गणित

कक्षा 7

राजकीय विद्यालयों में निःशुल्क वितरण हेतु

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

प्रकाशक

राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल, जयपुर

संस्करण : 2016

मूल्य :

पेपर उपयोग : आर. एस. टी. बी. वाटरमार्क
80 जी. एस. एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशक : राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल
2–2 ए, झालाना डूंगरी, जयपुर

मुद्रक :

मुद्रण संख्या :

पाठ्यपुस्तक निर्माण
वित्तीय सहयोगः
यूनिसेफ राजस्थान, जयपुर

प्राक्कथन

बदलती हुई परिस्थितियों के अनुरूप शिक्षा में परिवर्तन होना जरूरी है, तभी विकास की गति तेज होती है। विकास में सहायक कई तत्त्वों के अलावा शिक्षा भी एक प्रमुख तत्त्व है। विद्‌यालयी शिक्षा को प्रभावशाली बनाने के लिए पाठ्‌यचर्या को समय–समय पर बदलना एक आवश्यक कदम है। वर्तमान में राष्ट्रीय पाठ्‌यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम 2009 के द्‌वारा यह स्पष्ट है कि समस्त शिक्षण क्रियाओं में 'बालक' केन्द्र के रूप में हैं। हमारी सिखाने की प्रक्रिया इस प्रकार हो कि बालक स्वयं अपने अनुभवों के आधार पर समझ कर ज्ञान का निर्माण करें। उसके सीखने की प्रक्रिया को ज्यादा से ज्यादा स्वतंत्रता दी जाए, इसके लिए शिक्षक एक सहयोगी के रूप में कार्य करें। पाठ्‌यचर्या को सही रूप में पहुँचाने के लिए पाठ्‌यपुस्तक महत्त्वपूर्ण साधन है। अतः बदलती पाठ्‌यचर्या के अनुरूप ही पाठ्‌यपुस्तकों में परिवर्तन कर राज्य सरकार द्वारा नवीन पाठ्‌यपुस्तक तैयार कराई गई है।

पाठ्‌यपुस्तक तैयार करने में यह ध्यान रखा गया है कि पाठ्‌यपुस्तक सरल, सुगम, सुरुचिपूर्ण, सुग्राह्‌य एवं आकर्षक हो, जिससे बालक सरल भाषा, चित्रों एवं विभिन्न गतिविधियों के माध्यम से इनमें उपलब्ध ज्ञान को आत्मसात् कर सके। साथ ही वह अपने सामाजिक एवं स्थानीय परिवेश से जुड़े तथा ऐतिहासिक एवं सांस्कृतिक गौरव, संवैधानिक मूल्यों के प्रति समझ एवं निष्ठा बनाते हुए एक अच्छे नागरिक के रूप में अपने आप को स्थापित कर सके।

शिक्षकों से मेरा विशेष आग्रह है कि इस पुस्तक को पूर्ण कराने तक ही सीमित नहीं रखें, अपितु पाठ्‌यक्रम एवं अपने अनुभव को आधार बना कर इस प्रकार प्रस्तुत करें कि बालक को सीखने के पर्याप्त अवसर मिले एवं विषय शिक्षण के उद्‌देश्यों की प्राप्ति की जा सके।

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.) उदयपुर पाठ्‌यपुस्तक विकास में सहयोग के लिए उन समस्त राजकीय एवं निजी संस्थानों, संगठनों यथा एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली, राज्य सरकार, भारतीय जनगणना विभाग, आहड़ संग्रहालय उदयपुर, जनसंपर्क निदेशालय जयपुर, राजस्थान राज्य पाठ्‌यपुस्तक मण्डल जयपुर, विद्‌या भारती, विद्‌याभवन संदर्भ केन्द्र पुस्तकालय, उदयपुर एवं लेखकों,समाचार पत्र–पत्रिकाओं, प्रकाशकों तथा विभिन्न वेबसाइट्‌स के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने पाठ्‌यपुस्तक निर्माण में सामग्री उपलब्ध कराने एवं चयन में सहयोग दिया। हमारे प्रयासों के बावजूद किसी लेखक, प्रकाशक, संस्था, संगठन और वेबसाइट का नाम छूट गया हो तो हम उनके आभारी रहते हुए क्षमा प्रार्थी हैं। इस संबंध में जानकारी प्राप्त होने पर आगामी संस्करणों में उनका नाम शामिल कर लिया जाएगा।

पाठ्यपुस्तकों की गुणवत्ता बढ़ाने हेतु श्री कुंजीलाल मीणा, शासन सचिव, प्रारंभिक शिक्षा, श्री नरेशपाल गंगवार, शासन सचिव, माध्यमिक शिक्षा एवं आयुक्त राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा परिषद्, श्री बाबूलाल मीणा, निदेशक प्रारंभिक शिक्षा एवं श्री सुवालाल, निदेशक माध्यमिक शिक्षा, श्री बी. एल. जाटावत, आयुक्त, राजस्थान प्रारम्भिक शिक्षा परिषद्, जयपुर, राजस्थान सरकार का सतत् मार्गदर्शन एवं अमूल्य सुझाव संस्थान को प्राप्त होते रहे हैं। अतः संस्थान हृदय से आभार व्यक्त करता है।

इस पाठ्यपुस्तक का निर्माण यूनिसेफ के वित्तीय एवं तकनीकी सहयोग से किया गया है। इसमें सेम्युअल एम., चीफ यूनिसेफ राजस्थान जयपुर, सुलग्ना रॉय शिक्षा विशेषज्ञ एवं यूनिसेफ से संबंधित अन्य सभी अधिकारियों के सहयोग के लिए संस्थान आभारी है। संस्थान उन सभी अधिकारियों एवं कार्मिकों का, जिनका प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रूप से इस कार्य संपादन में सहयोग रहा है, उनकी प्रशंसा करता है।

मुझे इस पुस्तक को प्रस्तुत करते हुए प्रसन्नता हो रही है, साथ ही यह विश्वास है कि यह पाठ्यपुस्तक विद्यार्थियों एवं शिक्षकों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी और अध्ययन–अध्यापन एवं विद्यार्थी के व्यक्तित्व विकास की एक प्रभावशाली कड़ी के रूप में कार्य करेगी।

विचारों एवं सुझावों को महत्त्व देना लोकतंत्र का गुण है अतः राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान उदयपुर सदैव इस पुस्तक को और श्रेष्ठ एवं गुणवत्तापूर्ण बनाने के लिए आपके बहुमूल्य सुझावों का स्वागत करेगा।

निदेशक
राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं
प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

संरक्षक : विनीता बोहरा, निदेशक, राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.,) उदयपुर

मुख्य समन्वयक: नारायण लाल प्रजापत, उपनिदेशक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

समन्वयक: डॉ. ममता बोल्या, अनुसंधान सहायक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

संयोजक: उमंग पण्ड्या, वरिष्ठ अध्यापक, रा.मा.वि. वाका, बाँसवाड़ा

लेखकगण: रूपेन्द्र मोहन शर्मा, जिला सचिव, विद्या भारती, बा.उ.मा. आदर्श विद्या मंदिर, दौसा
ओंकार दास वैष्णव, से.नि. प्रधानाचार्य, चित्तौड़गढ़
रणवीर सिंह, उपप्रधानाचार्य, डाइट, कोटा
लालाराम सेन, वरि. व्या., डाइट, जालोर
सुशीला मेनारिया, व्या., डाइट, उदयपुर
संजय बोल्या, व.अ.,रा.उ.मा.वि. छाली, गोगुन्दा, उदयपुर
कमलकान्त स्वामी, व.अ.,रा.उ.मा.वि. सर्वोदय बस्ती, बीकानेर
कौशल डी. पण्ड्या, कार्यक्रम अधिकारी, रमसा, बाँसवाड़ा
जनक जोशी, ब्लॉक संदर्भ्य व्यक्ति, एस.एस.ए.,घाटोल, बाँसवाड़ा
महेन्द्र सोनी, व.अ.,रा.मा.वि. बुद्धनगर, जोधपुर
कमल अरोड़ा, व.अ.,रा.मा.वि. झाड़ोली, गोगुन्दा, उदयपुर
यशवन्त दवे, व.अ.,रा.उ.मा.वि. बम्बोरा, उदयपुर
रियाज अहमद, व.अ.रा.उ.मा.वि. बाड़ी, धोलपुर
सीमा महता, व.अ.रा.उ.मा.वि. रावलिया खुर्द, गोगुन्दा, उदयपुर
शहनाज, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. गाडरियावास, भीण्डर
बृजराज चौधरी, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. भटवाड़ा, खैराबाद, कोटा
कपिल पुरोहित, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. सिवड़िया, गोगुन्दा, उदयपुर
दुर्गेश कुमार जोशी, अध्या., रा.उ.प्रा.वि. उदलियास (माफी), भीलवाडा
इन्दर मोहन सिंह छाबड़ा, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. मेवाड़ों का मठ, कोटड़ा
अरविन्द शर्मा, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. साकरिया, प्रतापगढ़
कल्याण सिंह पंवार, अध्या. रा.उ.प्रा.वि. भीमाखेड़ा, रेलमगरा, राजसमंद

आवरण एवं सज्जा: डॉ. जगदीश कुमावत, प्राध्यापक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

चित्रांकन: शाहिद मोहम्मद, अजमेर

तकनीकी सहयोग: हेमन्त आमेटा, व्याख्याता, एस.आई.ई.आर.टी. उदयपुर

कम्प्यूटर ग्राफिक्स: अनुभव ग्राफिक, अजमेर

शिक्षकों के लिए

वर्तमान वैश्विक परिदृश्य में बदलते परिवेश के साथ गणित शिक्षण का सामन्जस्य बिठाने एवं राज्य के विद्यार्थियों को अधिगम के उन स्तरों तक दक्षता प्रदान करने के लिए नवीन पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तकों का निर्माण किया गया हैं।

बालक की शैक्षिक जगत के प्रति समझ विकसित करने के साथ–साथ बालक की अन्तर्निहित क्षमताओं को विकसित करने, उच्च मानवीय मूल्यों व नैतिक गुणों का विकास करने, राष्ट्र के लिए भविष्य में निष्ठावान, देशभक्त एवं संवेदनशील नागरिक तैयार करने के उद्देश्य से इस पाठ्यक्रम का सृजन किया गया हैं।
राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रुपरेखा–2005 के मुख्य मार्ग–दर्शक सिद्धान्तों को शिक्षक आत्मसात कर उनकी मूल भावना के अनुरुप पाठ्यपुस्तक की विषयवस्तु को बालकों तक पहुँचाए, शिक्षक से यह अपेक्षा की गई है।

इस पाठ्यपुस्तक की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित है– विद्यार्थियों को विषय से परिचय उनके आसपास से संबंधित उदाहरणों से कराया गया हैं। इसमें यह भी ध्यान रखा गया है कि अधिगम हेतु आवश्यक सामग्री कम लागत या आसपास के परिवेश से उपलब्ध हो सके ताकि कक्षा शिक्षण में अध्यापक उन सामग्रियों का उपयोग कर, गतिविधि के माध्यम से बालकों की सहभागिता के साथ अधिगम को प्रभावी बना सके।

बालक को केंद्र बिन्दु मानकर सीखने की प्रक्रिया में बालक का भागीदारी सुनिश्चित कर उन्हें स्वयं करके देखने अपनी गलतियों को स्वयं ठीक करने के लिए समुचित अवसर उपलब्धा करवाने एवं उनमें समझ विकसित करने के लिए कार्य किया जाए।

निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम–2009 के प्रावधानानुसार सतत् एंव व्यापक मूल्यांकन के अनुसार विषयवस्तु निर्मित की गई है। अतः बालकों को स्तरानुसार समूह में बाँटकर समूह शिक्षण पर बल देकर बालकों में दक्षताएँ विकसित की जाए।

पाठ्यपुस्तक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है तथा अधिक संख्या में चित्रों के माध्यम से समझाया गया है। उदाहरण और अभ्यास सम्मिलित किए गए हैं, ताकि विद्यार्थियों में अवधारणाओं को अपने स्तर पर समझ कर प्रश्नों को बेहतर ढ़ंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि हो सके तथा समस्याओं को हल करने में उनकी भागीदारी बढ़ सके।

बालकों में गणितीय सोच विकसित करने, गणितीय तथ्यों की पुनः खोज करने, आरेखण एवं मापन के लिए उपयुक्त दक्षता के विकास हेतु अनेक गतिविधियाँ दी गई हैं जिन्हें '**करो और सीखो**' का नाम दिया गया है। बालकों को यह गतिविधियाँ इसी भावना जिम्मेदारी, सहिष्णुता एंव सहयोग के अनुरुप करवाया जाना अपेक्षित है।

पाठ्यपुस्तक में राष्ट्रीय सरोकार यथा पर्यावरण संरक्षण, सड़क सुरक्षा, जेण्डर संवेदनशीलता, बेटी बचाओ बेटी पढ़ाओ, सामाजिक अवरोधों की समाप्ति की आवश्यकता एवं जागरूकता आदि का ध्यान में रखा गया है। अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए। उन्हें विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उक्त प्रमुख संदेशों को गणितीय समस्याओं की शब्दावली के माध्यम से पहुँचाने चाहिए। बालकों को इन राष्ट्रीय सरोकारों के साथ जोड़ने एवं इनके प्रति उनमें समझ बनाने का प्रयास किया जाना अपेक्षित है।

अध्यापक अपनी सुविधानुसार कक्षा के बालकों को छोटे – छोटे समूह एवं उपसमूह बनाकर उन्हें गतिविधि करने का मौका दें ताकि स्व–अध्ययन कि प्रवृत्ति को बढ़ाकर एक सहयोगी के रूप में अपनी जिम्मेदारी तय कर सके। पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली एवं पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अंत में महत्त्वपूर्ण संकल्पनाओं एवं परिणामों को "**हमने सीखा**" के रूप में स्थान दिया गया है।

भारतीय गणितज्ञों का जीवन परिचय एवं उनका गणित में योगदान का भी उल्लेख किया गया है ताकि बालक भारत की समृद्ध परम्पराओं और भारतीयों द्वारा गणित में किये गए योगदान के प्रति अपनी समझ बना सकें।

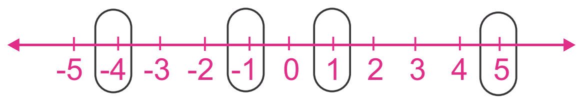
पाठ्यपुस्तक एवं पाठ्यक्रम को तैयार करने में बालक को केंद्र में मानकर शिक्षक पर सर्वाधिक विश्वास इस भावना के साथ किया गया है कि शिक्षक इन संप्रयत्नों की पूर्ति हेतु पूर्ण निष्ठा लगन एवं ईमानदारी के साथ बालक के साथ कार्य करेगा। लेखक समूह शिक्षक पर भरोसा कर यह पाठ्यपुस्तक राज्य के शिक्षकों एवं बालकों को समर्पित करता है।

भारत में गणित की समृद्ध परम्परा रही है। आदिकाल से ही भारतीय मनीषियों एवं गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में श्रेष्ठ कार्य किया है। पुरातन ज्ञान का उपयोग आधुनिक गणित में किया जा सके एवं प्राचीन उपलब्धियों का तारतम्य आधुनिक गणित को उन्नत बनाने के लिए किया जा सके, इसी उद्देश्य से पाठ्यपुस्तक में भारतीय अंक प्रणाली (देवनागरी) एवं वैदिक गणित का समावेश किया गया है। वैदिक गणित के द्वारा गणनाओं को सरल करने का प्रयास किया गया है।

अनुक्रमणिका

अध्याय 1
पूर्णांक

1.1 कक्षा VI में पूर्ण संख्याओं व पूर्णांकों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं, हम जानते हैं कि पूर्णांक में ऋणात्मक एवं पूर्ण संख्याओं का संग्रह है। इस अध्याय में हम पूर्णांकों के गुण एवं संक्रियाओं के बारे में विस्तृत अध्ययन करेंगे। नीचे संख्या रेखा पर पूर्णांकों को प्रदर्शित किया गया है।



उक्त पूर्णांकों को आरोही (बढ़ते) क्रम में लिखें।
हम यह जानते हैं कि संख्या रेखा में दाईं ओर जाने पर संख्याएँ बढ़ती है।
अतः $-4 < -1 < 1 < 5$
साथ ही कक्षा 6 में हमने यह भी पढ़ा है कि किसी संख्या रेखा पर जब हम

1. एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं तो दाईं ओर चलते हैं।
2. एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं तो बाईं ओर चलते हैं।
3. एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं तो बाईं ओर चलते हैं।
4. एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं तो दाईं ओर चलते हैं।

करो और सीखो

1. -5 को जोड़ने के लिए संख्या रेखा पर किस ओर जाएँगे ?
2. 3 में से (-5) को घटाने के लिए संख्या रेखा पर किस ओर जाएँगे तथा किस संख्या पर पहुँचेंगे ?

   $3 - (-5) =$ ....
3. 3 में 5 जोड़ने के लिए किस ओर जाएँगे एवं किस संख्या पर पहुँचेंगे ?
4. -3 में से $+5$ घटाने के लिए किस ओर चलना होगा तथा कहाँ पहुँचेंगे ?

बताइए निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है और कौन सा कथन असत्य है ?

1. जब दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। (   )
2. जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।(   )
3. जब एक धनात्मक पूर्णांक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है तब सदैव ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। (   )
4. पूर्णांक (8) का योज्य प्रतिलोम (-8) है। (   )
5. $(-7) + 3 = 7 - 3$ (   )
6. $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$ (   )

उपर्युक्त कथनों की सत्यता की जाँच निम्नानुसार करते हैं।

(1) कथन 1 सत्य है, उदाहरण के लिए

(i) 7+4 = 11 (ii) 4 + 11 = 15 (iii) 6 + 7 = 13 आदि

(2) कथन 2 असत्य है, उदाहरण के लिए

(i) (-6) + (-3) = (-9)

जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ते है तो सदैव एक ऋणात्मक पूर्णांक ही प्राप्त होता है।

(3) कथन 3 असत्य है,

उदाहरण के लिए −10 + 15 = 5 जो कि ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है।

इस हेतु सही कथन है कि एक ऋणात्मक एवं एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ने पर हम उनका अंतर लेते हैं और बड़े पूर्णांक के चिह्न को अंतर के पहले रखा जाता है। बड़े पूर्णांक का चयन करते समय पूर्णांक के चिह्न नहीं देखे जाएँगे।

उदाहरण के लिए

(1) (−50) + (70) = 20 (2) 12 + (−20) = −8

(3) 16 + (−7) = 9 (4) (−14) + (10) = − 4

(4) कथन सत्य है क्योंकि

−8 + (8) = 0 = 8 + (−8)

योज्य प्रतिलोम का योग करने पर योज्य तत्समक 0 प्राप्त होता है। आप भी इस प्रकार के उदाहरण और दीजिए।

अतः किसी पूर्णांक a का योज्य प्रतिलोम (-a) तथा (-a) का योज्य प्रतिलोम (a) है।

(5) कथन असत्य है क्योंकि

(−7) + 3 = −4

तथा 7 + (−3) = 4

(6) कथन सत्य है क्योंकि

8 + (−7) − (−4) = 5

तथा 8 + 7 − 4 = 11

अतः $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$

1.2 पूर्णांकों के जोड़ एवं घटाव के गुणधर्म

1.2.1 योग के लिए संवृत गुणधर्म

पूर्ण संख्याओं के समूह में हमने देखा है कि किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या ही होती है और हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याएँ योग के लिए संवृत होती है।

क्या पूर्णांक भी योग संक्रिया के लिए संवृत है आइए जाँच करे।

क्र.सं.	पूर्णांक 1	पूर्णांक 2	योगफल	योगफल पूर्णांक है/नहीं
1.	+2	+5	+7	है
2.	−3	+7		
3.	−4	+4		
4.	3	−5		

भिन्न–भिन्न पूर्णांकों को लेकर जाँच कीजिए क्या यह केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए सत्य है या ऋणात्मक के लिए भी सत्य है। सारणी से हम यह पाते हैं कि **सभी पूर्णांक चाहे वह ऋणात्मक हो अथवा धनात्मक, योग हेतु संवृत है।** क्या आप ऐसे दो पूर्णांक बता सकते हैं जिनका योग पूर्णांक न हो ? पूर्णांक a तथा b के लिए (a + b) भी सदैव पूर्णांक होगा।

1.2.2 घटाव के अंतर्गत संवृत गुणधर्म

जब हम एक पूर्णांक में से दूसरे पूर्णांक को घटाते हैं तो क्या होता है ? क्या उनका अंतर भी पूर्णांक ही प्राप्त होता है। निम्नलिखित सारणी को देखकर उसे पूरा कीजिए।

कथन	प्रेक्षण
1. 7 – 5 = 2	परिणाम एक पूर्णांक है।
2. 4 – 9 = –5	....
3. (–4) – (–5) = ...	परिणाम एक पूर्णांक है।
4. (–18) – (–18) = ...	....
5. 17 – 0 = ...	....

आप क्या देखते हैं ? क्या हम ऐसा कोई पूर्णांक युग्म ज्ञात कर सकते हैं जिसका अंतर पूर्णांक नहीं हो ? क्या हम यह कह सकते हैं कि पूर्णांक घटाव के अंतर्गत संवृत है ? हाँ, हम यह कह सकते हैं कि **पूर्णांक घटाव के अंतर्गत संवृत है।**

अतः पूर्णांक a तथा b के लिए (a - b) भी सदैव पूर्णांक ही प्राप्त होता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य बात है कि पूर्ण संख्याएँ घटाव के लिए संवृत नहीं होती है।

1.2.3 क्रम विनिमेय गुणधर्म

हम जानते हैं कि 2 + 4 = 4 + 2 = 6 अर्थात् पूर्ण संख्याओं के योग में क्रम बदलने से परिणाम में कोई परिवर्तन नहीं आता है अतः क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन होता है।

क्या इसी प्रकार पूर्णांक में भी क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन होता है ?

आइए जाँच करें।

क्या निम्नलिखित समान है

(–8) + (–4) व (–4) + (–8)

(–2) + 5 व 5 + (–2)

12 + 0 व 0 + 12

आप भी अन्य इसी प्रकार के योग अलग–अलग पूर्णांकों के साथ करें तथा देखें कि क्या ऐसा कोई युग्म है जिसमें क्रम बदलने से परिणाम में कोई परिवर्तन आता है।

हमने यह देखा कि क्रम बदलने से योग में कोई परिवर्तन नहीं आता है अर्थात् **पूर्णांक योग संक्रिया के लिए क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन करते हैं।**

व्यापक रुप में, दो पूर्णांकों a तथा b के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + b = b + a$$

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए घटाव की संक्रिया में क्रम विनिमेय गुणधर्म लागू नहीं होता है। पूर्णांकों के लिए घटाव की संक्रिया में क्रम विनिमेयता लागू होती है अथवा नहीं ? कोई दो पूर्णांक (–6) और (+4) लीजिए।

क्या (–6) – (+4) एवं (+4) – (–6) समान है ?

