम्भावित परिणाम (H, H); (H, T); (T, H); (T, T) है।

मान लीजिए घटना E "कम से कम एक चित्त आना" है।

अतः अनुकूल परिणाम (H, H); (H, T) और (T, H) है।

अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

अतः $\quad P(E)=\dfrac{3}{4}$

उदाहरण-11. दो पासो को एक साथ उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पासों की संख्याओं का योग 7 हो।

हल: दो पासो को एक साथ उछालने पर सम्भावित परिणाम 36 है, जो कि निम्न प्रकार है–

{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

मान लीजिए घटना E संख्याओं का योग 7 हैं।

अतः अनुकूल परिणाम $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ है।

अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

अतः $P(E)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

प्रश्नमाला 18.1

1. एक पासे को फेंकने पर 4 से बड़ा अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता हैं। दोनों बार चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. 1 से 17 तक की प्राकृत संख्याओं में से एक संख्या का यादृच्छिक चयन किया जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह एक अभाज्य संख्या हो।
4. एक सिक्के के लगातार तीन उछालों में एकान्तरतः चित्त या पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. एक अलीप वर्ष में केवल 52 रविवार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. यदि $P(A)=0.65$ है, तो "A नहीं" की प्रायिकता क्या है?
7. दो सिक्को को एक बार उछालने पर अधिक से अधिक एक पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. एक पासे को दो बार उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि संख्याओं का योग
   (i) 9 हैं। (ii) 13 हैं।
9. एक थैले में 5 लाल और 3 सफेद गेंद है। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि गेंद
   (i) सफेद हों? (ii) सफेद नहीं हो?
10. किसी कारण 12 खराब पेन, 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है यदि एक पेन यादृच्छया चुना जाता है तो इसके अच्छे होने की क्या प्रायिकता है?
11. 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
    (i) लाल रंग का गुलाम (ii) लाल रंग का पत्ता (iii) पान का ईक्का (iv) ईंट की बेगम
    (v) हुकुम का पत्ता

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **अभिप्रयोग एवं घटना :** किसी भी संदर्भ का कोई प्रयोग जिसका कई सम्भावित परिणामों में से एक परिणाम अवश्य होता हो, एक अभिप्रयोग कहलाता है तथा इसके सम्भावित परिणाम घटनाएँ कहलाती हैं।
2. **निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ :** किसी अभिप्रयोग के समस्त सम्भावित परिणाम उस अभिप्रयोग की निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ कहलाती हैं।
3. **अनुकूल घटनाएँ या स्थितियाँ :** किसी अभिप्रयोग में किसी विशिष्ट घटनाओं की अनुकूल स्थितियाँ उस प्रयोग के उन परिणामों की संख्या है जिससे वह विशिष्ट घटना घटित होती है।
4. **प्रायिकता :**

   घटना A के अनुकूल होने की प्रायिकता

   $$P(A)=\frac{\text{घटना A के अनुकूल घटनाएँ}}{\text{निःशेष घटनाएँ}}=\frac{m}{n}$$

   घटना A के नहीं घटने की प्रायिकता

   $$P(\bar{A})=\frac{\text{घटना A प्रतिकूल घटनाएँ}}{\text{निःशेष घटनाएँ}}=\frac{n-m}{n}$$

18. $P(\bar{A}) = 1-P(A)$ या $P(A)+P(\bar{A})=1$

6. प्रायिकता की सीमा $0 \le P(A) \le 1$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 18.1

(1) $\frac{1}{3}$ *(2)* $\frac{1}{4}$ *(3)* $\frac{7}{17}$ *(4)* $\frac{1}{4}$ *(5)* $\frac{6}{7}$ *(6)* 0.35 *(7)* $\frac{1}{2}$

(8) (i) $\frac{1}{9}$ (ii) 0 *(9)* (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$ *(9)* (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$ *(10)* $\frac{11}{12}$

(11) (i) $\frac{1}{52}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{52}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$