नहीं क्योंकि

$-6 - (+4) = -10$ एवं $+4 + 6 = +10$

एवं –10, +10 बराबर नहीं होता है।

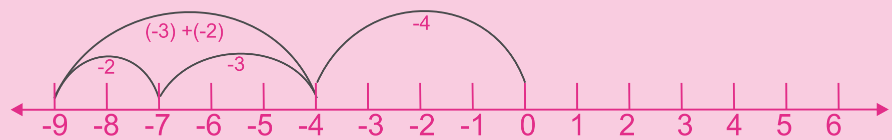
अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि **घटाव पूर्णांकों के लिए क्रम विनिमेय नहीं है।**

1.2.4 साहचर्य गुणधर्म

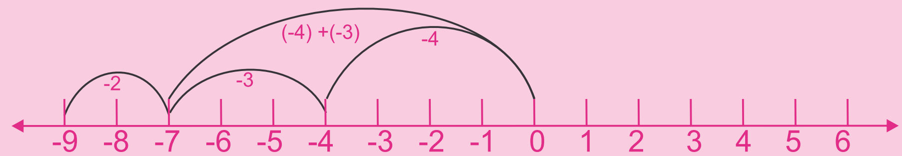
पूर्णांकों –4, –3 व –2 के लिए साहचर्य गुणधर्म की जाँच

-4 + [(-3) +(-2)] और [(-4) + (-3)] +(-2) की गणना कीजिए।

-4 + [(-3) +(-2)] का अर्थ है पहले -3 व (-2) का योग कर परिणाम को (-4) के साथ जोड़ना।



[(-4) + (-3)] +(-2) का अर्थ है पहले (–4) व –3 का योग कर परिणाम में –2 को जोड़ना।



दोनों ही परिस्थितियों में परिणाम (–9) ही प्राप्त होता है। इस प्रकार के 3 उदाहरण और दीजिए। आप ऐसा कोई उदाहरण नहीं पाएँगे जिसके लिए यह योगफल अलग–अलग प्राप्त हो। यह दर्शाता है कि **पूर्णांकों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है।** अर्थात्

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.2.5 योज्य तत्समक

निम्नलिखित को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

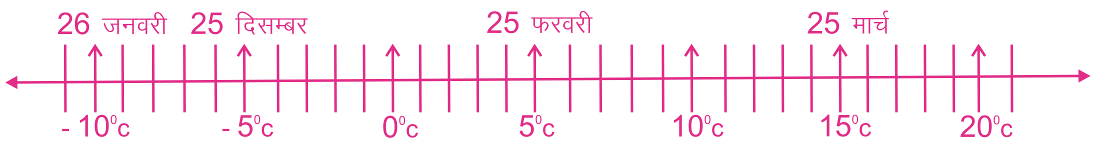
(i) (-4) + 0 = -4 (ii) 7 + 0 = 7 (iii) 0 + (-14) = -----------

(iv) - 8 + --------- = -8 (v) ----------- + 0 = 15 (vi) -23 + ---------- = -23

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि किसी भी पूर्णांक में 0 जोड़ने से योगफल वही पूर्णांक प्राप्त होता है **अतः '0' पूर्णांकों के लिए योज्य तत्समक है।** आप कुछ और उदाहरण लेकर उक्त तथ्य की पुष्टि कीजिए।

प्रश्नावली 1.1

1. चुरु का तापमान अलग–अलग समय में अंकित कर डिग्री सेन्टिग्रेड (C^0) में संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया गया है।



(i) संख्या रेखा को देखकर निम्न दिनांकों पर चुरु का तापमान बताइए।

(a) 26 जनवरी .... (b) 25 दिसम्बर ....

(c) 25 फरवरी .... (d) 25 मार्च ....

(ii) सबसे गर्म व सबसे ठण्डे दिन के तापमान में कितना अंतर है ?

(iii) 26 जनवरी का तापमान, 25 फरवरी के तापमान से कितना कम है ?

(iv) क्या हम कह सकते हैं 25 दिसम्बर और 25 फरवरी के तापमान का योग 26 जनवरी के तापमान से अधिक है ?

2. शीला डाकघर में 5000 रुपये जमा करती है। एक महीने बाद 3700 रुपये निकाल लेती है। यदि निकाली हुई रकम ऋणात्मक संख्या के रुप में लिखी जाए तो जमा की गई राशि किस रुप में निरुपित करेंगे ? निकासी के पश्चात कितनी राशि खाते में शेष रहेगी ?

3. हल कीजिए– (i) (-4) + (-3) (ii) 15 - 8 + (-9)
(iii) 400 + (-1000) + (-500) (iv) 23 - 41 - 11
(v) -27 + (-3) + 30

4. निम्न कथनों में बॉक्स में उपयुक्त चिन्ह (<, >, =) लगाइए।

(i) -14 + 11 + 5 ☐ 14 - 11 - 5

(ii) 30 + (-5) + (-8) ☐ (-5) + (-8) + 30

(iii) 7 + 11 + (-5) ☐ (-7) - 11 + 5

(iv) (-14) + 11 + (-12) ☐ 14 + 11 + 12

(v) 6 + 7 - 13 ☐ 6 + 7 + (-13)

5. ऐसे दो पूर्णांक लिखिए जिनका

(i) योग (-7) हो। (ii) अंतर 4 हो। (iii) योग 0 हो । (iv) अंतर - 2 हो।

6. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) (-3) + 5 = 5 + --------------

(ii) 17 + ------------- = 17

(iii) ----------- + (-5) = 0

(iv) -11 + [(-12) + 4) = [(-11) + (-12)] + ...

7. नीचे पूर्णांकों के कुछ गुणधर्म एवं उनके उदाहरण दिए जा रहे हैं। उदाहरणों को सही गुणधर्म से मिलान कीजिए।

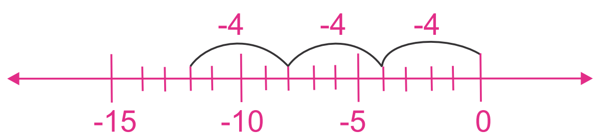
उदाहरण	गुणधर्म
(i) (a + b) + c = a + (b + c)	(a) तत्समक
(ii) 3 + 4 = 4 +3	(b) साहचर्य
(iii) (-4) + 0 = (-4)	(c) क्रम विनिमेय

1.3 पूर्णांकों का गुणन

1.3.1 धनात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से गुणन

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$$



इसी प्रकार $5 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$

करो और सीखो

हल कीजिए।

(i) 4 x (-8) = ... = ...   (ii) 3 x (-3) = ... = ...

(iii) 5 x (-9) = ... = ...

इस विधि का उपयोग करते हुए हमने पाया कि धनात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। परन्तु क्या होता है जब ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से गुणा करते हैं ?

निम्न पैटर्न को देखिए।

$3 \times 4 = 12$

$2 \times 4 = 8 = 12 - 4$

$1 \times 4 = 4 = 8 - 4$

$0 \times 4 = 0 = 4 - 4$

$-1 \times 4 = -4 = 0 - 4$

$-2 \times 4 = -8 = -4 - 4$

$-3 \times 4 = -12 = -8 - 4$

हम पहले ही प्राप्त कर चुके हैं कि $3 \times (-4) = -12$

अतः हम जानते हैं कि $(-3) \times 4 = -12 = 3 \times (-4)$

इसी प्रकार हम $(-5) \times 3 = -15 = 3 \times (-5)$ भी प्राप्त कर सकते हैं।

करो और सीखो

(1) ज्ञात कीजिए –

(i) 15 x (-5) (ii) 27 x (-10)
(iii) -12 x 12 (iv) -7 x 4

1.3.2 दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणन

निम्नलिखित को देखिए

-3 x 4 = -12
-3 x 3 = -9 = -12 – (-3)
-3 x 2 = -6 = -9 – (-3)
-3 x 1 = -3 = -6 – (-3)
-3 x 0 = 0 = -3 – (-3)
-3 x -1 = 3 = 0 – (-3)
-3 x -2 = 6 = 3 – (-3)

इसी प्रकार निम्न को पूरा कीजिए

(i) -3 x -3 = ... (ii) -3 x -4 = ...

इसी प्रकार आप इन गुणनफल को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

-5 x 3 = -15
-5 x 2 = -10 = -15 - (-5)
-5 x 1 = -5 = -10 - (-5)
-5 x 0 = 0 = ...
-5 x -1 = ... =
-5 x -2 = ... =
-5 x -3 = ... =

उक्त पैटर्न को देखकर हम यह कह सकते हैं कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को पूर्ण संख्याओं के रुप में गुणा करते हैं तथा गुणनफल के पूर्व में (+) का चिन्ह लगाते हैं।

उदाहरणतः (-10) x (-14) = 140, (-5) x (-6) = 30

व्यापक रुप में दो धनात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए

(-a) x (-b) = a x b

करो और सीखो

निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) (-12) x (-15) (ii) (-25) x (-4) (iii) (-17) x (-11)

1.3.3 तीन अथवा अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल

हमने देखा कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है। तीन या तीन से अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा ? आइए निम्न उदाहरणों को देखते हैं।

(i) $(-2) \times (-3) = 6$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = (6) \times (-4) = -24$

(iii) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-3)] \times [(-4) \times (-5)] = 6 \times 20 = 120$

(iv) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) = [(-2) \times (-3)] \times [(-4) \times (-5)] \times (-6)$

$= 6 \times 20 \times (-6)$

$= 120 \times (-6)$

$= -720$

उक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि

(i) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

(ii) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

(iii) चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(iv) पाँच ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या है ?

(v) इसी क्रम में छः ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा ?

उक्त उदाहरणों के परिणाम से हम इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि यदि ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम (2,4,6,....) हो तब उनका गुणनफल धनात्मक पूर्णांक एवं ऋणात्मक पूर्णांक की संख्या विषम (1,3,5,7,................) होने की स्थिति में परिणाम ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

करो और सीखो

हल कीजिए।

(i) $(-1) \times (-1) \times (-1) =$ .... (ii) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ....

1.3.4 शून्य से गुणन

नीचे दिए गए पैटर्न को देखिए एवं रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$-4 \times 3 = -12$, $-4 \times 2 = -8 = -12 - (-4)$

$-4 \times 1 = -4 = -8 - (-4)$, $-4 \times 0 = 0 = -4 - (-4)$

हम पाते हैं कि $-4 \times 0 = 0$ इसी प्रकार आप भी अन्य संख्याओं के साथ पैटर्न बनाएँ एवं जाँच करें

पुनः $3 \times (-5) = -15$

$2 \times (-5) = -10 = -15 - (-5)$

$1 \times (-5) = -5 = -10 - (-5)$

$0 \times (-5) = 0 = -5 - (-5)$

उक्त पैटर्न से हम यह कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक को शून्य से गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है।

व्यापक रुप में हम कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक a के लिए

$$\boxed{a \times 0 = 0 = 0 \times a}$$

1.4 पूर्णांकों का विभाजन

हम जानते हैं कि विभाजन गुणन की विपरीत प्रक्रिया है। उदाहरण के लिए $4 \times 5 = 20$, $20 \div 4 = 5$ या $20 \div 5 = 4$ । इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि पूर्णांकों के प्रत्येक गुणन कथन के लिए एक विभाजन कथन है।

गुणन कथन	संगत भाग कथन
3 x (-5) = (-15)	(-15) ÷ (3) = -5 , (-15) ÷ (-5) = 3
(-3) x 4 = (-12)	(-12) ÷ (-3) = 4 , (-12) ÷ 4 = -3
(-2) x (-7) = 14 ...	14 ÷ (-7) = -2 ,...............
(-4) x 5 = (-20)	(-20) ÷ (-4) = 5 ,...............
5 x (-9) = -45 ...... ,	.... ,...............
(-6) x 5 = ,...............	.... ,...............
(+5) x (+2) = ,...............	.... ,...............

सारणी के भाजन के कथनों को देखिए तथा इस आधार पर निम्न कथनों की जाँच कीजिए [✓ अथवा x] चिह्न लगाइए।

(1) ऋणात्मक पूर्णांक ÷ धनात्मक पूर्णांक = ऋणात्मक पूर्णांक ( )

(2) धनात्मक पूर्णांक ÷ ऋणात्मक पूर्णांक = ऋणात्मक पूर्णांक ( )

(3) धनात्मक पूर्णांक ÷ धनात्मक पूर्णांक = धनात्मक पूर्णांक ( )

(4) ऋणात्मक पूर्णांक ÷ ऋणात्मक पूर्णांक = धनात्मक पूर्णांक ( )

पूर्णांकों का भाग भी पूर्ण संख्याओं के भाग की तरह ही करते हैं। केवल हमें यह ध्यान रखना होता है कि परिणाम धनात्मक होगा अथवा ऋणात्मक।

व्यापक रुप में, $a \div (-b) = (-a) \div (b)$ (जहाँ b, -b शून्य नहीं हो)

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

   (i) (-3) x 4 (ii) (-1) x 24

   (iii) (-30) x (-24) (iv) (-214) x 0

   (v) (-15) x (-7) x 6 (vi) (-5) x (-7) x (-4)

   (vii) (-3) x (-2) x (-1) x (-5)

2. (-1) x 5 से आरम्भ कर पैटर्न द्वारा दर्शाइए कि (-1) x (-1) = +1

3. किसी प्रशीतक में तापमान कम होने की दर 3^0c प्रति मिनट है। एक वस्तु जिसका तापमान 25^0c है को प्रशीतक में रखा जाता है। कितने मिनट बाद उस वस्तु का तापमान -2^0c होगा।

4. एक खेल में नीला कार्ड चुनने पर 2 गोटियाँ देनी पड़ती है तथा लाल कार्ड चुनने पर 3 गोटियाँ मिलती है। शीतल के पास 27 गोटियाँ थी, खेल के दौरान लगातार 9 नीले कार्ड आते हैं। बताइए उसके पास कितनी गोटियाँ है ?

5. निम्न भाग के सवालों को हल कीजिए।

(i) (-35) ÷ 7
(ii) 15 ÷ (-3)
(iii) -25 ÷ (-25)
(iv) 25 ÷ (-1)
(v) 0 ÷ (-3)
(vi) 15 ÷ [(-2) +1]
(vii) [(-6) + 3] ÷ [(-2) + 1]

6. एक दुकानदार को 1 पेन बेचने पर 1 रुपये का लाभ तथा 1 पेंसिल बेचने पर 50 पैसे की हानि होती है। लाभ, हानि को पूर्णांकों के रुप में प्रदर्शित कीजिए।

(i) एक माह में उसे 5 रुपये की हानि होती है। यदि उसने 45 पेन बेचे तो उस माह उसके द्वारा बेची जाने वाली पेंसिलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(ii) दूसरे माह उसे कोई नुकसान या लाभ नहीं हुआ। यदि उसने 70 पेन बेचे हो तो बेची गई पेंसिलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. पूर्णांकों का गुणा कर निम्न सारणी को भरिए।

x	2	3	- 4	- 2	1
3					
-2					
-1					
4					
2					

8. एक 60 फीट ऊँची बहुमंजिला इमारत में लिफ्ट में ऊपर जाने को धनात्मक पूर्णांक से दर्शाया जाए तो–

(i) 60 फीट ऊपर स्थित फ्लैट की ऊँचाई कैसे दर्शाएँगे ?
(ii) 15 फीट नीचे स्थित पार्किंग को पूर्णांक से दर्शाइए।
(iii) लिफ्ट 5 फीट प्रति सैकण्ड से ऊपर की ओर जाती है तो + 5 और विपरीत आती है तो उसके उतरने को किस पूर्णांक से दर्शाएँगे।

1.4 पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म

1.4.1 गुणन में संवृतता

पूर्णांक – 1	पूर्णांक –2	गुणनफल	गुणनफल पूर्णांक हैं / नहीं
2	-3	-6	पूर्णांक है।
-3	4	-12	पूर्णांक है।
-2	-3	......	....
5	4	......	....
-5	3	......	....

आप क्या देखते हैं ? क्या आप ऐसे कोई दो पूर्णांक ज्ञात कर सकते हैं जिनका गुणनफल एक पूर्णांक नहीं हो ?

नहीं। अतः हम यह कह सकते हैं कि दो पूर्णांकों का गुणनफल भी एक पूर्णांक ही प्राप्त होता है। अर्थात् **पूर्णांक गुणन संक्रिया के लिए संवृत गुणधर्म का पालन करते हैं।**

1.4.2 क्रम विनिमेयता

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं में गुणन क्रम विनिमेय होता है। क्या पूर्णांक के लिए भी गुणन क्रम विनिमेय है ?

नीचे दी गई सारणी को देखिए ओर इसे पूरा कीजिए।

पूर्णांक युग्म	गुणन	गुणन क्रम बदलकर	निष्कर्ष
5, -4	5 x (-4) = -20	-4 x 5 = -20	5 x -4 = -4 x 5
-10, 12	(-10) x 12 = ...	12 x (-10) = ...	
-3, -4	(-3) x (-4) =		
-5, -7		(-7) x (-5) =	
+8, -3	(+8) x (-3)		

आप क्या देखते हैं ? आप पाएँगे पूर्णांकों का गुणनफल उनके क्रम पर निर्भर नहीं करता है, अतः **पूर्णांकों के गुणन क्रम विनिमेय है।** व्यापक रुप में किन्हीं दो पूर्णांकों के लिए

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

1.4.3 गुणात्मक तत्समक

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक 1 है। पूर्णांकों के लिए जाँच कीजिए।

(-3) x 1 = -3	1 x 5 = 5
(-4) x 1 =	1 x 8 =
1 x (-5) =	3 x 1 =
1 x (-6) =	7 x 1 =

यह दर्शाता है कि 1 पूर्णांकों के लिए भी गुणात्मक तत्समक है।
व्यापक रुप में किसी भी पूर्णांक के लिए

$$\boxed{a \times 1 = a = 1 \times a}$$

यदि किसी पूर्णांक में -1 से गुणा किया जाए तो क्या होगा ? -3 x (-1) = 3
3 x -1 = -3
-6 x -1 = 6
-1 x 13 = -13
क्या -1 पूर्णांकों के लिए गुणात्मक तत्समक है ?

1.4.4 गुणन का साहचर्य गुणधर्म

3, -4, -2 को लीजिए।

[3 x (-4)] x (-2)
पहले 3 एवं -4 का गुणन करेंगे। तत्पश्चात प्राप्त गुणनफल को (-2) से गुणा करेंगे।
= (-12) x (-2) = 24

(3) x [(-4) x (-2)] पर विचार कीजिए।
सर्वप्रथम (-4) व (-2) का गुणा करेंगे।
तत्पश्चात गुणनफल को 3 से गुणा करेंगे।
= 3 x (+8) = 24

अतः [3 x (-4)] x (-2) = 3 x [(-4) x (-2)]

आप ऐसे ही तीन अन्य पूर्णांकों के समूह लीजिए व उपर्युक्त गतिविधि दोहराइए। क्या पूर्णांकों के विभिन्न प्रकार के समूहों से गुणनफल प्रभावित होता है ? व्यापक रुप में किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए

$$\boxed{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

1.4.5 वितरण गुण

पूर्ण संख्याओं के लिए वितरण का गुणधर्म हमने देखा

$$a(b + c) = a \times b + a \times c$$

क्या यह पूर्णांकों के लिए भी सत्य है आइए जाँच करें।

(i) (-7) x [2 + (-5)] = (-7) x (-3) = +21	(-7) x 2 + (-7) x (-5) -14+35 = +21
(ii) (-4) x [(-3) + (-7)] = (-4)x(-10) = 40	(-4) x (-3) + (-4)x(-7) 12 + 28 = 40
(iii) (-8) x [(-2) + (-1)] = (-8) x (-3) = 24	(-8) x (-2) + (-8)x(-1) = +16 +8 = 24

क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी योग पर गुणन का वितरण नियम सत्य है ? हाँ।

व्यापक रुप में $\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$

1.4.6 पूर्णांक के भाग के गुण

निम्न सारणी को देखकर इसे पूरा कीजिए।

कथन	निष्कर्ष	कथन	निष्कर्ष
(-8) ÷ (-2) = 4	परिणाम एक पूर्णांक है	(-8) ÷ 4	----------
(-2) ÷ (-8) = $\frac{-2}{-8}$	परिणाम एक पूर्णांक नहीं है	(3) ÷ (-8) = $\frac{3}{-8}$	----------

आप क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि **पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं है** अर्थात् दो पूर्णांकों का भाग भी एक पूर्णांक हो ऐसा आवश्यक नहीं है।

क्रम विनिमेयता – हम यह जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं है। आइए, पूर्णांक के लिए इसकी जाँच करें आप ऊपर दी गई सारणी में देख सकते हैं कि

$$(-8) \div (-2) \neq (-2) \div (-8)$$

क्या [(-6) ÷ 2] एवं [2 ÷ (-6)] एक समान है?

अतः हम यह कह सकते हैं कि **पूर्णांकों के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं है।**

प्रश्नावली 1.3

1. नीचे पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म दिए हैं तथा सामने उदाहरण दिया गया है। सही उदाहरण को सही गुणधर्म से मिलाइए।

(i) (-4) x (5) = 5 x (-4)	(a) साहचर्य गुणधर्म
(ii) (-4) x [(-3) +(-2)] = (-4) x (-3) + (-4) x (-2)	(b) क्रम विनिमेय
(iii) -4 एक पूर्णांक,+7 दूसरा पूर्णांक, गुणनफल (-4) x (+7) = (-28) भी पूर्णांक	(c) वितरण गुण
(iv) (-4) x [(-7) x (5)] = [(-4) x (-7)] x (5)	(d) संवृत गुण

2. पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म को ध्यान में रख कर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) 26 x (-48) = (-48) x	क्रमविनिमेय
(ii) (-6) x [(-2) + (-1)] = (-6) x (-2) + (-6) x	वितरण गुण
(iii) 100 x [(-4) x (-52)] = [100 x ....] x (-52)	साहचर्य

3. उचित गुणधर्मों का प्रयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 26 x (-48) + (-48) x (-56) (ii) 8 x (78) x (-125)
   (iii) 9 x (50-2) (iv) 999 x 45
4. सही/गलत बताइए। गलत कथनों को सही करके लिखिए।
   (i) पूर्णांकों का गुणन संवृत है।
   (ii) पूर्णांकों में भाग संवृत होता है।
   (iii) पूर्णांकों में भाग क्रम विनिमेय नहीं होता जबकि गुणन में क्रम विनिमेयता होती है।
   (iv) पूर्णांकों का गुणा योग पर वितरित होता है।
   (v) पूर्णांकों का भाग घटाव पर वितरित होता है।

हमने सीखा

1. पूर्णांक, संख्याओं का एक विशाल संग्रह है जिसमें पूर्ण संख्याएँ और उनके ऋणात्मक सम्मिलित हैं।
2. दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ने पर धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है तथा दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
3. हमने योग एवं घटाव द्वारा संतुष्ट होने वाले गुणों का अध्ययन किया है।
   (i) पूर्णांक संख्याएँ योग एवं घटाव दोनों के लिए संवृत हैं। अर्थात् a + b और a - b दोनों पुनः पूर्णांक होते हैं, जहाँ a और b कोई भी पूर्णांक है।
   (ii) पूर्णांकों के लिये योग क्रमविनिमेय है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए
   a + b = b + a
   (iii) पूर्णांकों के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a, b तथा c के लिए
   (a + b) + c = a + (b + c) होता है।
   (iv) योग के अंतर्गत पूर्णांक शून्य तत्समक है, किसी विपरीत चिन्ह के पूर्णांकों के योग में पूर्णांकों के परिमाणों का घटाव होता है। परिणाम धनात्मक होगा यदि धनात्मक पूर्णांक का परिमाण ज्यादा होगा और ऋणात्मक होगा यदि ऋणात्मक पूर्णांक का परिमाण अधिक होगा।
4. हमने यह भी सीखा कि पूर्णांकों का गुणा कैसे होता है। हमने पाया कि एक धनात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है तथा ऋणात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर गुणनफल के रूप में धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
5. पूर्णांक गुणन के अन्तर्गत कुछ गुण दर्शाते है –
   (i) पूर्णांक गुणन के अन्तर्गत संवृत होते हैं। यदि a तथा b पूर्णांक हैं तो a x b भी पूर्णांक होंगे।
   (ii) पूर्णांकों के लिए गुणन क्रम विनिमेय होता है। यदि a तथा b पूर्णांक है तो a x b = b x a
   (iii) गुणन के अन्तर्गत पूर्णांक 1, तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक के लिए a x 1 = 1 x a
   (iv) पूर्णांकों के लिए गुणन साहचर्य होता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों के लिए
   (a x b) x c = a x (b x c)
6. योग एवं गुणन के लिए पूर्णांक वितरण गुण दर्शाते हैं। अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए
   a x (b + c) = a x b + a x c
7. योग एवं गुणन के अन्तर्गत क्रम विनिमेयता, सहचारिता एवं वितरण गुण हमारे परिकलन को आसान बनाते हैं।
8. हमने यह भी सीखा कि पूर्णांकों का भाग कैसे होता है। हमने पाया कि (a) धनात्मक पूर्णांकों को ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाए या ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाए तो भागफल ऋणात्मक होगा। (b) एक ऋणात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देने पर भागफल धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
9. किसी भी पूर्णांक a के लिए, हम पाते हैं कि (i) a ÷ o परिभाषित नहीं है।
   (ii) a ÷ 1 = a है।

अध्याय 2

भिन्न एवं दशमलव संख्याएँ

2.1 आपने पिछली कक्षाओं में भिन्न और दशमलव संख्याओं के बारे में अध्ययन किया है। आप निम्न में से उचित और अनुचित भिन्न को वर्गीकृत कीजिए।

$\frac{5}{3}, \frac{6}{11}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{7}, \frac{11}{12}, \frac{25}{2}$

प्राप्त अनुचित भिन्नों को मिश्र भिन्नों में बदलिए।

पिछली कक्षा में आपने तुल्य भिन्न लिखना और भिन्नों को जोड़ना एवं घटाना सीख लिया है, आइए इनका दोहरान करते हैं।

उदाहरण 1 भिन्न $\frac{2}{5}$ की तीन तुल्य भिन्न लिखिए।

हल $\frac{2}{5}$ की तुल्य भिन्न $= \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$ और $\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$

व $\frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$ उत्तर $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20}$

उदाहरण 2 रमेश ने रोटी का $\frac{4}{5}$ भाग और सुरेश ने रोटी का $\frac{5}{7}$ भाग खाया। बताओ किसने अधिक रोटी खायी?

हल $\frac{4}{5}$ व $\frac{5}{7}$ में कौनसा भाग बड़ा है इसे हम तुल्य भिन्न द्वारा पता लगाते हैं।

$\frac{4}{5}$ की तुल्य भिन्न $= \frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35}$

$\frac{5}{7}$ की तुल्य भिन्न $= \frac{5 \times 5}{7 \times 5} = \frac{25}{35}$

{ हर 5 व 7 का ल.स.प.
$= 5 \times 7 = 35$
अर्थात् तुल्य भिन्नों का हर 35 होना चाहिए।

स्पष्ट है कि $\frac{28}{35} > \frac{25}{35}$

सरलतम रूप में

$\frac{4}{5} > \frac{5}{7}$ अर्थात् रमेश का भाग सुरेश के भाग से अधिक था।

करो और सीखो

1. $\frac{4}{7}$ की पाँच तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए।

2. तुलना कीजिए और (< , > , =) का प्रयोग कीजिए।

(i) $\frac{3}{4} \square \frac{3}{7}$ (ii) $\frac{2}{5} \square \frac{3}{8}$ (iii) $\frac{5}{9} \square \frac{15}{27}$

पिछली कक्षा में आपने भिन्नों का योग एवं व्यवकलन सीखा था। आइए दोहराते हैं।

उदाहरण 3 रमन का घर स्कूल से $\frac{4}{5}$ किमी दूर है और उसकी मौसी का घर स्कूल से $\frac{2}{3}$ किमी की दूरी पर है ? रमन आज स्कूल के बाद मौसी के घर जाना चाहता है? तो वह घर से स्कूल तथा वहाँ से मौसी के घर जाने में कुल कितनी दूरी तय करेगा।

हल रमन के घर की स्कूल से दूरी = $\frac{4}{5}$ किमी

मौसी के घर की स्कूल से दूरी = $\frac{2}{3}$ किमी

कुल तय दूरी $= \frac{4}{5} + \frac{2}{3}$

$= \frac{(4 \times 3) + (2 \times 5)}{15}$

हर 5 व 3 का ल.स.प. = 15

$= \frac{12 + 10}{15}$

$= \frac{22}{15}$

$= 1\frac{7}{15}$ किमी

उदाहरण 4 दिनेश प्रतिदिन स्कूल के बाद शाम को $3\frac{3}{4}$ घंटे पढ़ता है। इस समय में वह $1\frac{7}{8}$ घंटे विज्ञान और गणित विषय पढ़ता है। शेष समय दूसरे विषयों को देता है? दूसरे विषयों के अध्ययन में लगा समय ज्ञात कीजिए?

हल दिनेश के पढ़ने का कुल समय $= 3\frac{3}{4}$ घंटे

विज्ञान और गणित को दिया समय $= 1\frac{7}{8}$ घंटे

शेष बचा समय $= 3\frac{3}{4} - 1\frac{7}{8}$

$= \frac{15}{4} - \frac{15}{8}$

$= \frac{(15 \times 2) - (15 \times 1)}{8}$

हर 4 व 8 का ल.स.प. = 8

$= \frac{30 - 15}{8}$

$= \frac{15}{8}$

$= 1\frac{7}{8}$ अर्थात् दिनेश $1\frac{7}{8}$ घण्टे दूसरे विषय पढ़ता है।

प्रश्नावली 2.1

1. नीचे दिए गए भिन्नों के पाँच – पाँच तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $\frac{100}{45}$

2. तुलना करने के लिए >, < व = चिह्न का प्रयोग कीजिए।

(i) $\frac{3}{7} \square \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{6}{8} \square \frac{12}{16}$

(iii) $\frac{11}{15} \square \frac{12}{17}$ (iv) $\frac{3}{9} \square \frac{15}{40}$

3. निम्नलिखित को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

(i) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{10}$ (ii) $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{21}$

4. हल कीजिए।

(i) $2 + \frac{3}{5}$ (ii) $4 + \frac{7}{8}$ (iii) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$

(iv) $8\frac{1}{2} - 3\frac{5}{8}$ (v) $2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$ (vi) $\frac{7}{10} + \frac{2}{5} + \frac{3}{2}$

5. एक आयताकार फोटो की लम्बाई $2\frac{3}{4}$ इंच और चौड़ाई $\frac{7}{6}$ इंच है, इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

6. शीला ने एक दुकान की पुताई करने में $3\frac{3}{5}$ घंटे का समय लिया और नीला ने ऐसी ही दुकान की पुताई $3\frac{5}{7}$ घंटे में पूरी की। दोनों में से किसने अधिक समय लिया और कितना?

7. रीना, टीना और मीना में जन्म दिन के केक का बँटवारा करते हुए $\frac{2}{5}$ भाग रीना को और $\frac{1}{3}$ भाग टीना को और शेष भाग मीना को दिया। मीना का भाग ज्ञात कीजिए।

2.2 भिन्न संख्याओं का गुणा

' आप जानते हैं कि आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई से ज्ञात किया जाता है, परन्तु यदि लम्बाई या चौड़ाई भिन्न संख्याओं में दी गई हो तो क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि इसके लिए हमें भिन्न संख्याओं का गुणा किस प्रकार किया जाता है, इसकी जानकारी होनी चाहिए?

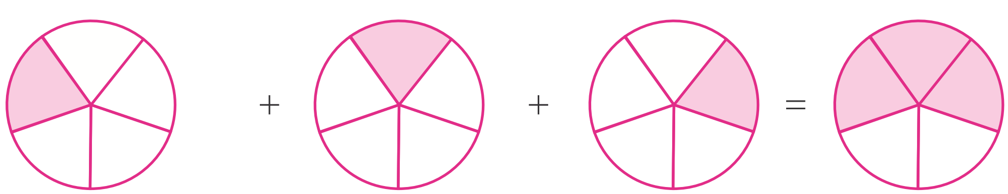
2.2.1 एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणा

यदि हमें संख्या 3 का गुणा भिन्न $\frac{1}{5}$ से करना है अर्थात् $\frac{1}{5}$ को 3 बार जोड़ना है।

$$3 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1+1+1}{5} = \frac{3 \times 1}{5} = \frac{3}{5}$$

हम जानते हैं कि गुणा का अर्थ है बार–बार जोड़ना जैसे 3 x 4 = 4 + 4 + 4 = 12

आलेखीय निरूपण में

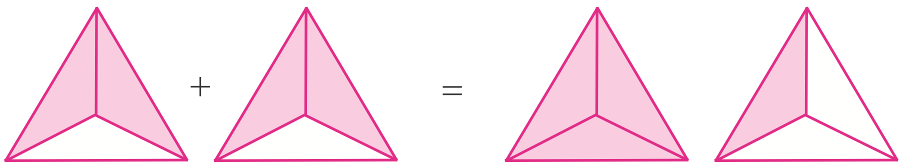


$$3 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3 \times 1}{5} = \frac{3}{5}$$

इसी प्रकार

$$2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3} \text{ या } 1\frac{1}{3}$$

आलेखीय निरूपण में



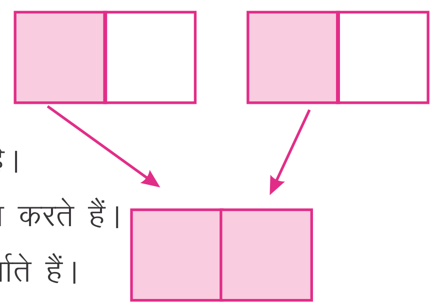
$$2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$$

इसी प्रकार

$$\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$$

इसी प्रकार अनुचित भिन्न के लिए भी

$$4 \times \frac{5}{3} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3} \text{ या } 6\frac{2}{3}$$



चित्र में दो समान आयत दिए है।

प्रत्येक छायांकित टुकड़ा आयत के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है।

इसलिए दोनों छायांकित टुकड़े मिलकर 2 के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करते हैं।

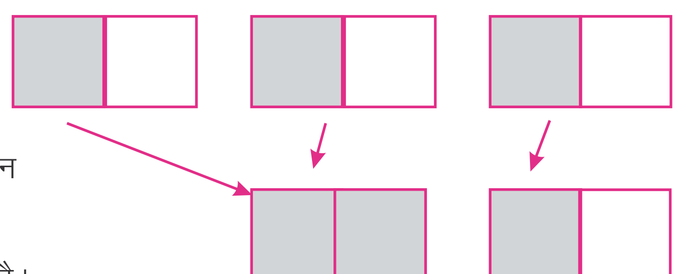
2 छायांकित $\frac{1}{2}$ भागों को संयोजित करने पर यह 1 को दर्शाते हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि 2 का $\frac{1}{2}$ भाग 1 है।

हम इसे $2 \times \frac{1}{2} = 1$ के रूप में भी प्राप्त कर सकते हैं।

अतः 2 का $\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

इसी प्रकार सामने दिए गए आयतों को देखें।



प्रत्येक छायांकित टुकड़ा

एक के $\frac{1}{2}$ भाग को दर्शाता है।

इसलिए तीन छायांकित टुकड़े मिलकर

3 के $\frac{1}{2}$ भाग को निरूपित करते है। तीन

छायांकित भागों को संयोजित करने पर

यह $1\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ को निरूपित करता है।

इसीलिए 3 का $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ है और $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि **"का"** गुणन को निरूपित करता है।

करो और सीखो ◆ हल कीजिए –

(i) $3 \times \frac{8}{7}$ (ii) $\frac{9}{7} \times 6$ (iii) $4 \times \frac{7}{5}$ (iv) $4 \times \frac{4}{9}$

यदि भिन्न मिश्रित रूप में हो तो

$$7\frac{1}{2} \times 5 = \frac{15}{2} \times 5 = \frac{15 \times 5}{2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$$

$$3 \times 2\frac{5}{6} = 3 \times \frac{17}{6} = \frac{3 \times 17}{3 \times 2} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$$

करो और सीखो ◆ हल कीजिए –

(i) $5 \times 2\frac{3}{7} = ?$ (ii) $1\frac{4}{9} \times 6 = ?$

अब बताओ 10 का $\frac{1}{2}$ कितना होगा ?

रमेश बोला 5 होगा,

क्योंकि 10 का $\frac{1}{2} = 10 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$ ही होता है।

करो और सीखो ◆ क्या आप बता सकते हैं कि

(i) 5 का $\frac{1}{2}$ (ii) 16 का $\frac{1}{4}$ (iii) 25 का $\frac{2}{5}$, का मान क्या है?

2.2.2 भिन्नों का भिन्नों से गुणा

एक दर्जी के पास 13 मीटर कपड़ा था। कपड़े सिलने के लिए उसने पहले 13 मी में 4 समान हिस्से किए, प्रत्येक हिस्सा हुआ $\frac{13}{4}$ मीटर। अब उसने एक $\frac{13}{4}$ मीटर कपड़ा लेकर उसे बीच में से दो बराबर भागों में बाँट दिया। सोचिए इन दो टुकड़ों में से एक टुकड़ा क्या निरूपित करेगा?

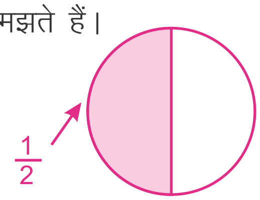
यह $\frac{13}{4}$ का $\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{13}{4} \times \frac{1}{2}$ को निरूपित करेगा।

इसे हल करने से पहले एक सरल उदाहरण से भिन्नों के गुणनफल को समझते हैं।

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ से अर्थ $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3}$

(i) अतः सर्वप्रथम किसी सम्पूर्ण का $\frac{1}{2}$ ज्ञात करते हैं।

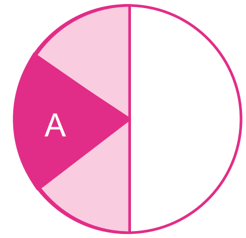
चित्र में छायांकित भाग $\frac{1}{2}$ को दर्शा रहा है।



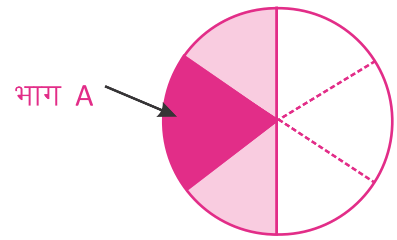
(ii) अब आप इस छायांकित भाग का $\frac{1}{3}$ कैसे ज्ञात करेंगे? इस छायांकित ($\frac{1}{2}$ भाग) को पुनः 3 समान भागों में विभाजित करके उसमें से 1 भाग लेंगे, जो कि $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3}$ होगा। हम जानते हैं कि

$\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

चित्र में भाग A, $\frac{1}{2}$ के $\frac{1}{3}$ को निरूपित करता है।



(iii) यह भाग A कुल का कितना भाग है ? इसे ज्ञात करने के लिए भाग A के समान ही अछायांकित भाग को विभाजित करेंगे। इस प्रकार पूरी इकाई के छः समान भाग हो जाते हैं और भाग A इस पूरी इकाई का छठवाँ भाग है। अतः



भाग A $= \frac{1}{6}$

इस प्रकार $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

इसे निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है।

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

इसी प्रकार $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ ज्ञात कीजिए, देखिए क्या उत्तर समान है ?

अतः $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

इसी प्रकार $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$;

करो और सीखो ◆ **ज्ञात कीजिए –**

(i) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{3 \times 7} = \boxed{\frac{\;}{\;}}$ (ii) $\frac{3}{2} \times \frac{4}{7} = \boxed{\frac{\;}{\;}} = \boxed{\;}$

(iii) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1 \times 1}{7 \times 5} = \boxed{\frac{\;}{\;}}$ (iv) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{\;}{\;}} = \boxed{\;}$

भिन्नों के गुणनफल का मान

आपने देखा है कि दो प्राकृत संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं से बड़ा या बराबर होता है। क्या भिन्नों में भी ऐसा ही होता है आइए देखते हैं ?

(i) उचित भिन्नों का गुणा

तालिका को पूर्ण कीजिए –

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$	$\frac{2}{15} < \frac{1}{3}$	$\frac{2}{15} < \frac{2}{5}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से कम है।
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} =$	....	....	....
$\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} =$	....	....	....
$\frac{2}{5} \times \frac{4}{9} =$	....	....	....

तालिका पूरी करने के बाद क्या आप इस बात से सहमत है कि दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मान सदैव दी गई भिन्नों से कम होता है।

(ii) आइए, अब हम दो **अनुचित (विषम) भिन्नों को गुणा** करते हैं।

$\frac{7}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{6}$	$\frac{35}{6} > \frac{7}{3}$	$\frac{35}{6} > \frac{5}{2}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से बडा है।
$\frac{6}{5} \times \frac{4}{3} =$	....	....	....
$\frac{9}{2} \times \frac{7}{4} =$	....	....	....
$\frac{3}{2} \times \frac{8}{7} =$	....	....	....

सारणी पूरी करने के बाद हम यह कह सकते हैं कि दो अनुचित भिन्नों का गुणनफल उनमें से प्रत्येक भिन्न से अधिक है।

करो और सीखो

(i) एक उचित और एक अनुचित भिन्न के गुणनफल के लिए इसी प्रकार सारणी बनाकर निष्कर्ष निकालिए ?

धीरज के पास 25 रूपये है, वह अपने धन का $\frac{2}{5}$ भाग कॉपी–पेन खरीदने पर खर्च करता है, तो उसने कितने रूपये खर्च किए।

जैसा कि हम जानते है 'का' गुणन को दर्शाता हैं।

इसलिए धीरज ने कॉपी–पेन खरीदने पर खर्च किए

$$25 \text{ का } \frac{2}{5} = 25 \times \frac{2}{5} = \frac{25 \times 2}{5} = 5 \times 2 = 10 \text{ रूपये}$$

अब धीरज के पास बचे रूपये 25 – 10 = 15, यह 25 का कितना हिस्सा है ? पता लगाइए।

उदाहरण 5 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा में कुल विद्यार्थियों में से $\frac{1}{5}$ भाग विद्यार्थी अंग्रेजी पढ़ना पसंद करते हैं, कुल संख्या का $\frac{2}{5}$ गणित पढ़ना पसंद करते हैं और शेष विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं

(i) कितने विद्यार्थी अंग्रेजी पढ़ना पसंद करते हैं ?

(ii) कितने विद्यार्थी गणित पढ़ना पसंद करते है ?

(iii) कुल विद्यार्थियों की संख्या का कितना हिस्सा विज्ञान पढ़ना पसंद करता है ?

हल कक्षा के कुल विद्यार्थियों की संख्या = 30

(i) इसमे से कुल संख्या का $\frac{1}{5}$ अंग्रेजी पढ़ना पसंद करता है।

अतः अंग्रेजी पढ़ना पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 30 का $\frac{1}{5} = 30 \times \frac{1}{5} = 6$

(ii) गणित पढ़ना पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 30 का $\frac{2}{5} = 30 \times \frac{2}{5} = 12$

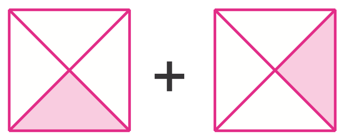
(iii) अंग्रेजी एवं गणित पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या $= 6 + 12 = 18$ है।

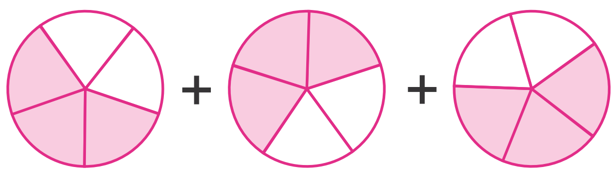
अतः विज्ञान पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या $= 30 - 18 = 12$ है।

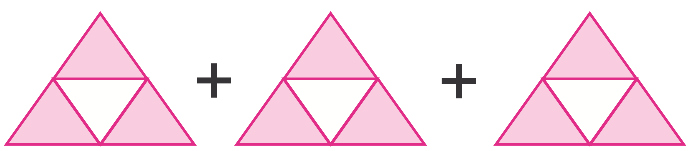
अतः वांछित भिन्न $= \frac{12}{30}$ है। अर्थात् $\frac{2}{5}$ हिस्सा विज्ञान पढ़ना पसंद करता है।

प्रश्नावली 2.2

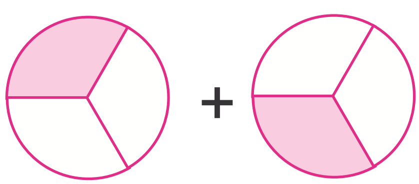
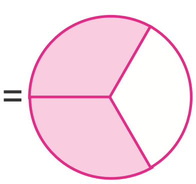
1. रेखाचित्रों से उचित गुणन का मिलान कीजिए।

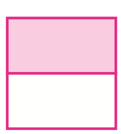
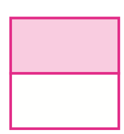
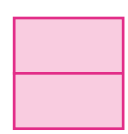
(i)  (a) $\frac{3}{4} \times 3$

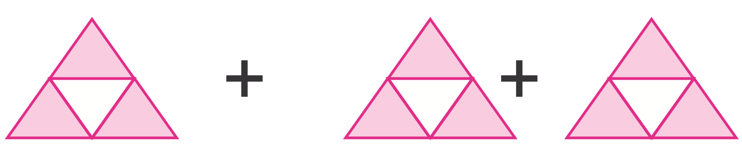
(ii)  (b) $\frac{1}{4} \times 2$

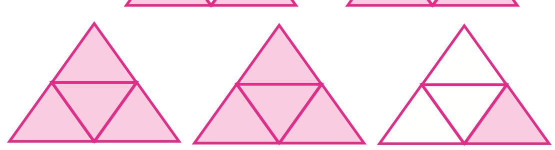
(iii)  (c) $\frac{3}{5} \times 3$

2. गुणन (बारम्बार जोड़) के रूप में निम्नलिखित चित्रों को दर्शाइए।

(i)  $= \frac{1}{3} \times 2 =$  = ...

(ii)  +  = ...  = ...

(iii) 

= .... =  = ...

3. गुणा करके सरलतम रूप में लिखिए।

(i) $8 \times \frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{3} \times 4$ (iii) $\frac{5}{2} \times 6$ (iv) $15 \times \frac{3}{5}$ (v) $20 \times \frac{2}{3}$

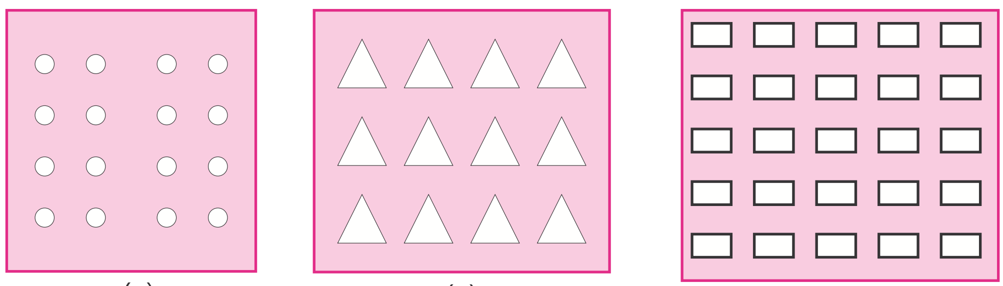
(vi) $18 \times \frac{1}{9}$ (vii) $2\frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ (viii) $12 \times \frac{5}{3}$ (ix) $\frac{3}{8} \times \frac{6}{4}$ (x) $\frac{4}{5} \times \frac{12}{7}$

4. छायांकित कीजिए।

(i) बॉक्स (a) में वृत्तों की संख्या के $\frac{1}{2}$ भाग को रंगिए।

(ii) बॉक्स (b) में त्रिभुजों की संख्या के $\frac{2}{3}$ भाग को रंगिए।

(iii) बॉक्स (c) में चोकोर आकारों की संख्या के $\frac{1}{5}$ भाग को रंगिए।



(a) (b) (c)

5. निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए।

(i) 27 का $\frac{1}{3}$ (ii) 18 का $\frac{1}{3}$ (iii) 50 का $\frac{1}{5}$ (iv) 24 का $\frac{3}{4}$ (v) 32 का $\frac{5}{4}$ (vi) 28 का $\frac{3}{7}$

6. ज्ञात कीजिए।

(i) 4 का $1\frac{3}{5}$ (ii) $5\frac{1}{5}$ का $\frac{2}{3}$ (iii) $3\frac{2}{5}$ का $\frac{8}{17}$ (iv) $9\frac{2}{3}$ का $\frac{3}{8}$ (v) $\frac{3}{5}$ का $\frac{1}{5}$ (vi) $\frac{3}{10}$ का $\frac{1}{7}$

7. निम्नलिखित भिन्नों का गुणा कीजिए।

(i) $3\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{2} \times 6\frac{2}{5}$ (iii) $3\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$ (iv) $3\frac{2}{5} \times 4\frac{3}{8}$

8. कौन बड़ा है ?

(i) $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{5}$ अथवा $\frac{5}{8}$ का $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ का $\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{3}{7}$ का $\frac{2}{3}$

9. मनीषा घर से 15 लीटर दूध से भरा केन लेकर निकली। उसने कंचन के यहाँ $\frac{2}{5}$ भाग दूध दिया और भावना के घर $\frac{1}{5}$ भाग दूध दिया और शेष दूध होटल पर बेच दिया, तो बताइए कि–

(i) कंचन के घर कितने लीटर दूध दिया।

(ii) भावना के घर कितने लीटर दूध दिया।

(iii) कितने लीटर दूध मनीषा ने होटल पर बेचा।

10. स्वतंत्रता दिवस पर पीटी प्रदर्शन में 7 बच्चों में प्रत्येक को $\frac{3}{4}$ मीटर की दूरी छोड़ते हुए खड़ा किया गया, तो बताइए पहले और आखरी बच्चे के बीच में दूरी कितनी है ?

11. राहुल एक पेन्टिंग पर रोजाना $2\frac{3}{4}$ घंटे काम करता है यदि वह उसे पूरा करने में 8 दिन लगाता है तो बताइए। उसने कुल कितने घंटे काम किया।

12. एक कार एक लीटर पेट्रोल में $23\frac{1}{5}$ किमी दूरी तय करती है तो $2\frac{3}{4}$ लीटर पेट्रोल में कितनी किमी चल पाएगी।

13. (i) $\boxed{}$ में संख्या लिखिए, ताकि $\frac{3}{4} \times \boxed{} = \frac{6}{40}$

(ii) $\boxed{}$ में प्राप्त संख्या का सरलतम रूप ....है।

14. (i) $\boxed{}$ में संख्या लिखिए, ताकि $\boxed{} \times \frac{5}{8} = \frac{10}{24}$

(ii) $\boxed{}$ में प्राप्त संख्या का सरलतम रूप ....है।

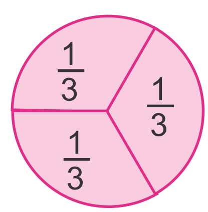
2.3 भिन्न संख्या का भाग

सुमित के पास 8 सेमी लम्बी कागज की एक पट्टी है। वह इस पट्टी को 2 सेमी लम्बी छोटी पट्टियों में काटता हैं। आप जानते है कि वह 8÷2=4 पट्टी प्राप्त करेगा। यदि वह 8 सेमी लम्बी पट्टी से $\frac{3}{2}$ सेमी लम्बाई वाली छोटी पट्टियाँ काटता है अब उसको कितनी छोटी पट्टियाँ प्राप्त होती है? वह $8 \div \frac{3}{2}$ पट्टियाँ प्राप्त करेगा। इसी प्रकार $\frac{15}{4}$ सेमी लम्बी पट्टी को $\frac{3}{2}$ सेमी लम्बाई वाली छोटी पट्टियों में काटा जा सकता है। जिससे हमें $\frac{15}{4} \div \frac{3}{2}$ टुकड़े प्राप्त होंगे।

अतः हमें इन स्थितियों में पूर्ण से भिन्न व भिन्न से भिन्न में भाग देने की आवश्यकता पड़ती है। आइए इसे कैसे करना है? समझते हैं।

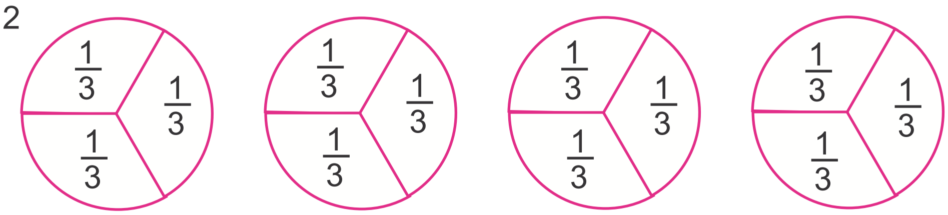
2.3.1 पूर्ण संख्या में भिन्न का भाग

जैसे $1 \div \frac{1}{3}$ ज्ञात करते हैं। इसका अर्थ है 1 में $\frac{1}{3}$ कितनी बार है। आपको इस चित्र में कितने $\frac{1}{3}$ भाग दिखाई दे रहे हैं।



1 में ऐसे $\frac{1}{3}$ के तीन भाग है अतः $1 \div \frac{1}{3} = 3$

इसी प्रकार $4 \div \frac{1}{3} = 4$ संपूर्ण में से प्रत्येक को समान $\frac{1}{3}$ भागों में बाँटने पर, $\frac{1}{3}$ भागों की संख्या = 12



अर्थात् $4 \div \frac{1}{3} = 12$ साथ ही $4 \div \frac{1}{3} = 4 \times \frac{3}{1} = 12$

इसी प्रकार चित्रों द्वारा आप $2 \div \frac{1}{5}$ व $5 \div \frac{1}{2}$ ज्ञात कीजिए।

2.3.2 भिन्नों का व्युत्क्रम

$\frac{1}{3}$ के अंश व हर को परस्पर बदलने पर $\frac{3}{1}$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार आप $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{3}$ के अंश व हर को परस्पर बदलिए।

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{1} = 1$, $\frac{1}{5} \times \frac{5}{1} =$ .... , $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} =$ ....

ऐसी शून्येत्तर ($\neq 0$) संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है, एक दूसरे के व्युत्क्रम कहलाते हैं।

आपने देखा है कि

$1 \div \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{1} = 1 \times \left(\frac{1}{3} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

$4 \div \frac{1}{3} = 4 \times \frac{3}{1} = 4 \times \left(\frac{1}{3} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

$5 \div 1\frac{1}{2} = 5 \div \frac{3}{2} = 5 \times \frac{2}{3} = 5 \times \left(\frac{3}{2} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

$2 \div \frac{3}{4} = 2$..................... =......................

इस प्रकार **किसी पूर्ण संख्या को एक भिन्न से भाग करने के लिए उस पूर्ण संख्या को उस भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं।**

करो और सीखो ◆ **हल कीजिए–**

(i) $5 \div \frac{2}{3}$ (ii) $7 \div \frac{3}{4}$ (iii) $6 \div \frac{1}{5}$

2.3.3 पूर्ण संख्या से भिन्न का भाग

$\frac{3}{5} \div 4$ का मान क्या होगा ?

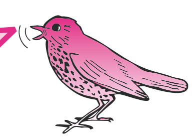
इसे हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं।

$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{4}{1} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

$= \frac{3}{20}$ होगा।

इसी प्रकार $3\frac{2}{3} \div 5 = \frac{11}{3} \div \frac{5}{1} = \frac{11}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{15}$ उत्तर

किसी भी संख्या में 1 का भाग देने पर वही संख्या प्राप्त होती है।



करो और सीखो ◆ **रिक्त स्थान भरिए–**

(i) $2\frac{3}{5} \div 2 = \frac{13}{5} \div 2 =$ .... (ii) $\frac{8}{3} \div 5 =$ .... = ...

(iii) $2\frac{2}{3} \div 3 =$ .... = ...

2.3.4 एक भिन्न से दूसरी भिन्न का भाग

$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$ उत्तर

इसी प्रकार

$2\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{4} = \frac{7}{3} \div \frac{5}{4} = ?$

करो और सीखो हल कीजिए–

(i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$

प्रश्नावली 2.3

1. ज्ञात कीजिए।

(i) $12 \div \frac{2}{3}$ (ii) $5 \div 3\frac{4}{7}$ (iii) $3 \div 1\frac{1}{3}$

(iv) $4 \div \frac{8}{3}$ (v) $6 \div \frac{2}{3}$ (vi) $15 \div \frac{5}{7}$

2. निम्नलिखित भिन्नों में से प्रत्येक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{12}{7}$ (iv) $\frac{5}{8}$ (v) $\frac{9}{7}$

3. ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{3}{7} \div 2$ (ii) $4\frac{3}{7} \div 7$ (iii) $\frac{6}{13} \div 5$

(iv) $3\frac{1}{2} \div 4$ (v) $\frac{6}{5} \div 3$ (vi) $\frac{7}{3} \div 4$

4. ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{7}{3} \div \frac{8}{7}$ (ii) $2\frac{1}{5} \div \frac{3}{5}$ (iii) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$

(iv) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{5}$ (v) $3\frac{1}{5} \div 2\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{3}{5} \div \frac{5}{7}$

5. 6 रोटियों में से प्रत्येक रोटी को $\frac{1}{4}$ के टुकड़ों में बाँटने पर रोटी के $\frac{1}{4}$ भागों की संख्या कितनी होगी?

6. $11\frac{1}{2}$ सेमी लम्बी रिबन में से $\frac{1}{2}$ सेमी लम्बे कितने टुकड़े काटे जा सकते हैं ?

2.4 दशमलव संख्याओं का पुनरावलोकन

आपने पिछली कक्षाओं में दशमलव संख्याओं के बारे में अध्ययन किया है। चलिए उसका दोहरान करते हैं। निम्न संख्याओं को आप कैसे पढ़ेंगे।

(i) 24.2 = चौबीस दशमलव दो

(ii) 2.04 = दो दशमलव शून्य चार

(iii) 325.52 = ...

(iv) 56.32 = ...

निम्न सारणी को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

सैकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$	सहस्त्रांश $\left(\frac{1}{1000}\right)$	संख्या
4	2	1	2	5	8	421.258
6	0	8	5	0	7	608.507
-------	0	3	2	1	0	303.210
8	-------	6	-------	7	0	876.170
7	8	---------	---------	3	--------	784.035
0	1	2	3	4	5	-------------

इन संख्याओं को हम विस्तारित रूप में इस प्रकार भी लिख सकते हैं –

$421.258 = 4 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \times 1 + 2\times \frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{100} + 8\times\frac{1}{1000}$

इसी प्रकार ऊपर दी गई सारणी की शेष संख्याओं को लिखिए।

$5\times\frac{1}{100} = \frac{5}{100}$ दी गई संख्या में 5 का स्थानीय मान कहलाता है।

2.4.1 दशमलव संख्याओं की तुलना, जोड़ एवं घटाव

शहर A की, शहर B से दूरी 38.750 किमी. है और शहर C से दूरी 38.075 किमी.है, शहर A की कौनसे शहर से दूरी अधिक है ?

(i) दशमलव के बाईं ओर की संख्या समान है अतः हम दशमलव के दाईं ओर के अंकों की तुलना करते हैं।

(ii) दशांश स्थान से शुरू करते हुए दशमलव बिन्दु के दाईं तरफ के अंकों की तुलना करने पर हम पाते हैं $7 > 0$ अतः $38.750 > 38.075$ होगी।

अतः शहर A की शहर B से दूरी अधिक है।

करो और सीखो ◆ **कौनसी संख्या छोटी है ?**

(i) 35.37 और 35.07 (ii) 262.327 और 262.372

मुद्रा, लम्बाई और भार आदि की छोटी इकाई को बड़ी इकाई में परिवर्तित करने के लिए हम दशमलव का प्रयोग करते हैं। उदाहरणतः

24 ग्राम $= \frac{27}{1000}$ किग्रा $=$ 0.027 किग्रा

550 पैसे $= \frac{550}{100}$ रूपये $=$ 5.50 रूपये

1 मी. 25 सेमी $=$ 1 मी. $+ \frac{25}{100}$ मी. $=$ 1.25 मी.

120 मीटर $= \frac{120}{1000}$ किमी $=$ ....किमी

1 किग्रा = 1000 ग्राम
1 रूपये = 100 पैसे
1 मीटर = 100 सेमी
1 किमी = 1000 मीटर

उदाहरण 6 घीसू ने एक टोकरी में 12 किग्रा 400 ग्राम अमरूद और एक अन्य टोकरी में 6 किग्रा 750 ग्राम जामुन रखे हैं। शहर ले जाते समय उसे कुल कितना वजन उठाना पड़ेगा?

हल टोकरी में अमरूद का वजन = 12 किग्रा 400 ग्राम = 12.400 किग्रा

टोकरी में जामुन का वजन = 6 किग्रा 750 ग्राम = 6.750 किग्रा

कुल वजन = 19.150 किग्रा उत्तर

उदाहरण 7 दुर्गा और विमला ने सलवार सूट बनवाने के लिए 5 मी 25 सेमी कपड़ा खरीदा। यदि दुर्गा के सूट बनाने में 2 मी 75 सेमी कपड़े की जरूरत पड़ी तो बताइए विमला के सूट के लिए कितना कपड़ा बचा ?

हल कुल खरीदा गया कपड़ा = 5 मी 25 सेमी = 5.25 मीटर

दुर्गा के सूट में काम आया = 2 मी 75 सेमी = 2.75 मीटर

विमला के लिए बचा कपड़ा = 5.25 − 2.75 = 2.50 मीटर

प्रश्नावली 2.4

1. तुलना कीजिए कौन बड़ा है ?

   (i) 0.7 और 0.07 (ii) 2.03 और 2.30 (iii) 7 और 0.7

   (iv) 1.35 और 1.49 (v) 3.507 और 3.570 (vi) 85.2 और 85.02

2. निम्नलिखित छोटी इकाईयों को बड़ी इकाईयों में बदलिए।

   (i) 7 पैसे को रूपये में (ii) 800 ग्राम को किग्रा में (iii) 75 मीटर को किमी में

   (iv) 3470 मीटर को किमी में (v) 7 किग्रा 7 ग्राम को किग्रा में

   (vi) 47 किमी 75 मीटर को किमी में

3. निम्नलिखित दशमलव को विस्तारित रूप में लिखिए।

   (i) 25.03 (ii) 2.503 (iii) 205.3 (iv) 2.053

4. निम्नलिखित संख्याओं में 3 का स्थानीयमान ज्ञात कीजिए।

   (i) 34.82 (ii) 643.45 (iii) 547.03 (iv) 24.203

5. पारस के पिताजी सब्जी मण्डी से 7 किग्रा 250 ग्राम हरी मिर्च, 15 किग्रा 750 ग्राम टमाटर और 950 ग्राम धनिया लाए तो बताइए, वे कुल कितने किलोग्राम सब्जी लाए ?

6. भावना के बैंक खाते में ब्याज के 37.25 रूपये जमा हुए और अनिता के बैक खाते में ब्याज के 25.50 रूपये जमा हुए। बताइए किसे अधिक ब्याज मिला और कितना अधिक ?

7. 48 किमी से 42.7 किमी कितना कम है ?

8. 24.57 और 36.3 के योग में क्या जोड़ा जाए कि 70 प्राप्त हो ?

2.4.2 दशमलव संख्याओं का गुणन

मनोज ने अपनी गाड़ी में 2.5 लीटर पेट्रोल भरवाया, यदि पेट्रोल की कीमत 66.25 रूपये प्रति लीटर है तो मनोज को पेट्रोल के लिए कितना भुगतान करना होगा ?

यहाँ 66.25 व 2.5 दोनों ही दशमलव संख्याएँ है। इस प्रकार कई परिस्थितियों में हमें दशमलव संख्याओं को गुणा करने की आवश्यकता पड़ती है। आइए अब हम दो दशमलव संख्याओं के गुणन को सीखते हैं। सर्वप्रथम 0.1 x 0.1 का मान ज्ञात करते हैं।

हम जानते हैं। $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{100} = \frac{1}{100} = 0.01$

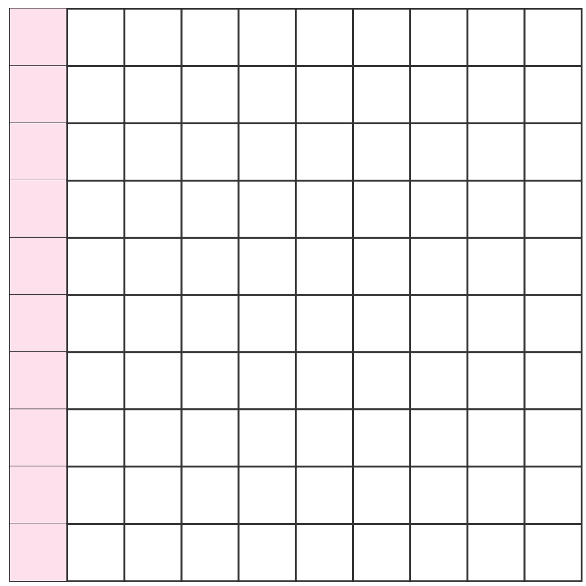
आइए इसका चित्र निरूपण देखते हैं।

$$0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{10} \text{ का } \frac{1}{10}$$

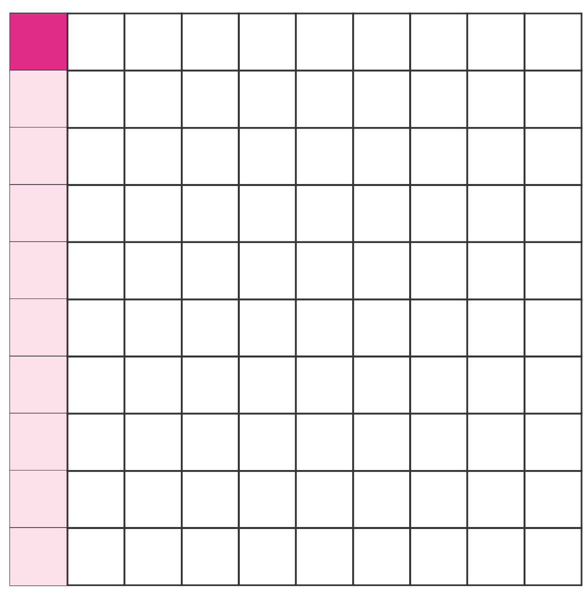
अतः पहले हम $\frac{1}{10}$ को चित्र में दर्शाते हैं।

$\frac{1}{10}$



अब हम $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ अतः रंगे गए भाग के 10, हिस्से कर एक हिस्से को दर्शाते हैं।

$\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$



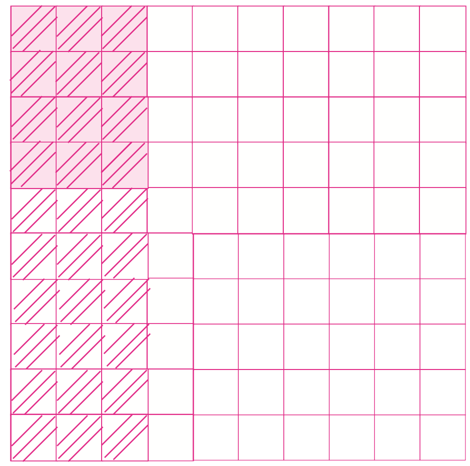
अतः $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ या $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ कुल इकाई के $\frac{1}{100}$ को दर्शाता है जिसे .01 भी लिखते है।

अतः $0.1 \times 0.1 = 0.01$

इसी प्रकार $0.3 \times 0.4 = \frac{3}{10} \times \frac{4}{10}$

या $\frac{3}{10}$ का $\frac{4}{10}$

$\frac{3}{10} \times \frac{4}{10}$ का चित्र द्वारा निरूपण करने पर



छायांकित भाग कुल 100 छोटे खाने में से 12 खाने को दर्शाता है अतः

$\frac{3}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{100}$ या $0.3 \times 0.4 = 0.12$

इसे इस प्रकार भी किया जा सकता है 0.3 x 0.4 के लिए पहले 03 x 04 = 12 प्राप्त कर लेते हैं, उसके बाद गुणा होने वाली संख्याओं में दशमलव के बाद के अंक गिनकर प्राप्त परिणाम (जैसे 12) में दाईं ओर से उतने ही अंक छोड़कर दशमलव लगा दिया जाता है अर्थात् 0.12 प्राप्त होगा।

इसी प्रकार 1.4 x 2 के लिए 14 x 2 = 28 प्राप्त करेंगे और उसके बाद दशमलव के बाद के अंक गिनकर परिणाम के दाईं ओर से उतने ही अंक छोड़कर दशमलव लगाएँ। अर्थात् 2.8 प्राप्त होगा।

करो और सीखो ◆ **मान ज्ञात कीजिए–**

(i) 2.3 x 3.5 (ii) 3.7 x 5 (iii) 2.4 x 7.35

उदाहरण 8 गणेशी प्रतिदिन 7.5 किग्रा गेहूँ साफ करती है। दस दिन में वो कितने गेहूँ साफ कर लेगी?

हल गणेशी एक दिन में गेंहूँ साफ करती है = 7.5 किग्रा

10 दिन में गेहूँ साफ करेगी = 7.5 x 10

= 75.0 किग्रा उत्तर

उदाहरण 9 एक आयताकार फोटो फ्रेम की लम्बाई 2.25 मीटर और चौड़ाई 1.5 मीटर है, उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल आयताकार फ्रेम की लम्बाई = 2.25 मीटर

फ्रेम की चौड़ाई = 1.5 मीटर

फ्रेम का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

= 2.25 x 1.5

= 3.375 वर्ग मीटर उत्तर

इसे भी समझिए –

(i) 1.52 x 10 (ii) 1.52 x 100 (iii) 1.52 x 1000

हल (i) जैसा हमने पहले भी किया था उसी प्रकार

152 x 10 = 1520

अब दशमलव के बाद के अंक गिनकर

1.52 x 10 = 15.20

(ii) ठीक इसी प्रकार

152 x 100 = 15200

दशमलव के बाद के अंक गिनकर

1.52 x 100 = 152.00

(iii) इसी प्रकार

152 x 1000 = 152000

1.52 x 1000 =............... इसमें दशमलव स्वयं लगाइए।

> किसी दशमलव संख्या को 10, या 100 या 1000 से गुणा करने पर परिणाम में दशमलव उतने ही बार दाईं और खिसक जाता है जितने 10, या 100 या 1000 में शून्य है।

उपर्युक्त के परिणामों से क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है। क्या आप ▢ में बताए गए पैटर्न से सन्तुष्ट हैं ? चर्चा कीजिए।

प्रश्नावली 2.5

1. ज्ञात कीजिए ।

; (i) 7 x 5.4 (ii) 80.1 x 2 (iii) 0.08 x 5

(iv) 3 x 0.86 (v) 312.05 x 4 (vi) 6.08 x 8

2. ज्ञात कीजिए।

(i) 3.72 x 10 (ii) 0.37 x 10 (iii) 0.5 x 10

(iv) 1.08 x 100 (v) 73.8 x 10 (vi) 0.06 x 100

(vii) 47.03 x 1000 (viii) 0.03 x 1000 (ix) 42.7 x 1000

3. ज्ञात कीजिए।

(i) 4.2 x 3.5 (ii) 6.25 x 0.5 (iii) 11.2 x 0.15

(iv) 0.08 x 0.5 (v) 101.01 x 0.01 (vi) 20.05 x 4.8

4. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 6.4 सेमी और चौड़ाई 3.2 सेमी है ?

5. एक कार 1 लीटर पेट्रोल में 25.17 किलोमीटर चलती है तो 10.5 लीटर में कितना चल पाएगी?

6. प्रकाश प्रतिमाह राजू को 2.500 किलोग्राम घी बेचता है। 10 माह में प्रकाश राजू को कुल कितना घी बेच चुका होगा ?

7. एक समबाहु त्रिभुज की एक भुजा 4.5 सेमी है तो उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. दीपिका सब्जी मण्डी से 16.50 रू. प्रति किलोग्राम के थोक भाव से टमाटर का एक कैरेट (बक्सा) खरीदती है। यदि इस कैरेट के टमाटरों का वजन 22.5 किलोग्राम निकलता है, तो थोक विक्रेता को दीपिका कितने रूपये चुकाएगी ?

2.5 दशमलव संख्याओं का भाग

शकुन्तला अपने घर में सजावट के लिए रंगीन पट्टियाँ खरीद कर लाई है, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई 8.5 सेमी है इन पट्टियों से वह सजावट के लिए 1.7 सेमी लम्बाई के टुकड़े काटना चाहती है। एक पट्टी से कितने टुकड़े प्राप्त किए जा सकेंगे ?

इसके लिए $8.5 \div 1.7$ प्राप्त करना होगा। आइए सरल उदाहरणों से दशमलव संख्याओं का भाग किस प्रकार किया जाता है, जानने की कोशिश करते हैं।

2.5.1 दशमलव भिन्न में पूर्ण संख्या से भाग

$8.4 \div 2$ ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि 8.4 को $\frac{84}{10}$ के रूप में लिखा जा सकता है क्योंकि 8.4 का विस्तारित रूप $(8 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10})$ में लिखा जाता है। अतः

$$8.4 \div 2 = \frac{84}{10} \div 2$$

$$= \frac{84}{10} \div \frac{2}{1}$$

भिन्नों के भाग में हमने सीखा था भाग के लिए 2 के व्युत्क्रम से गुणा करना होगा।

$$= \frac{84}{10} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{84 \times 1}{10 \times 2}$$

$$= \frac{42}{10} = 4.2$$

$$4.2 = 4 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10}$$

$$4.2 = \frac{42}{10}$$

इसे भी समझिए –

(i) $45.32 \div 10$ (ii) $45.32 \div 100$ (iii) $73.25 \div 1000$

हल (i) $45.32 \div 10$

$$= \frac{4532}{100} \div \frac{10}{1}$$

$$= \frac{4532}{100} \times \frac{1}{10}$$

($\frac{10}{1}$ का व्युत्क्रम = $\frac{1}{10}$)

$$= \frac{4532}{1000} = 4.532$$

(ii) $45.32 \div 100$

$$= \frac{4532}{100} \div \frac{100}{1}$$

$$= \frac{4532}{100} \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{4532}{10000}$$

$$= 0.4532$$

(iii) $73.25 \div 1000$

$= \frac{7325}{100} \div \frac{1000}{1}$

$= \frac{7325}{100} \times \frac{1}{1000}$

$= \frac{7325}{100000}$

$= 0.07325$

क्या आपको 10, 100 व 1000 से दशमलव संख्याओं में भाग देने पर दशमलव के स्थान पर आए बदलाव में कोई नियम दिखता है ?

आपने ठीक पहचाना, संख्या एवं भागफल के अंक एक जैसे हैं परंतु **भागफल में दशमलव बिन्दु बाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित हो जाता है जितने 1 के साथ शून्य होते हैं।**

करो और सीखो ◆ दी गई दशमलव संख्याओं में 10, 100 एवं 1000 से भाग दीजिए।
(i) 132.4 (iii) 1.03 (ii) 40.033 (iv) 4.321

2.5.2 किसी पूर्ण संख्या में दशमलव भिन्न से भाग

$32 \div 0.4$ पर विचार कीजिए

$32 \div 0.4 = 32 \div \frac{4}{10} = 32 \times \frac{10}{4}$ $\left(\frac{4}{10} \text{ का व्युत्क्रम} = \frac{10}{4} \right)$

$= 32 \times \frac{10}{4}$

$= \frac{(4 \times 8) \times 10}{4} = 8 \times 10 = 80$ उत्तर

इसी प्रकार $7 \div 1.6 = 7 \div \frac{16}{10} = 7 \times \frac{10}{16}$

$= 7 \times \frac{5}{8} = \frac{35}{8} = 4.375$

करो और सीखो ◆ हल कीजिए–
(i) $6 \div 1.2$ (ii) $9 \div 4.5$ (iii) $48 \div 0.8$

2.5.3 किसी दशमलव संख्या में दशमलव संख्या से भाग

$32 \div 0.5$ पर विचार कीजिए

$32 \div 0.5 = \frac{325}{100} \times \frac{5}{10}$

$= \frac{325}{100} \times \frac{10}{5} = \frac{325 \times 10}{100 \times 5} = \frac{65}{10} = 6.5$ उत्तर

इसी प्रकार

$$37.8 \div 0.14 = \frac{378}{10} \div \frac{14}{100} = \frac{378}{10} \times \frac{100}{14}$$

$$= \frac{378 \times 100}{10 \times 14} = 27 \times 10 = 270 \text{ उत्तर}$$

करो और सीखो ◆ **हल कीजिए–**

(i) $7.75 \div 0.25$ (ii) $5.6 \div 1.4$ (iii) $42.8 \div 0.02$

अन्य रोचक विधि

$$2.73 \div 1.3 = \frac{2.73}{1.3}$$

$$= \frac{2.73}{1.30}$$

$$= \frac{273}{130}$$

$$= \frac{21}{10} = 2.1 \text{ उत्तर}$$

$2.73 \div 1.3$ को $\frac{2.73}{1.3}$ लिखा जा सकता है।

दशमलव के बाद अंक समान करने के लिए 0 लगाए जा सकते हैं। और फिर दशमलव हटाया जा सकता है।

(उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 13 छोड़ने पर)

प्रश्नावली 2.6

1. ज्ञात कीजिए।

(i) $0.8 \div 4$ (ii) $0.42 \div 7$ (iii) $3.96 \div 6$ (iv) $842.4 \div 4$

(v) $14.49 \div 7$ (vi) $36 \div 0.2$ (vii) $7 \div 3.5$ (viii) $0.09 \div 3$

2. ज्ञात कीजिए।

(i) $4.2 \div 10$ (ii) $98.6 \div 10$ (iii) $0.2 \div 10$

(iv) $143.2 \div 100$ (v) $86 \div 100$ (vi) $8.05 \div 100$

(vii) $44.32 \div 100$ (viii) $1.3 \div 1000$ (ix) $0.06 \div 1000$

3. ज्ञात कीजिए।

(i) $1.2 \div 0.3$ (ii) $3.64 \div 0.4$ (iii) $9.6 \div 1.6$

(iv) $1.25 \div 2.5$ (v) $30.75 \div 1.5$ (vi) $4.08 \div 1.2$

(vii) $30.94 \div 0.7$ (viii) $76.5 \div 0.15$ (ix) $7.75 \div 0.25$

4. एक स्कूटर 5 लीटर पेट्रोल में 212.5 किमी चल जाता है, तो एक लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय करेगा ?

5. गोपाल, नारायण और कृष्णा के घर की स्कूल से दूरियाँ क्रमशः 1.5 किमी, 0.7 किमी और 1.4 किमी है, तीनों दूरियों का औसत ज्ञात कीजिए। $\left(\text{औसत} = \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}\right)$

6. एक कार 2.2 घण्टे में 89.1 किमी दूरी तय करती है, तो कार द्वारा 1 घण्टे में तय दूरी ज्ञात कीजिए।

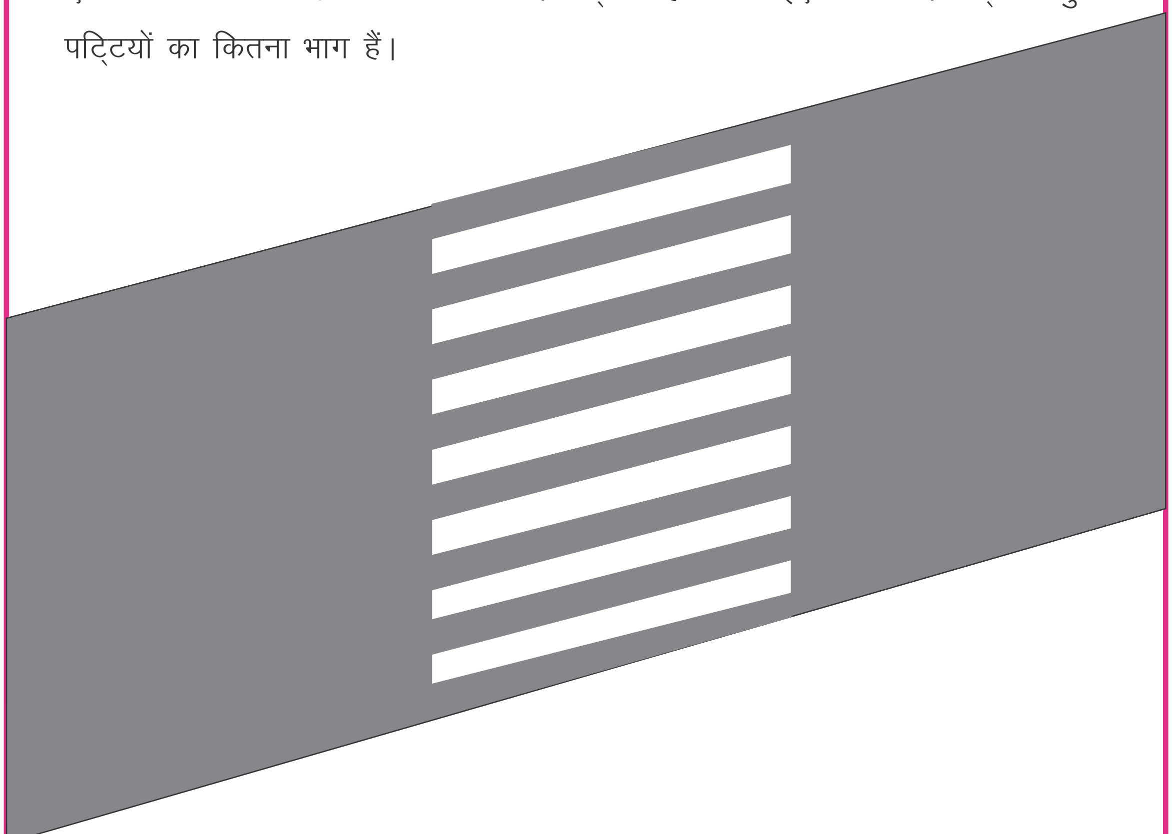
7. एक वर्ग का परिमाप 44.08 मीटर है तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक आयत का क्षेत्रफल 93.6 वर्ग मीटर है और चौड़ाई 3.6 मी. है,तो आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए।

सड़क सुरक्षा

पैदल सड़क पार करने के लिए पदयात्रियों को जेब्रा रेखाओं (जेब्रालाईन) का प्रयोग करना चाहिए, इससे पदयात्रियों के दुर्घटनाग्रस्त होने की संभावना कम हो जाती है। जेब्रा रेखाएँ सड़क पर बनाई गई आयताकार पट्टियाँ होती है। जहाँ वाहन चालक वाहन को रोक कर धीमी गति से आगे बढता है। साथ ही चौराहों पर लाल लाईट के समय पैदल यात्री सड़क पार करने के लिए भी उपयोग करते हैं।

1. एक जेब्रा क्रोसिंग में 8 काली व 7 सफेद पट्टियाँ है तो बताइए कि सफेद पट्टियाँ कुल पट्टियों का कितना भाग हैं।



2. किसी दिन 100 लोगों ने एक जेब्रा क्रोसिंग से सड़क पार की जिसमें 20 पुरुष, 30 महिलाएँ, 10 छोटे बच्चे और 40 विद्यार्थी थे इन सभी आँकडों को दशमलव में दर्शाइए।

हमने सीखा

1. इस अध्याय में हमने भिन्नों एवं दशमलवों पर गुणन एवं भाग की संक्रियाओं का अध्ययन किया है।

2. भिन्नों का गुणनफल $= \dfrac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हर का गुणनफल}}$

3. दो उचित भिन्नों का गुणनफल गुणा किए गए प्रत्येक भिन्न से छोटा होता हैं। उचित तथा अनुचित भिन्नों का गुणनफल गुणा किए उचित भिन्न से अधिक होता है। दो अनुचित भिन्नों का गुणनफल गुणा किए गए प्रत्येक भिन्न से बड़ा होता है।
4. एक भिन्न के अंश और हर को आपस में बदल देने से व्युत्क्रम भिन्न प्राप्त होता है।
5. हमने सीखा कि दो भिन्नों का भाजन किस प्रकार किया जाता है।
   (i) एक वर्ग संख्या को भिन्न से भाजन करने का तात्पर्य है कि पूर्ण संख्या को भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करना।
   (ii) एक भिन्न को पूर्ण संख्या से भाजन करने का तात्पर्य है कि भिन्न को पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करना।
   (iii) एक भिन्न को दूसरे भिन्न से भाजन करने का तात्पर्य है कि भिन्न को दूसरे भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करना।
6. जब किन्हीं दो दशमलव संख्याओं का गुणा किया जाता है तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं को तरह ही गुणा करते हैं। इसके बाद गुणा होने वाली संख्याओं के दशमलव के दाहिनी ओर से अंकों को गिन कर प्राप्त गुणनफल संख्या के दाहिनी और से कुल उतने ही अंकों के बाद दशमलव लगा देते हैं।
7. दशमलव संख्या से 10,100,1000 का गुणा करते समय हम जितने शून्य वाली संख्या से गुणा करते हैं। उतना ही आगे दशमलव बिन्दु बढाया जाता है।
8. हमने दशमलव संख्याओं के भाजन को भी सीखा है।

(i) दो दशमलव संख्याओं के भाजन करने के लिए दोनों संख्याओं में दशमलव के बाद अंकों की संख्या समान कर दशमलव को हटा सकते हैं तथा उसके बाद सामान्य रीति से भाग देते हैं।

(ii) दशमलव संख्या को 10,100,1000 से भाजन के लिए दशमलव बिन्दु से जितने शून्य होते है उतनी बार दशमलव से बाईं और बढ़ते हैं।

अध्याय 3

वर्ग एवं वर्गमूल

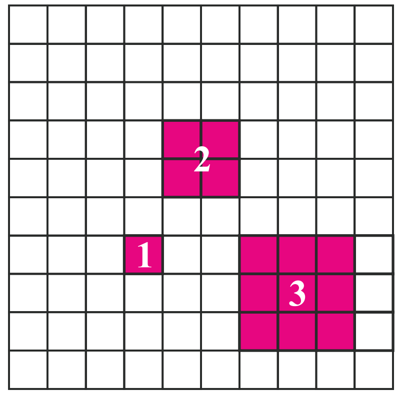
3.1 सोनू तथा दीनू वर्ग शीट पर वर्ग बना रहे हैं तथा उनका क्षेत्रफल वर्ग गिनकर लिख रहे हैं।

एक इकाई भुजा के वर्ग (वर्ग–1) का क्षेत्रफल= 1 वर्ग इकाई

दो इकाई भुजा के वर्ग (वर्ग–2) का क्षेत्रफल = 4 वर्ग इकाई

तीन इकाई भुजा के (वर्ग–3) का क्षेत्रफल = 9 वर्ग इकाई

आप भी वर्ग शीट पर 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 इकाई के वर्ग बनाइए व उनका क्षेत्रफल इकाई वर्गों को गिनकर ज्ञात कीजिए। नीचे दी गई सारणी को पूरा कीजिए –



वर्ग की भुजा	1	2	3	4	5	6					
वर्ग का क्षेत्रफल	1	4	9								

तालिका 3.1

संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, ... और इसी प्रकार की संख्याओं में क्या विशेष है?

चूंकि इन्हें $1 = 1 \times 1 = 1^2$; $4 = 2 \times 2 = 2^2$; $9 = 3 \times 3 = 3^2$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। अतः हम पाते हैं कि इन संख्याओं को, एक संख्या को उसी से गुणा करके प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार की संख्याओं 1, 4, 9, 16, ... को **वर्ग संख्याएँ** कहते हैं।

व्यापक रूप में $s = r^2$ है तो s एक वर्ग संख्या है। क्या 24 एक वर्ग संख्या है?

निम्न संख्याओं एवं उनके वर्गों के बारे में विचार कीजिए एवं रिक्त स्थानों को भरिए।

संख्याएँ	वर्ग
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$
3	$3 \times 3 = 9$
4	$4 \times 4 = 16$
5	$5 \times 5 = 25$
6	....
7	....
8	....
9	....
10	

तालिका 3.2

उपर्युक्त तालिका में आप पाएँगे कि 1 से 100 के बीच मात्र 10 संख्याएँ ही वर्ग संख्याएँ हैं, शेष संख्याएँ वर्ग संख्या नहीं हैं।

संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, एवं 100 वर्ग संख्याएँ हैं तथा इन्हें पूर्ण वर्ग संख्याएँ भी कहते हैं।

करो और सीखो दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्या लिखिए।

(i) 20 व 30 (ii) 40 व 50

3.2 वर्ग संख्याओं के गुणधर्म

नीचे 1 से 20 तक की संख्याओं की वर्ग संख्याओं को दिखाया गया है–

संख्याएँ	वर्ग	संख्याएँ	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

तालिका 3.3

उक्त तालिका में वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान के अंकों को समूह A के रूप में नीचे लिखिए।

A = { 0, 1, 4, ... }

0 से 9 के बीच के जो अंक समूह A में नहीं आए हैं उन्हें समूह B में लिखिए –

B = { 2, 3, ... }

आप समूह A तथा समूह B की संख्याओं के आधार पर यह कह सकते हैं कि संख्याएँ जिनके इकाई का अंक 2, 3, 7, 8 हो वे वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती हैं।

करो और सीखो

(1) इकाई के अंक के आधार पर यह बताइए निम्न में से कौन–कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती है?

(i) 2304 (ii) 402 (iii) 3003 (iv) 100 (v) 1008

(2) ऐसी तीन संख्याएँ बताइए जिनमें आप निश्चयपूर्वक कह सकते हैं कि वह पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं है।

(i) .... (ii) .... (iii) ....

तालिका 3.3 में दी गई सम एवं विषम संख्याओं के पूर्ण वर्ग किस प्रकार के हैं ?

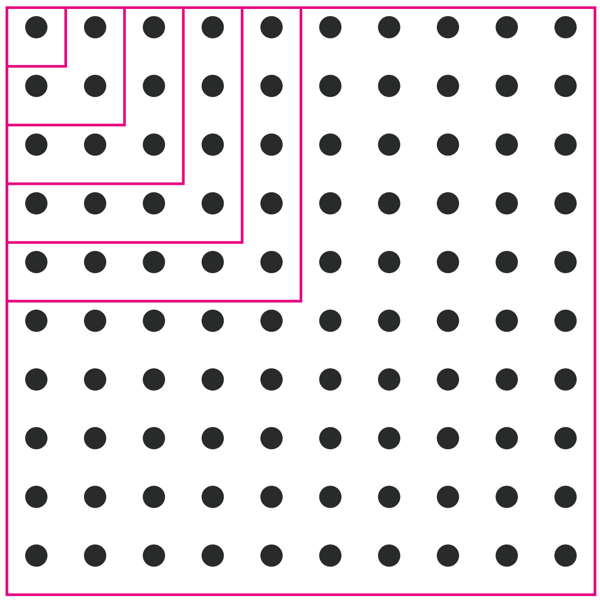
विषम संख्याओं का पूर्ण वर्ग –सम / विषम

सम संख्याओं का पूर्ण वर्ग –सम / विषम

उक्त गतिविधि से हम यह कह सकते हैं कि **सभी सम संख्याओं के वर्ग सम संख्या तथा विषम संख्याओं के वर्ग विषम संख्या ही प्राप्त होती है।**

1. वर्ग संख्याओं के रोचक प्रतिरूप

(i)



चित्र में एक कोने से प्रारम्भ करते हुए विभिन्न आकार के वर्ग बनाए गए हैं। इन वर्गों को ध्यान से देखिए तथा बिन्दुओं की संख्याएँ लिखिए –

पहला वर्ग	1	=	1	=	1^2
दूसरा वर्ग	1+3	=	4	=	2^2
तीसरा वर्ग	1+3+5	=	9	=	3^2
चौथा वर्ग	1+3+5+7	=	....	=	....
पाँचवा वर्ग	1+3+5+7+9	=	....	=	....
छठा वर्ग	....	=	....	=	....
सातवाँ वर्ग	....	=	....	=	....

हमने देखा कि पहला वर्ग = पहली विषम संख्या = 1^2

दूसरा वर्ग = पहली दो विषम संख्याओं का योग = 2^2

तीसरा वर्ग = पहली तीन विषम संख्याओं का योग = 3^2

इसी तरह आगे बढ़ने पर प्रथम आठ विषम संख्याओं का योग = 8^2 = 64 होगा।

2. 1, 11, 111, ... की वर्ग संख्याओं को देखें।

$1^2=1$

$11^2=121$

$111^2=12321$

$1111^2=1234321$

$11111^2=$.........................

$111111^2=$.........................

3. दो क्रमागत संख्याएँ लिखिए, जैसे 4 व 5

उनके वर्ग करें $4^2 = 16,\ 5^2 = 25$

वर्गों का अन्तर $25 - 16 = 9$

संख्याओं का योग $4 + 5 = 9$

ऐसी कुछ और क्रमागत संख्याएँ लिखिए।

आप पाएँगे कि क्रमागत संख्याओं के वर्गों का अन्तर = संख्याओं का योग

4. पाइथागोरियन त्रिक $3^2 + 4^2$

$9 + 16 = 25 = (5)^2$

$6^2 + 8^2$

$36 + 64 = 100 = (10)^2$

आप देखेंगे कि हर उदाहरण में संख्याओं की एक तिकड़ी है प्रत्येक तिकड़ी में बड़ी संख्या का वर्ग शेष दोनों संख्याओं के वर्गों के योग के बराबर है।

इस प्रकार की संख्याएँ **पाइथागोरियन त्रिक** कहलाती है।

ऊपर दिए गए उदाहरण में 3, 4, 5, और 6, 8,10 पाइथोगोरियन त्रिक है।

उदाहरण 1 जाँच कीजिए 9, 40, 41 पाइथोगोरियन त्रिक हैं अथवा नहीं ?

हल $(9)^2 + (40)^2$

$= 81 + 1600$

$= 1681 = (41)^2$

अतः $(9)^2 + (40)^2 = (41)^2$ है अर्थात् 9, 40 व 41 एक पाइथोगोरियन त्रिक है।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?

(i) 24 (ii) 17 (iii) 100 (iv) 55 (v) 111

(vi) 1023 (vii) 5678 (viii) 12796 (ix) 2412

2. नीचे दी गई संख्याओं का वर्ग ज्ञात कीजिए।

(i) 18 (ii) 11 (iii) 107 (iv) 15 (v) 200 (vi) 27

3. निम्न में से कौन–कौन सी संख्याओं का वर्ग सम संख्या होगा।
   (i) 235 (ii) 396 (iii) 5508
   (iv) 2001 (v) 82003 (vi) 10224
4. बिना संक्रिया किए निम्न का योग ज्ञात कीजिए ।
   (i) 1 + 3 + 5 + 7
   (ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13
   (iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19
5. संख्या 64 को आठ विषम संख्याओं के योग के रूप में लिखिए।
6. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के बीच में कितनी संख्याएँ है?
   (i) 10 व 11 (ii) 17 व 18 (iii) 30 व 31
7. जाँच कीजिए कि दी गई तीन संख्याएँ पाइथागोरियन त्रिक है अथवा नहीं।
   (i) 9, 12, 15 (ii) 7, 11, 13 (iii) 10, 24, 26

3.3 वर्गमूल

निम्न संख्याओं के वर्गों पर ध्यान दीजिए–

$(4)^2 = 4 \times 4 = 16$

$(5)^2 = 5 \times 5 = 25$

$(6)^2 = 6 \times 6 = 36$

उपर्युक्त उदाहरणों में हम देखते हैं कि 4 का वर्ग 16 है, इसके विपरीत हम कह सकते हैं कि 16 का वर्गमूल 4 है, इसी प्रकार का 5 का वर्ग 25 है, तो 25 का वर्गमूल 5 होगा। अर्थात् **वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।**

वर्गमूल को " $\sqrt{\ }$ " चिह्न "करणी चिह्न" द्वारा दर्शाते हैं।

जैसे – 81 का वर्गमूल $= \sqrt{81} = 9$

करो और सीखो ◆ तालिका 3.3 देखकर बताइए कि निम्न के वर्गमूल क्या होंगे ?
(i) 49 (ii) 64 (iii) 100

हम पूर्व उदाहरणों में देख चुके है कि 'n' विषम संख्याओं का योग n^2 के बराबर होता है।

जैसे $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

जिस प्रकार पाँच प्रारम्भिक विषम संख्याओं को जोड़कर 5 का वर्ग ज्ञात किया जा सकता है, उसी प्रकार 25 में से विषम संख्याओं को घटाकर 25 का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं, आइए देखें।

$25 - 1 = 24 \quad 24 - 3 = 21 \quad 21 - 5 = 16$

$16 - 7 = 9 \quad 9 - 9 = 0$

यहाँ 25 में से उत्तरोत्तर प्रारम्भिक पाँच विषम संख्याओं को घटाने पर शेषफल शून्य (0) प्राप्त हुआ है, इसका अर्थ हुआ कि 25 का वर्गमूल 5 है। अर्थात् $\sqrt{25} = 5$

आप भी इसी प्रकार कुछ पूर्ण वर्ग संख्याओं का इस प्रक्रिया से वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

3.4 अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना

नीचे कुछ संख्याओं तथा उनके वर्गों के गुणनखण्ड दिए गए हैं।

संख्या	संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड	वर्ग संख्या	वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड
6	2×3	36	$2 \times 2 \times 3 \times 3$
8	$2 \times 2 \times 2$	64	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
12	$2 \times 2 \times 3$	144	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

आप पाएँगे कि संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ही उसके वर्ग के अभाज्य गुणनखण्ड में दो बार आते हैं, जैसे 6 के अभाज्य गुणनखण्ड 2 व 3 हैं तो इसके वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड में 2×2 तथा 3×3 आ रहे हैं।

इसके विपरीत वर्गमूल में अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या उनके वर्ग के अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या की आधी होती है।

आइए हम एक दी गई वर्ग संख्या 144 का वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

हम जानते है कि 144 का अभाज्य गुणनखण्ड

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$$144 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$$

अभाज्य गुणनखण्ड के युग्म बनाने पर हम पाते है :

$$144 = (2 \times 2 \times 3)^2$$

$$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3$$

$$\sqrt{144} = 12$$

इसी तरह संख्या 192 के अभाज्य गुणनखण्ड पर ध्यान दीजिए ।

$$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

यहाँ सारे गुणनखण्ड युग्म में नहीं है। अतः 192 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। यदि इसे पूर्ण बनाना है तो या तो उसे 3 से गुणा करना पड़ेगा या 3 से भाग करना पड़ेगा।

$$192 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$$

$$\sqrt{192 \times 3} = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$\sqrt{576} = 24$$

इसी प्रकार $\dfrac{192}{3} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{3}$

$$\sqrt{\frac{192}{3}} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

उदाहरण 3 संख्या 6400 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

हल

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$$
$$\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$
$$= 80$$

उदाहरण 4 क्या 60 एक पूर्ण वर्ग संख्या है ?

हल

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

अभाज्य गुणनखण्ड में 3 और 5 युग्म में नहीं है। अतः 60 पूर्ण वर्ग संख्या नही है। जिसे यथार्थ रूप में हम इस प्रकार भी देख सकते हैं कि इसमें केवल एक शून्य है।

उदाहरण 5 क्या 1800 एक पूर्ण वर्ग संख्या है। यदि नहीं तो 1800 का सबसे छोटा गुणज प्राप्त कीजिए, जो कि पूर्ण वर्ग संख्या हो तथा नई संख्या का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $1800 = \underline{2 \times 2} \times 2 \times \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5}$

अभाज्य गुणनखण्ड के अनुसार 2 के युग्म नहीं हैं, अतः 1800 एक पूर्ण वर्ग नहीं है। यदि 2 का एक जोड़ा और बनाते हैं तब संख्या पूर्ण वर्ग हो जाएगी। अतः 1800 का 2 से गुणा करने पर हम पाएँगे।

$$1800 \times 2 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5}$$

अब प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड युग्म में है अतः

$1800 \times 2 = 3600$ पूर्ण वर्ग संख्या है।

$$\sqrt{3600} = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$= 60$$

उदाहरण 6 सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 6, 9, 15 प्रत्येक संख्या से विभाजित हो जाए।

हल इसे दो चरणों में हल करेंगे पहले 6, 9 व 15 से विभाजित संख्या के लिए ल.स. ज्ञात करेंगे तत्पश्चात् ल.स. का वह गुणज ज्ञात करेंगे जो पूर्ण वर्ग हो –

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

6, 9, 15 का ल.स. $2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 90$

चूंकि 90 के गुणनखण्ड युग्मों में नहीं हैं।

अतः युग्म बनाने के लिए 2 व 5 से गुणा करना होगा।

$90 \times 2 \times 5 = 2 \times \underline{2} \times 3 \times 3 \times 5 \times \underline{5}$

अतः 900 सबसे छोटी वर्ग संख्या है, जो 6, 9, 15 से विभाजित होती है।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल में इकाई का अंक क्या हो सकता है?
   (i) 9604 (ii) 65536 (iii) 998001 (iv) 60481729
2. अनुमान लगाकर बताइए निम्नलिखित में कौन–2 सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती है?
   (i) 48 (ii) 81 (iii) 102 (iv) 24636
3. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
   (i) 1296 (ii) 729 (iii) 1764 (iv) 3969 (v) 4356 (vi) 1600
4. नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं है। वह सबसे छोटी पूर्ण संख्या बताइए जिससे गुणा करने पर ये पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी।
   (i) 252 (ii) 396 (iii) 1620
5. नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं है। अभाज्य गुणनखण्ड करके पता लगाएँ कि इनमें किस संख्या का भाग दिया जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी ?
   (i) 1000 (ii) 867 (iii) 4375
6. एक वर्गाकार बाग में गुलाब के पौधे लगाए जाने हैं। प्रत्येक पंक्ति में पौधों की संख्या उतनी है, जितनी की पंक्तियों की संख्या। यदि बाग में 2401 पौधे लगे हों तो उसमें पंक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. वह सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 4, 9 व 10 से पूर्णतः विभाजित हो।

3.5 भागफल विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

जब संख्याएँ बहुत बड़ी हो तब अभाज्य गुणनखण्ड विधि लम्बी तथा बोझिल हो जाती है। इसके लिए हम भाग विधि का उपयोग कर वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 7 संख्या 576 का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्न चरणों पर विचार कीजिए।

हल **चरण 1** इकाई स्थान से प्रारम्भ करते हुए 2–2 अंकों का जोड़ा बनाएँगे।
जैसे 576 में $\overline{5}\ \overline{76}$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ & -4 \\ & 1 \end{array}$$

चरण 2 वह सबसे बड़ी संख्या चुनिए जिसका वर्ग सबसे बाईं ओर की संख्या के बराबर अथवा छोटा हो।
अतः हमें 5 से छोटी वर्ग संख्या ढूँढ़नी है, जो कि 2 है

$$(2)^2 < 5 < (3)^2$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ +2 & -4 \\ 4 & 176 \end{array}$$

उस संख्या को भागफल के रूप में ऊपर तथा उसके वर्ग को 5 के नीचे लिखकर घटाएँ ।

चरण 3 पुनः शेषफल के आगे अंकों का अगला जोड़ा लिखें। जैसे भाग की संक्रिया में करते हैं। (ध्यान रहे भाग में केवल 1 अंक लिखा जाता है, जबकि वर्गमूल में जोड़ा लिखा जाता है।)

चरण 4 भाजक को उसी संख्या में जोड़कर नीचे लिखिए ।

चरण 5 उक्त उदाहरण में भाजक 4 के आगे रिक्त स्थान में एक अंक (0 से 9 के मध्य कोई एक) लिखना होगा जिससे हमारा भाजक (40, 41, 42, ... 49) तक हो सकता है साथ ही हमें वही अंक भागफल (0 से 9) में मिलेगा जिसे भागफल में 2 के आगे लिखेंगे। नए भाजक तथा इस अंक (0 से 9) का गुणनफल ऐसी संख्या होनी चाहिए, जो हमारे भाज्य 176 के बराबर या उससे छोटी हो।

$$\begin{array}{r|l} & 2\ 4 \\ 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ +2 & 4 \\ 44 & 176 \\ 4 & 176 \\ & 0 \end{array}$$

चरण 6 इस स्थिति में $44 \times 4 = 176$ है। अब चूँकि शेषफल 0 है तथा दी गई संख्या में कोई अंक शेष नहीं है, अतः 576 = 24 प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 संख्या 7056 का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

हल **चरण 1** इकाई से प्रारम्भ करते हुए दो–दो संख्या के जोड़े बनाएँगे। $\overline{70}\ \overline{56}$

$$\begin{array}{r|l} & \overline{70}\ \overline{56} \end{array}$$

चरण 2 उस सबसे बड़ी संख्या का चयन करते हैं, जिसका वर्ग 70 के बराबर अथवा उससे कम हो –

$$(8)^2 < 70 < (9)^2$$

इस संख्या को भाजक में तथा इसके वर्ग 64 को 70 के नीचे लिखते हैं।

चरण 3 भाजक 8 को पुनः 8 जोड़कर लिखा जाता है और नया भाजक 16 प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ +8 & 64 \\ 16 & 6 \end{array}$$

चरण 4 अब संख्याओं का अगला जोड़ा 56 उतारते हैं। अब हमें नया भाज्य 656 प्राप्त होता है।

	8
8	$\overline{70}\ \overline{56}$
+ 8	64
16_	6 56

चरण 5 पुनः भाजक (16) में रिक्त स्थान हेतु एक अंक (0–9 के मध्य) का चयन करना होगा, जो (160, 161,....169) तक हो सकती है, तथा उसे उसी अंक से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल 656 से कम अथवा उसके बराबर हो।

	8
8	$\overline{70}\ \overline{56}$
+ 8	64
164	6 56
4	- 6 56
	0 00

जो कि उक्त उदाहरण में 4 होगी, क्योंकि 164 × 4 = 656 प्राप्त होगा।

अतः 7056 = 84 प्राप्त होगा।

उदाहरण 9 एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 1089 मी^{2} है तो मैदान की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = 1089 मी^{2}

इसलिए मैदान की भुजा = $\sqrt{1089}$

अतः = $\sqrt{1089}$ = 33 मी

अतः मैदान की भुजा = 33 मी

	3 3
3	$\overline{10}\ \overline{89}$
3	9
63	1 89
3	1 89
	0

उदाहरण 10 वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको 1989 में से घटाने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए तथा उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

हल आइए 1989 का वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास करते हैं –

	4 4
4	$\overline{19}\ \overline{89}$
+ 4	16
84	3 89
+4	3 36
	53

यहाँ हम देखते है कि 1989 पूर्ण वर्ग संख्या से 53 अधिक है।

अतः 1989 में से 53 घटाने पर हमें पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाएगी।

1989 – 53 = 1936

जिसका वर्ग मूल $\sqrt{1936}$ = 44 होगा।

> इसी प्रकार यदि हमें वह संख्या ज्ञात करनी है जिसे 1989 में जोड़ने से पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो तो हम 44 के स्थान पर 45 के वर्ग पर विचार करेंगे जो की 45^2 = 2025 है। अतः हमें **2025** – 1989 = 36 जोड़ना होगा

उदाहरण 11 चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए, जो पूर्ण वर्ग हो।

हल हम जानते हैं कि चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9999 है। भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। शेषफल 198 है यह दर्शाता है कि 99^2, 9999 से 198 कम हो।

अतः अभीष्ट संख्या $9999 - 198 = 9801$

$$\begin{array}{r|l} & 9\,9 \\ \hline 9 & \overline{99}\,\overline{99} \\ +9 & 81 \\ \hline 189 & 18\,99 \\ 9 & 17\,01 \\ \hline & 1\,98 \end{array}$$

3.6 दशमलव संख्या का वर्गमूल

उदाहरण 12 संख्या $\sqrt{51.84}$ पर विचार कीजिए।

हल **चरण 1** दशमलव संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए भी दो–दो अंकों के जोड़े बनाएँगे। चूँकि किसी भी दशमलव संख्या में दो भाग होते है पूर्ण भाग एवं दशमलव भाग। पूर्ण भाग में जोड़े वैसे ही बनेंगे, जैसे उपर्युक्त उदाहरणों में बनाए गए है इकाई स्थान से। परन्तु दशमलव भाग में ये जोड़े दशांश से बनेंगे अर्थात दशांश व शतांश एक जोड़ा, हजारवाँ व दस हजारवाँ एक साथ एवं इसी प्रकार आगे भी।

ऊपर के उदाहरण में $\overline{51}$ व $\overline{84}$ के जोड़े बनेंगे।

चरण 2 पूर्व की भाँति ही एक संख्या चुनेंगे, जिसका वर्ग 51 से कम या बराबर हो। $7^2 < 51 < 8^2$ इसे भाजक व भागफल दोनों में लिखेंगे।

$$\begin{array}{r|l} & 7 \\ \hline 7 & \overline{51}.\overline{84} \\ 7 & 49 \\ \hline & 284 \end{array}$$

चरण 3 7 को 7 से गुणा कर भाज्य के नीचे लिखेंगे व 7 को 7 में जोड़कर भाजक वाले कॉलम में लिखेंगे।

चरण 4 शेषफल 2 है। अगली बार नीचे की संख्या में 84 शेषफल के दाएँ लिखेंगे। जिससे 284 प्राप्त होता है। क्योंकि 84 दशमलव भाग में था, अतः भागफल में दशमलव रखेंगे।

$$\begin{array}{r|l} & 7.2 \\ \hline 7 & \overline{51}.\overline{84} \\ 7 & 49 \\ \hline 142 & 284 \\ 2 & 284 \\ \hline 144 & 0\,00 \end{array}$$

चरण 5 अब 14 को आगे रिक्त स्थान में पूर्व की भाँति 0 से 9 के बीच की संख्या चुनेंगे। जिससे नया भाजक (140, 141, ... 149) तक बने और उसे उसी संख्या से गुणा करने पर 284 से बड़ी संख्या प्राप्त न हो।

यह हमारे भागफल को दर्शाता है।

उक्त उदाहरण में वह संख्या 2 होगी, जिससे $142 \times 2 = 284$ ।

अतः $\sqrt{51.84} = 7.2$

किस तरफ बढ़ें

संख्या 176.341 पर ध्यान दीजिए। पूर्ण संख्या और दशमलव संख्या के दोनों भागों पर बार लगाइए। अब 176 पर ध्यान दीजिए हम दशमलव के पास के इकाई स्थान से प्रारम्भ करके बाईं तरफ जाते है, प्रथम बार 76 के ऊपर और दूसरा बार 1 के ऊपर है, 0.341 के लिए हम दशमलव से प्रारम्भ करके दाईं तरफ जाते है।

पहला बार 34 के ऊपर और दूसरा बार लगाने के लिए हम 1 के बाद 0 रखते है और इस प्रकार $0.\overline{34}\ \overline{10}$ बनाते हैं।

3.7 वर्गमूल का अनुमान लगाना

(i) वर्गमूल में अंकों की संख्या

निम्न सारणी पर विचार कीजिए –

$1^2 = 1$	$99^2 = 9801$
$9^2 = 81$	$100^2 = 10000$
$10^2 = 100$	$999^2 = 9898001$

1 अंक वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? 1 अथवा 2

2 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? 3 अथवा 4

3 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? ....

इसके विपरित 1 अंक वाली संख्या के वर्गमूल में 1 अंक होगा। जबकि दो अंकों वाली संख्या के वर्गमूल में 1 अथवा 2 अंक होंगे। इसी प्रकार आगे भी।

करो और सीखो

बताइए निम्न संख्याओं के वर्गमूल में कितने अंक होंगे?

(i)1369 (ii)15376 (iii) 6031936

कई बार हमें दैनिक जीवन में वर्गमूल निकालने की आवश्यकता होती है।

एक विद्यालय में 350 बच्चे है स्वतंत्रता दिवस समारोह में उन्हें वर्गाकार जमावट में खड़ा करना है तथा शेष विद्यार्थी व्यवस्था देखेंगे। ऐसे में हमें पूर्ण वर्ग संख्या का अनुमान लगाने की आवश्यकता होगी। हम जानते है कि $100 < 350 < 400$ और

$\sqrt{100} = 10$ तथा $\sqrt{400} = 20$

अतः $10 < \sqrt{350} < 20$ लेकिन फिर भी हम वर्ग संख्या के करीब नहीं है। हम जानते हैं कि

$18^2 = 324$ व $19^2 = 361$

अतः $18 < \sqrt{350} < 19$

अतः $\sqrt{350}$ में हम 18 छात्रों की पक्तियाँ बनवा सकते हैं।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।
   (i) 441 (ii) 576 (iii)1225 (iv) 2916 (v) 4624 (vi) 7921
2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल बिना गणना के ज्ञात कीजिए।
   (i)121 (ii) 256 (iii) 4489 (iv) 60025
3. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
   (i) 6.25 (ii) 2.89 (iii) 32.49 (iv) 31.36 (v) 57.76
4. निम्न संख्याओं में क्या जोड़ा जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।
   (i) 420 (ii) 2000 (iii) 837 (iv) 3500
5. निम्न संख्याओं में से क्या घटाया जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।
   (i) 555 (ii) 252 (iii) 1650 (iv) 6410
6. एक विवाह समारोह में वर्गाकार जमावट में कुर्सियाँ लगायी जानी है। 1000 कुर्सियाँ उपलब्ध है। वर्गाकार जमावट के लिए और कितनी कुर्सियों की आवश्यकता होगी। साथ ही यह भी बताएँ, प्रत्येक पक्ति में कुल कितनी कुर्सियाँ होंगी।
7. एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 361 मी ^{2} है तो उस खेत के चारों और तारबंदी हेतु कितने मीटर तार की आवश्यकता होगी ?
8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसका 2352 में भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग बन जाए ?

हमने सीखा

1. साधारणतया यदि एक संख्या m को n^2 से व्यक्त किया जाए (जहाँ m एवं n दोनों प्राकृत संख्याएँ हो) तो m एक वर्ग संख्या होती है। जैसे $n = 5$ एवं $m = 5^2 = 25$ ।
2. वे संख्याएँ जिनके इकाई का अंक 2, 3, 7, 8 हो वे कभी वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती अर्थात् सभी वर्ग संख्याओं में इकाई का अंक सदैव 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होता है।
3. वर्ग संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या केवल सम होती है।
4. वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।
5. एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल होते हैं एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक। धनात्मक वर्गमूल को संकेत $\sqrt{}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

अध्याय 4

परिमेय संख्याएँ

4.1 हमने आसपास की वस्तुओं को गिनने से प्रारम्भ कर संख्याओं को सीखा है। गिनने में प्रयोग की गई संख्याओं को प्राकृत संख्याएँ कहा गया। 1, 2, 3, 4, 5, ... प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याएँ प्राप्त हुई। इसके बाद 0, 1, 2, 3, 4, ... पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मक को सम्मिलित करने पर हमें पूर्णांक .... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... प्राप्त होते हैं। इस प्रकार हमने संख्या पद्धति का पूर्णांक तक विस्तार किया।

2 1 3 7 4 5 1000 -------------

प्राकृत संख्या

0 1 4 2 3 6 5 7 2316 ------------

पूर्ण संख्याएँ

-3 -2 -1 0 1 2 3 -------------

पूर्णांक

पिछली कक्षाओं में हम भिन्नों से भी परिचित हुए हैं। इस इकाई में हम संख्या पद्धति का और आगे विस्तार करेंगे। हम परिमेय संख्याओं की अवधारणा के बारे में जानकारी, परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण, उनकी तुलना और दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ ज्ञात करना सीखेंगे।

4.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

हम पढ़ चुके हैं कि विपरीत स्थितियों को व्यक्त करने के लिए पूर्णांकों का उपयोग किया जाता है।

उदाहरण 1 यदि 250 रु. के लाभ को +250 से व्यक्त किया जाए, तो 250 रु. की हानि को –250 से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 2 समुद्र तल से किसी स्थान की ऊँचाई 800 मी. को हम $\frac{4}{5}$ किमी से व्यक्त करें तो समुद्र तल से 800 मी. की गहराई को $-\frac{4}{5}$ किमी से व्यक्त किया जा सकता है।

हम समझ सकते हैं कि $-\frac{4}{5}$ न तो एक पूर्णांक है और न ही एक भिन्न। ऐसी संख्याओं को परिभाषित करने के लिए हमें संख्या पद्धति को विस्तार देने की आवश्यकता है।

4.3 परिमेय संख्याएँ क्या है?

परिमेय शब्द की उत्पत्ति अनुपात से हुई है। हम जानते हैं कि अनुपात 2 : 5 को $\frac{2}{5}$ भी लिखा जा सकता है। यहाँ 2 और 5 प्राकृत संख्याएँ हैं। परन्तु $\frac{-2}{5}$ को –2 : 5 में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। कोई भी दो पूर्णांकों p और q (जहाँ $q \neq 0$) को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है। परिमेय संख्याएँ इसी रूप में व्यक्त की जाती है।

एक परिमेय संख्या को ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है।

इस प्रकार, $\frac{3}{7}$ एक परिमेय संख्या है। यहाँ $p = 3$ और $q = 7$ है।

सोचिए और बताइए – क्या $\frac{-3}{7}$ एक परिमेय संख्या है?

4.4 भिन्न और परिमेय संख्याएँ

अलग–अलग भिन्न यथा $\frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{4}{9}, 1\frac{3}{5},$ .... इत्यादि लिखिए।

प्रत्येक की $\frac{p}{q}$ से तुलना कीजिए।

$\frac{3}{8}$ में $p = 3; q = 8$

$\frac{7}{11}$ में $p = 7; q = 11$

भिन्नों के अन्य उदाहरण लेकर उनके रूप की $\frac{p}{q}$ से तुलना कीजिए। हम पाते हैं कि प्रत्येक भिन्न का रूप $\frac{p}{q}$ जैसा है, जहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ । इससे हम कह सकते हैं कि ये सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं।

करो और सीखो

परिमेय संख्याओं को लिखिए जिनमें –

1. अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक हो और हर एक धनात्मक पूर्णांक हो।
2. अंश एक धनात्मक पूर्णांक हो और हर एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।
3. अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक हो।
4. अंश और हर दोनों ऋणात्मक पूर्णांक हो।

- क्या पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ है?

किसी भी पूर्णांक को एक परिमेय संख्या माना जा सकता है। उदाहरणार्थ पूर्णांक –3 एक परिमेय संख्या है, क्योंकि आप इसे $\frac{-3}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं। पूर्णांक 0 को भी $0 = \frac{0}{1}$ या $\frac{0}{2}$ इत्यादि के रूप में लिखा जा सकता है। अतः 0 भी एक परिमेय संख्या है।

- शून्य एक परिमेय संख्या है।
- संख्या शून्य न तो धनात्मक परिमेय संख्या हैं, न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या।
- परिमेय संख्याओं में पूर्णांक और भिन्न सम्मिलित है।

सोचें! क्या $\frac{-3}{-5}$ एक परिमेय संख्या है ?

सभी परिमेय संख्याएँ भिन्न नहीं होती हैं, परन्तु प्रत्येक भिन्न परिमेय संख्या होती है।

परिमेय संख्या $\frac{-2}{-9}$ भिन्न नहीं है। जबकि $\frac{-2}{-9}$ का दूसरा रूप $\frac{2}{9}$ भिन्न है।

4.5 समतुल्य परिमेय संख्याएँ

किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को समान संख्या से गुणा करके अथवा भाग देकर इन्हें इच्छित अंश अथवा हर में बदल सकते हैं।

परिमेय संख्या $\frac{-5}{7}$ पर विचार कीजिए –

$$\frac{-5}{7} = \frac{(-5)\times 2}{7\times 2} = \frac{-10}{14}$$

$$\frac{-5}{7} = \frac{(-5)\times 3}{7\times 3} = \frac{-15}{21}$$

$$\frac{-5}{7} = \frac{(-5)\times(-2)}{7\times(-2)} = \frac{10}{-14}$$

इस प्रकार $\frac{-5}{7} = \frac{-10}{14} = \frac{-15}{21} = \frac{10}{-14}$ है।

ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हो, एक दूसरे के समतुल्य या तुल्य कही जाती है।

$$\frac{10}{-15} = \frac{10\div 5}{-15\div 5} = \frac{2}{-3}$$

$$\frac{10}{-15} = \frac{10\div(-5)}{(-15)\div(-5)} = \frac{-2}{3}$$

इस प्रकार $\frac{10}{-15} = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$ समतुल्य हैं।

करो और सीखो

रिक्त स्थानों को भरिए –

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{12} = \frac{10}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{24}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{\ldots\ldots}{14} = \frac{25}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{63} = \frac{100}{\ldots\ldots}$$

$$\frac{25}{50} = \frac{\ldots\ldots}{10} = \frac{1}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{150} = \frac{250}{\ldots\ldots}$$

4.6 धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्याओं $\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}$ और $\frac{2}{9}$ के अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हैं। ऐसी परिमेय संख्या को धनात्मक परिमेय संख्या कहते हैं।

ऐसी परिमेय संख्याएँ जिनमें अंश अथवा हर कोई एक ऋणात्मक पूर्णांक हैं, ऐसी परिमेय संख्या को ऋणात्मक परिमेय संख्या कहते हैं। जैसे – $\frac{-3}{7}, \frac{4}{-5}, -\frac{1}{3}$ आदि।

आप $\frac{-5}{-7}$ के बारे में क्या सोचते हैं?

$$\frac{-5}{-7} = \frac{5 \times (-1)}{7 \times (-1)} = \frac{5}{7}$$

अतः $\frac{-5}{-7}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है।

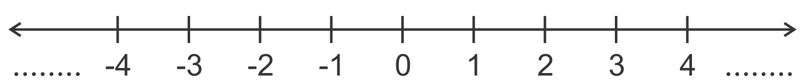
करो और सीखो

1. तीन धनात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।
2. दो ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।
3. क्या $\frac{-15}{-1}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है? (उत्तर की पुष्टि में कारण बताएँ)
4. क्या –7 एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है ? (उत्तर की पुष्टि में कारण बताएँ)
5. निम्नलिखित में से कौन सी धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं?

   (i) $\frac{-4}{5}$ (ii) $\frac{-7}{-9}$ (iii) $1\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{3}{-7}$ (v) $\frac{1}{3}$

4.7 एक संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ

हम संख्या रेखा पर पूर्णांकों को निरूपित करना सीख चुके हैं। आइए ऐसी ही संख्या रेखा को देखें –

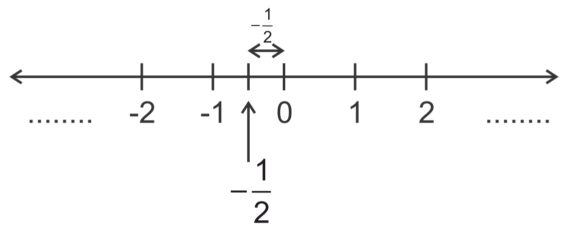


संख्या रेखा में शून्य के दाईं ओर धनात्मक पूर्णांक हैं जिन्हें '+' चिह्न से व्यक्त करते हैं। शून्य के बाईं ओर ऋणात्मक पूर्णांक हैं, जिन्हें '–' चिह्न से व्यक्त करते हैं।

पूर्व की कक्षाओं में संख्या रेखा पर भिन्नों का निरूपण कर चुके हैं।

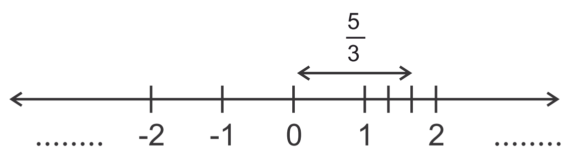
आइए अब हम संख्या रेखा पर परिमेय संख्या $-\frac{1}{2}$ को निरूपित करें।

चूंकि $-\frac{1}{2}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है, इसलिए इसका स्थान 0 (शून्य) के बाईं ओर होगा। $-\frac{1}{2}$ संख्या रेखा के 0 और –1 के बीच होगा।

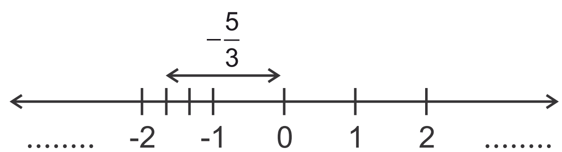


अतः 0 और –1 के बीच दो बराबर–बराबर भाग करते हैं। फिर 0 और –1 के ठीक बीच में $-\frac{1}{2}$ अंकित करते हैं।

हम जानते हैं कि $\frac{5}{3}$ को संख्या रेखा पर किस प्रकार अंकित किया जाता है। 0 के दाईं ओर 1 और 2 के बीच में तीन बराबर–बराबर भाग करते हैं और 1 के दाईं ओर से दूसरा भाग $\frac{5}{3}$ को निरूपित करता है।



आइए अब संख्या रेखा पर $\frac{-5}{3}$ को निरूपित करते हैं। यह 0 के बाईं ओर उतनी ही दूरी पर अंकित होगा, जितनी दूरी 0 और $\frac{5}{3}$ के बीच है।



करो और सीखो

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाइए –

(i) $-\frac{5}{4}$ (ii) $-\frac{7}{2}$ (iii) $-\frac{11}{3}$ (iv) $\frac{2}{5}$ (v) $\frac{4}{3}$

4.8 सरलतम रूप में परिमेय संख्याएँ

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को ध्यान से देखिए –

$\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{-2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{-9}{11}$

इन सभी परिमेय संख्याओं में –

(i) हर धनात्मक पूर्णांक है, तथा

(ii) अंश और हर के बीच में केवल 1 उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है।

ऐसी परिमेय संख्याओं को सरलतम रूप में व्यक्त की गई परिमेय संख्याएँ कहा जाता है।

प्रत्येक परिमेय संख्या को सरलतम रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 3 $\frac{-36}{24}$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

हल $$\frac{-36}{24} = \frac{-36 \div 3}{24 \div 3} = \frac{-12}{8} = \frac{-12 \div 4}{8 \div 4} = \frac{-3}{2}$$

अथवा $$\frac{-36}{24} = \frac{-36 \div 12}{24 \div 12} = \frac{-3}{2}$$

$\frac{-36}{24}$ का सरलतम रूप $\frac{-3}{2}$ है।

करो और सीखो

निम्नलिखित को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए –

(i) $\frac{3}{15}$ (ii) $\frac{-6}{20}$ (iii) $\frac{10}{-35}$ (iv) $\frac{-45}{30}$ (v) $\frac{18}{-45}$

4.9 परिमेय संख्याओं की तुलना

हम जानते हैं कि दो पूर्णांकों या दो भिन्नों की तुलना किस प्रकार की जाती है तथा यह भी कि इनमें कौन बड़ा है और कौन छोटा है। आइए अब हम दो परिमेय संख्या की तुलना करते हैं –

$\frac{5}{7}$ और $\frac{7}{9}$ जैसी दो धनात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना ठीक उसी प्रकार की जा सकती है, जैसा कि हम भिन्नों की तुलना में कर चुके हैं।

आइए दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं $\frac{-1}{4}$ और $\frac{-1}{3}$ की तुलना संख्या रेखा पर करके देखें।

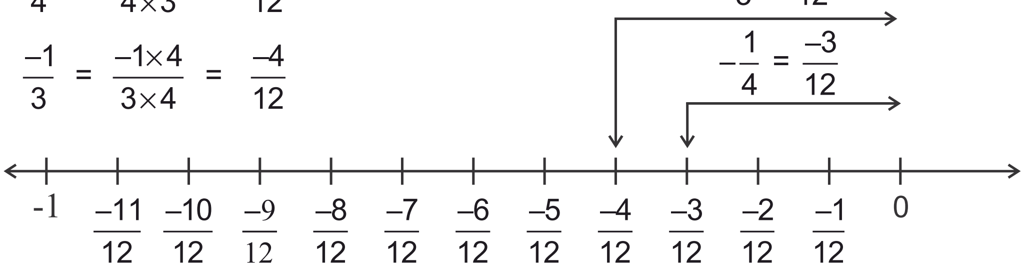
हमने पूर्णांक संख्याओं की तुलना के संदर्भ में देखा है कि संख्या रेखा पर दाईं तरफ का पूर्णांक बाईं तरफ के पूर्णांक से बड़ा होता है। उसी प्रकार $\frac{-1}{4}$ और $\frac{-1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करके तुलना की जा सकती है। दोनों की ऐसी तुल्य परिमेय संख्या लीजिए, जिनके हर समान हो। जैसे –

$$\frac{-1}{4} = \frac{-1\times 3}{4\times 3} = \frac{-3}{12}$$

$$\frac{-1}{3} = \frac{-1\times 4}{3\times 4} = \frac{-4}{12}$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{-4}{12}$$

$$-\frac{1}{4} = \frac{-3}{12}$$



चूंकि संख्या रेखा पर $\frac{-1}{4}$, $\frac{-1}{3}$ के दाईं तरफ है। अतः $\frac{-1}{4}$, $\frac{-1}{3}$ से बड़ा होगा।

$$-\frac{1}{4} > -\frac{1}{3}$$

जबकि भिन्नों के अध्ययन से हमने यह जाना है कि

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

करो और सीखो

आप भी $\frac{-3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ की तथा $-\frac{1}{3}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना कीजिए।

ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के युग्मों की स्थिति भी ठीक इसी प्रकार है। दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए, हम उनकी तुलना उनके चिह्नों को छोड़ते हुए करते है और बाद में असमिका के चिह्न को उल्टा कर (बदल) देते हैं।

जैसे – $-\frac{3}{7}$ और $-\frac{5}{9}$ की तुलना करने के लिए पहले हम $\frac{3}{7}$ और $\frac{5}{9}$ की तुलना करते हैं।

$\frac{3 \times 9}{7 \times 9} = \frac{27}{63}$, $\frac{5 \times 7}{9 \times 7} = \frac{35}{63}$ अतः $\frac{27}{63} < \frac{35}{63}$

या $\frac{3}{7} < \frac{5}{9}$ इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $-\frac{3}{7} > -\frac{5}{9}$ है।

करो और सीखो

कौनसी परिमेय संख्या बड़ी है ?

1. $-\frac{3}{8}$ या $-\frac{2}{7}$
2. $-\frac{7}{5}$ या $-\frac{5}{3}$
3. $-\frac{5}{6}$ या $-\frac{7}{8}$

एक ऋणात्मक और धनात्मक परिमेय संख्या की तुलना सुस्पष्ट है। संख्या रेखा पर एक ऋणात्मक परिमेय संख्या शून्य के बाईं ओर स्थित होती है तथा एक धनात्मक परिमेय संख्या शून्य के दाईं ओर स्थित होती है। अतः एक ऋणात्मक परिमेय संख्या सदैव एक धनात्मक परिमेय संख्या से छोटी होती है।

इस प्रकार $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$

$-\frac{3}{5} < \frac{1}{5}$

$-\frac{9}{4} < \frac{3}{2}$

परिमेय संख्याओं $\frac{-4}{-7}$ और $\frac{-3}{-5}$ की तुलना करने के लिए पहले उन्हें मानक रूप में बदलने के बाद तुलना करते हैं।

$\frac{-4}{-7}$ और $\frac{-3}{-5}$ का मानक रूप क्रमशः $\frac{4}{7}$ और $\frac{3}{5}$ है।

अब $\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$

करो और सीखो

क्या $\frac{4}{-9}$ और $\frac{-20}{45}$ एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते है?

4.10 दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ

हम जानते हैं कि 5 और 12 के बीच की पूर्णांक संख्याएँ 6, 7, 8, 9, 10, 11 है। –3 और 3 के बीच की पूर्णांक संख्याएँ –2, –1, 0, 1, 2 है। इस प्रकार दो पूर्णांकों के बीच में पूर्णांकों की संख्या सीमित होती है।

क्या यह परिमेय संख्याओं की स्थिति में भी होता है ? इसे उदाहरण द्वारा देखते हैं।

किरण ने दो परिमेय संख्याएँ $-\frac{4}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ ली।

इन्हें समान हर वाली परिमेय संख्याओं में बदल लिया।

अतः $-\frac{4}{3} = -\frac{8}{6}$ और $-\frac{1}{2} = -\frac{3}{6}$

उसने $-\frac{8}{6}$ और $-\frac{3}{6}$ के बीच की परिमेय संख्याएँ लिखी –

$$-\frac{7}{6} < -\frac{6}{6} < -\frac{5}{6} < -\frac{4}{6}$$

इस प्रकार उसने $-\frac{4}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ के बीच में परिमेय संख्याएँ $-\frac{7}{6}, -\frac{6}{6}, -\frac{5}{6}, -\frac{4}{6}$ ज्ञात की।

सोचें! क्या $-\frac{4}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ के बीच में केवल परिमेय संख्याएँ $-\frac{7}{6}, -\frac{1}{1}, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}$ ही हैं?

आइए देखते हैं –

$$-\frac{4}{3} = -\frac{8}{6} = -\frac{16}{12} \text{ और } -\frac{1}{2} = -\frac{3}{6} = -\frac{6}{12}$$

अब $-\frac{16}{12}$ और $-\frac{6}{12}$ के बीच की परिमेय संख्याएँ –

$$-\frac{15}{12} < -\frac{14}{12} < -\frac{13}{12} < -\frac{12}{12} < -\frac{11}{12} < -\frac{10}{12} < -\frac{9}{12} < -\frac{8}{12} < -\frac{7}{12}$$

या $-\frac{5}{4} < -\frac{7}{6} < -\frac{13}{12} < -\frac{1}{1} < -\frac{11}{12} < -\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < -\frac{2}{3} < -\frac{7}{12}$

इस प्रकार हम $-\frac{4}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ के बीच पाँच और परिमेय संख्याएँ $-\frac{5}{4}, -\frac{13}{12}, -\frac{11}{12}, -\frac{3}{4}$, $-\frac{7}{12}$ ज्ञात करने में सफल हुए।

इस विधि का प्रयोग करते हुए हम दो परिमेय संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी (असीमित) परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

करो और सीखो

(i) $-\frac{5}{7}$ और $-\frac{3}{8}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(ii) $-\frac{5}{3}$ और $-\frac{8}{7}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 5 परिमेय संख्याएँ –2 और –1 के बीच की दो परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल सर्वप्रथम हम –2 और –1 को समान हर वाली परिमेय संख्या के रूप में लिखते हैं।

$-2 = -\frac{10}{5}$ और $-1 = -\frac{5}{5}$

अब $-\frac{10}{5}$ और $-\frac{5}{5}$ के बीच की परिमेय संख्याएँ $-\frac{9}{5} < -\frac{8}{5} < -\frac{7}{5} < -\frac{6}{5}$ हैं।

अतः –2 और –1 के बीच की दो परिमेय संख्याएँ $-\frac{8}{5}$ और $-\frac{7}{5}$ हैं।

(हम $-\frac{9}{5}$, $-\frac{8}{5}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{6}{5}$ में से कोई भी दो परिमेय संख्याएँ ले सकते हैं।)

प्रश्नावली 4

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के समतुल्य पाँच–पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

   (i) $-\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{-5}{3}$ (iv) $\frac{4}{-9}$

2. $\frac{-5}{12}$ की तीन ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनका हर क्रमशः 60, –96 व 108 हो।

3. $\frac{-3}{7}$ की तीन ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनका अंश क्रमशः 24, –60 व 75 हो।

4. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके सरलतम रूप (मानक रूप) में लिखिए।

   (i) $\frac{-18}{30}$ (ii) $\frac{44}{-72}$ (iii) $\frac{55}{22}$ (iv) $\frac{-16}{20}$

5. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

   (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{-8}{3}$ (iv) $-2\frac{1}{2}$ (v) $\frac{5}{7}$

6. संकेतों >, < और = में से सही संकेत चुन कर रिक्त स्थान भरिए।

   (i) $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{-1}{4}$ ☐ $\frac{1}{-3}$ (iii) $\frac{-3}{5}$ ☐ $\frac{-1}{3}$

   (iv) $\frac{2}{7}$ ☐ $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{-1}{2}$ ☐ $\frac{1}{-2}$ (vi) $\frac{-5}{4}$ ☐ $\frac{3}{5}$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(i) -3 और -1 (ii) 0 और -1 (iii) $\frac{-4}{5}$ और $\frac{-5}{7}$

(iv) $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ (v) $\frac{2}{5}$ और $\frac{-4}{5}$ (vi) -2 और 0

8. निम्नलिखित प्रत्येक प्रतिरूप में तीन और परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(i) $\frac{-2}{5}, \frac{-4}{10}, \frac{-6}{15}$, ___ , ___ , ___ (ii) $\frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}$, ___ , ___ , ___

(iii) $\frac{1}{-3}, \frac{2}{-6}, \frac{3}{-9}$, ___ , ___ , ___ (iv) $\frac{1}{-5}, \frac{2}{-10}, \frac{3}{-15}$, ___ , ___ , ___

9. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}$ (iii) $\frac{-7}{11}, \frac{7}{15}, 0, -2, \frac{-2}{15}$ (iv) $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{1}{6}, \frac{5}{9}$

10. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{9}{-24}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{-12}, \frac{-7}{16}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{-8}{9}, \frac{-11}{12}$ (iii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{4}{-3}$ (iv) $\frac{3}{5}, \frac{-17}{-30}, \frac{-7}{10}, \frac{8}{-15}$

हमने सीखा

1. परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जाता है, यहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ ।
2. सभी भिन्न संख्याएँ एवं पूर्णांक परिमेय संख्याएँ होती है। संख्याएँ $\frac{7}{8}, \frac{-2}{3}, 5$ इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।
3. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को किसी एक ही पूर्णांक (शून्य के अतिरिक्त) से गुणा किया जाए या भाग दिया जाए, तो प्राप्त होने वाली परिमेय संख्या को समतुल्य परिमेय संख्या कहा जाता है, जैसे $\frac{5}{6} = \frac{5\times3}{6\times3} = \frac{15}{18}$
4. परिमेय संख्याओं को धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के रूप में वर्गीकृत किया जाता है। जब अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हो या ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो यह परिमेय संख्या धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। जब अंश या हर में से एक ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो वह परिमेय संख्या एक ऋणात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{2}{3}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा $-\frac{2}{3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
5. संख्या 0 एक परिमेय संख्या है, किन्तु यह न तो धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या।
6. दो परिमेय संख्याओं के मध्य असीमित परिमेय संख्याएँ होती हैं।

अध्याय 5

घात और घातांक

5.1 रवि ने मोहन से प्रश्न किया कि बताओ 2011 में भारत की जनसंख्या कितनी थी ? उसने उत्तर दिया लगभग 120 करोड़। रवि ने फिर प्रश्न किया सूर्य और पृथ्वी के मध्य की दूरी कितनी है ? उसने तुरन्त जवाब दिया – लगभग 15 करोड़ किमी। रवि ने फिर प्रश्न किया – प्रकाश एक सेकण्ड में लगभग कितनी दूरी तय करता है ? उसने जवाब दिया – 3 करोड़ मी.। रवि ने फिर से प्रश्न किया– अब बताओ, राजस्थान की जनसंख्या 2011 की जनगणना के अनुसार लगभग कितनी है?

मोहन ने जवाब दिया – राजस्थान की जनसंख्या 2011 में लगभग 7 करोड़ हो गयी है। अब इनको संख्या के रूप में लिखकर बताओ तो मोहन ने कहा इन संख्याओं को लिखना कठिन है। क्या इन संख्याओं को आसानी से पढ़ा, लिखा व समझा जा सकता है? हम ऐसी बड़ी संख्याओं को घात और घातांक की सहायता से आसानी से पढ़ व लिख सकते हैं। इस अध्याय में हम पूर्णांक आधार एवं घातांक पूर्ण संख्या वाली संख्याओं के बारे में अध्ययन करेंगे।

5.2 घातांक

निम्न में बार–बार दोहराए जाने वाली संख्याओं पर विचार करते हैं,

4 + 4 + 4 + 4 + 4,   5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5, 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7

गुणा के नियमानुसार संक्षिप्त में हम बार–बार दोहराई जाने वाली समान संख्याओं के योग को 5 x 4, 6 x 5, 8 x 7 के रूप में लिखते हैं।

क्या हम गुणांक विधि से दोहराई गई संख्याओं को सरलता से जान सकेंगे? निम्न संख्याओं पर विचार करते हैं।

4 = 2 x 2   8 = 2 x 2 x 2   16 = 2 x 2 x 2 x 2

32 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2

इन्हें इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$2 \times 2 = 2^2$ $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

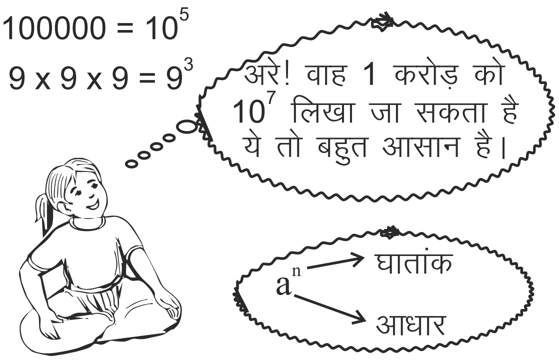
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

इसी प्रकार $100 = 10 \times 10 = 10^2$ $10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ $100000 = 10^5$

इसी प्रकार $9 \times 9 = 9^2$ $9 \times 9 \times 9 = 9^3$

9 x 9 x 9 x -------------- n गुणनखण्डों तक



यहाँ 2^3 में आधार 2 तथा घात 3 है।

2^5 में 2 आधार और 5 घातांक है।

2^5 को ''2 की घात 5'' पढ़ते हैं।

उदाहरण 1 64 को घातांक रूप में लिखिए।

हल $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अतः $64 = 2^6$

उदाहरण 2 3^4 और 4^3 में कौन सी संख्या बड़ी है और क्यों?

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 81$

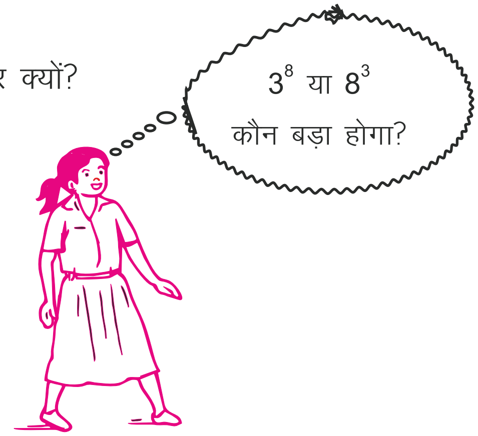
$4^3 = 4 \times 4 \times 4$

$= 64$

आप जानते हैं $81 > 64$

अतः $3^4 > 4^3$

अर्थात् 3^4 तथा 4^3 में 3^4 बड़ी संख्या है।



उदाहरण 3 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 36 (ii) 256 (iii) 1000

(i) 36

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^2 \times 3^2$

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

(ii) 256

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^8$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

(iii) 1000

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 2^3 \times 5^3$

2	1000
2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

उदाहरण 4 सरल कीजिए।

(i) 3×10^3 (ii) $5^2 \times 2^3$

हल (i) $3 \times 10^3 = 3 \times 10 \times 10 \times 10$

$= 3 \times 1000$

$= 3000$

(ii) $5^2 \times 2^3 = 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 25 \times 8$

$= 200$

उदाहरण 5 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-1)^5$ (ii) $(-3)^4$

हल (i) $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

(ii) $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= 9 \times 9 = 81$

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित को घातांक रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ (ii) $3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

   (iii) $a \times a \times a \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times t \times t \times t$

2. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांक रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) 32 (ii) 81 (iii) 343 (iv) 125

3. निम्नलिखित में बड़ी संख्या को पहचानिए।

   (i) 2^5 या 5^2 (ii) 3^5 या 5^3 (iii) 3^{10} या 10^3 (iv) 7^3 या 3^7

4. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) 324 (ii) 625 (iii) 1080 (iv) 1800

5. सरल कीजिए।

   (i) 2×3^4 (ii) $7^3 \times 5$ (iii) $5^3 \times 2^2$ (iv) $3^2 \times 10^3$

   (v) 0×10^4

6. मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $(-1)^3$ (ii) $(-5)^4$ (iii) $(-4)^2 \times (-2)^3$

5.3 घातांकों के नियम

नियम 1 एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का गुणा

उदाहरण 6 $2^3 \times 2^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल
$$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^7$$
$$2^3 \times 2^4 = 2^{(3+4)}$$
$$= 2^7$$

ध्यान दीजिए यहाँ 2^3 और 2^4 में आधार समान है और घातांकों 3 और 4 का योगफल 7 है।

उदाहरण 7 $(-5)^2 \times (-5)^3$ को हल कीजिए।

हल
$$(-5)^2 \times (-5)^3 = [(-5) \times (-5)] \times [(-5) \times (-5) \times (-5)]$$
$$= (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$$
$$= (-5)^5$$
$$(-5)^2 \times (-5)^3 = (-5)^{2+3}$$
$$= (-5)^5$$

> हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि एक शून्येतर संख्या a के लिए, जहाँ m और n कोई दो घनात्मक पूर्णांक हो, तो $a^m \times a^n = a^{m+n}$

नियम 2 एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का भाग

आइए समान आधार परन्तु पृथक–पृथक घातों की संख्याओं का भाग करें।

उदाहरण 8 $2^7 \div 2^3$ को हल कीजिए।

हल
$$2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2}$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^4$$

इस प्रकार $2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$

अतः $2^7 \div 2^3 = 2^4$

उदाहरण 9 $a^4 \div a^2$ को ज्ञात कीजिए।

हल
$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a}$$

अतः $a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$

यदि a एक शून्येतर संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हों, जहाँ m>n, तो $a^m \div a^n = a^{m-n}$

पुनः देखिए

उदाहरण 10 $3^3 \div 3^7$ को सरल कीजिए।

हल $3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$

$= \frac{1}{3^4}$

अर्थात् $\frac{3^3}{3^7} = \frac{1}{3^{7-3}} = \frac{1}{3^4}$

यदि a एक शून्येतर संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हो, जहाँ m < n, तो

$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

शून्य घातांक

निम्नलिखित क्रिया को देखें।

$3^2 \div 3^2 = 3^{2-2} = 3^0$

परन्तु $3^2 \div 3^2 = \frac{3^2}{3^2} = \frac{3 \times 3}{3 \times 3} = 1$

अतः $3^0 = 1$

उपर्युक्त में $3^0 = 1$ प्राप्त हुआ है, इसी प्रकार किसी भी आधार पर घातांक 0 (शून्य) होने पर उसका मान 1 ही होता है।

यदि a एक शून्येतर संख्या है तो $a^0 = 1$

नियम 3 घातीय संख्या की घातांक

उदाहरण 11 $[(5)^3]^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $[(5)^3]^4 = (5^3) \times (5^3) \times (5^3) \times (5^3)$

$= 5^{3+3+3+3}$

$= 5^{(3\times4)}$

अर्थात् $[(5)^3]^4 = 5^{3\times4}$

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि

यदि a एक शून्येतर संख्या तथा m और n कोई दो धन पूर्णांक हो, तो $(a^m)^n = a^{m\times n}$

नियम 4 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का गुणन

उदाहरण 12 क्या आप $2^4 \times 3^4$ को सरल कर सकते है?

ध्यान दीजिए कि यहाँ पर दोनों पदों के घातांक समान है किन्तु आधार अलग हैं।

हल $2^4 \times 3^4$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 3)^4$

अर्थात् $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4$

उपर्युक्त उदाहरण से यह निष्कर्ष निकलता है कि

> नोट : ध्यान रहे कि
> $a^m + b^m \neq (a+b)^m$
> $a^m - b^m \neq (a-b)^m$
> जैसे
> $2^3 + 5^3 \neq (2+5)^3$
> $2^3 - 5^3 \neq (2-5)^3$

> यदि a और b कोई दो शून्येतर संख्याएँ हो तथा m एक धन पूर्णांक हो, तो
> $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

नियम 5 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का भाग

उदाहरण 13 $8^5 \div 9^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल

$$8^5 \div 9^5 = \frac{8^5}{9^5} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9}$$

$$= \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}$$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^5$$

अर्थात् $8^5 \div 9^5 = \frac{8^5}{9^5} = \left(\frac{8}{9}\right)^5$

> यदि a और b कोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हो तथा m एक धन पूर्णांक हो, तो
> $$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

प्रश्नावली 5.2

1. घातांक नियमों का प्रयोग करते हुए हल कीजिए।

(i)	$3^7 \times 3^8$	(ii)	$(4)^7 \times (4)^2$	(iii)	$a^5 \times a^4$
(iv)	$3^{15} \div 3^9$	(v)	$t^7 \div t^4$	(vi)	$(6^4 \times 6^2) \div 6^5$
(vii)	$(2^6)^3$	(viii)	$(a^5)^4$	(ix)	$5^5 \times 8^5$

(x) $a^3 \times b^3$ (xi) $7^5 \div 6^5$ (xii) $(25^3 \times 25^7) \div 25^{10}$

(xiii) $7^5 \div 7^8$ (xiv) $(9^3)^0$

2. सरल कीजिए–

(i) $\{(3^2)^3 \times 3^4\} \div 3^7$ (ii) $16^4 \div 4^2$ (iii) $\dfrac{5^7}{5^4 \times 5^3}$

(iv) $4^0 \times 5^0 \times 6^0$ (v) $\dfrac{3^9 \times a^6}{9^2 \times a^3}$ (vi) $(7^3 \times 7)^3$

(vii) $\dfrac{3^{10}}{3^5 \times 3^7}$ (viii) $\dfrac{a^9}{a^6} \times a^8$ (ix) $2^0 + 3^0 + 4^0$

3. सरल कीजिए–

(i) $\dfrac{2^3 \times 7^2 \times 13^8}{56 \times 13^7}$ (ii) $\dfrac{(3^2)^3 \times 5^3}{9^2 \times 25}$ (iii) $\dfrac{2^5 \times 10^5 \times 5}{5^4 \times 4^3}$

5.4 बड़ी संख्याओं को घातांकों में प्रकट करना

निम्नांकित को देखिए।

$$54 = \frac{54 \times 10}{10} = 5.4 \times 10^1$$

$$540 = \frac{540 \times 100}{100} = 5.4 \times 10^2$$

$$5400 = \frac{5400 \times 1000}{1000} = 5.4 \times 10^3$$

$$54000 = \frac{54000 \times 10000}{10000} = 5.4 \times 10^4$$

यहाँ हमने 54, 540, 5400, 54000 को मानक रूप (Standard form) में व्यक्त किया है।

प्रकाश का वेग 300,000,000 मी/से है इसे मानक रूप में निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

मानक रूप $= 3 \times 10^8$ मी./से.

जब किसी संख्या को 1.0 या 1.0 से बड़ी या 10 से छोटी एक दशमलव संख्या और 10 की घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो संख्या के इस रूप को मानक रूप कहते हैं।

5.5 किसी बड़ी संख्या को मानक रूप में व्यक्त करना

आप जानते हैं कि बड़ी संख्याओं की घातांकों का प्रयोग करके सुविधाजनक रूप में व्यक्त किया जा सकता है, आइए बड़ी संख्याओं को घातांकों के प्रयोग से मानक रूप में लिखें।

संख्या 7465 को मानक रूप में लिखते हैं।

$$7465 = 7.465 \times 1000$$
$$= 7.465 \times 10^3$$

(दशमलव चिह्न तीन स्थान बाईं ओर खिसक गया है।)

(दशमलव चिह्न तीन स्थान बाईं ओर खिसक गया है।)

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5976,000,000,000,000,000,000,000 किग्रा

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5.976×10^{24} किग्रा है।

अब आप इस बात से सहमत होंगे कि पढ़ने, समझने और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या 25 अंकों की संख्या की अपेक्षा बहुत अधिक सरल है।

उदाहरण 14 संख्या 150,000,000,000 को मानक रूप में लिखिए।

हल $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

(दशमलव बिन्दु 11 स्थान बाईं ओर खिसक गया है)

मानक रूप में लिखी संख्याओं को जोड़ते समय संख्याओं को 10 के समान घात में बदलते है।

उदाहरण 15 निम्नांकित संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।

(i) 63000 (ii) 100000 (iii) 425000

हल (i) $63000 = 6.3 \times 10000 = 6.3 \times 10^4$

(ii) $100000 = 1 \times 100000 = 1 \times 10^5$

(iii) $425000 = 4.25 \times 100000 = 4.25 \times 10^5$

उदाहरण 16 जनसंख्या गणना के अनुसार किसी वर्ष भारत की जनसंख्या 1,00,84,35,405 थी। इसे वैज्ञानिक संकेतन में लिखिए।

हल भारत की जनसंख्या = 1,00,84,35,405

= 1.00,84,35,405 × 1,00,00,00,000

= 1.008435405×10^9

= 1.008×10^9 लगभग

प्रश्नावली 5.3

1. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 50,0000 (ii) 48,30,000

(iii) 3,94,00,00,00,000 (iv) 30000000

(v) 180000

2. पृथ्वी की सूर्य से दूरी लगभग 15,00,00,000 किमी है। इस दूरी को वैज्ञानिक संकेतन द्वारा व्यक्त कीजिए।

3. एक व्यक्ति अपने दैनिक भोजन से प्रतिदिन औसतन 3000 कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करता है। वैज्ञानिक संकेतन में प्रदर्शित कीजिए कि वह पूरे 1 वर्ष में कितनी कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करेगा ?

4. एक अनुमान के अनुसार भारतीय रेल एक दिन में लगभग 1 करोड़ 30 लाख यात्रियों को एक स्थान से दूसरे स्थान पर पहुँचाती है। बताइए कि 30 दिनों में कितने यात्री रेल से यात्रा करते हैं। उत्तर मानक रूप में दीजिए।

5. निम्नांकित को सरल रूप में लिखिए।

(i) $2.5 \times (10)^4$ (ii) $1.75 \times (10)^6$

(iii) $1.21 \times (10)^{-8}$ (iv) $4.50 \times (10)^{-5}$

हमने सीखा

1. संख्याएँ घातांकीय रूप में प्रकट की जा सकती हैं। घातांकों के प्रयोग से बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं को पढ़ना, समझना, तुलना करना और उन पर संक्रियाएँ करना सरल होता है।

2. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती हैं, जो संक्षेप में इस प्रकार है। किन्हीं शून्येतर संख्याओं a और b तथा धनात्मक पूर्णांकों m और n के लिए,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ यदि m>n या $a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ यदि n > m

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(v) $a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

3. वैज्ञानिक संकेतन या मानक रूप में किसी संख्या को व्यक्त करने के लिए संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है तथा 10.0 सम्मिलित नहीं है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है।

अध्याय 6

वैदिक गणित

6.1 पूर्व कक्षा में एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, निखिलम् से गुणा करना सीखा था। इस अध्याय में आप पुनः योग, व्यवकलन, गुणा एवं भाग, भिन्न, वर्ग व वर्गमूल की अन्य विधियों का अध्ययन करेंगे। इस अध्याय की सभी क्रियाओं का अभ्यास मौखिक करवाया जाए तो गणना सरल व अतिशीघ्र हो जाती है।

6.2 संकलन – व्यवकलनाभ्याम्

दैनिक जीवन में इस विधि का उपयोग गणना को आसान बनाने के लिए करते हैं। इस विधि का उपयोग आधार संख्या की पूर्णता पर आधारित है जो कि 10 या 10 का गुणक होता है। इसमें पूर्ण आधार वाली संख्याओं के साथ विचलन कर बड़ी गणनाओं को आसान बनाया जाता है।

उदाहरण 1 8 + 11 + 7+ 12 + 9 + 13 का योग कीजिए।

हल इन संख्याओं को ध्यान से देखने पर पता चलता है कि 8, 10 से 2 कम है एवं 12, 10 से 2 अधिक है। इसी तरह 9, 10 से 1 कम है एवं 11, 10 से 1 अधिक है।

$$(10-2) + (10+1) + (10-3) + (10+2) + (10-1) + (10+3)$$

पूर्ण आधार वाली संख्याओं के रूप में दर्शा कर व्यवस्थित करने पर

$(10-\cancel{2}) + (10+\cancel{2}) + (10+\cancel{1}) + (10-\cancel{1}) + (10-\cancel{3}) + (10+\cancel{3})$

$= 20 + 20 + 20$

$= 60$

यहाँ पर – 2, 2 1, -1 एवं –3, 3 ऐसे युग्म हैं जिनके योग –2 + 2, 1–1, –3 + 3 शून्य है।

उदाहरण 2 26 + 48 + 107 + 63 + 13 + 44 को जोड़िए।

हल संख्याओं का पूर्ण संख्या बनाने के लिए युग्म 10 या 10 के गुणज बनाने का प्रयास करते हैं।

26 + 63 + 48 + 13 + 107 + 44

संकलन व्यवकलनाभ्याम से

$= 30 - 4 + 60 + 3 + 50 - 2 + 10 + 3 + 110 - 3 + 40 + 4$

$= 30 + 60 + 10 + 50 + 110 + 40 - 4 + 3 - 2 + 3 - 3 + 4$

$= 90 + 10 + 50 + 150 + 1$

$= 100 + 200 + 1$

$= 300 + 1 = 301$

संकलन व्यवकलनाभ्याम विधि में विचलन करते जाएँ एवं योग करते जाएँ तो योग आसान हो जाता है।

6.3 पूरणापूरणाभ्याम्

संख्याओं के ऐसे युग्म बनाएँ जिनसे संख्याएँ 10 के गुणित में हो जाएँ।

उदाहरण 3 $27 + 58 + 392 + 68 + 32 + 23$ का योग कीजिए।

हल $= (27+23)+(58+392)+(68+32)$ (10 के गुणित में बनाने का प्रयास)

$= 50 + 450 + 100$

$= (50 + 450) + 100$

$= 500 + 100$

$= 600$

उदाहरण 4 $45 + 67 + 38 + 55 + 62 + 33$ का योग कीजिए।

हल 10 के गुणित युग्म में जमाने पर

$= (45 + 55) + (67 + 33) + 38 + 62$

$= 100 + 100 + 100$

$= 300$

प्रश्नावली 6.1

1. संकलन व्यवकलनाभ्याम एवं पूरणापूरणाभ्याम का उपयोग करते हुए योग कीजिए –

(i) $282 + 718 + 796 + 524 + 804 + 376$

(ii) $52 + 136 + 48 + 64$

(iii) $135 + 248 + 322 + 65$

6.4 घटाव (सूत्र निखिलम्)

(सूत्र निखिलम् नवतः चरमं दशतः का उपयोग करते हुए हम घटाव करते हैं)

यदि हम 1000 में से 362 घटाना चाहे तो हमारी पारम्परिक विधि में कई हासिल के चरणों से गुजरना होगा एवं समय भी अधिक लगेगा फिर भी गलत होने का भय बना रहेगा। आइए वैदिक विधि से देखते हैं –

दाहिने से प्रारम्भ करते हुए बाईं ओर गणना करें। बाईं ओर के प्रत्येक शून्य के बदले 9 लिखें और अंतिम शून्य की जगह 10 लिखें। शून्य के पहले एकदम बाईं ओर का अंक 1 कम हो जाएगा।

1000	इस प्रकार बन जाएगा	0 9 9 10
– 362		0 3 6 2
		0 6 3 8

उदाहरण 5 70,000 में से 1837 घटाइए।

हल सबसे बाईं ओर का अंक (7) में से 1 कम = 6

अब 9 में से 1 कम = 8

9 में से 8 कम = 1

9 में से 3 कम = 6

अंतिम अंक 10 में से 7 कम = 3

अर्थात् शेषफल 68163 रहेगा।

अतः 70000 – 1837 = 68613 अभीष्ट हल है।

उदाहरण 6 संख्या 854 में से 569 घटाइए।

हल 854 – 569

चरण 1 यहाँ 4 < 9

इसलिए अन्तर 9 – 4 = 5 का पूरक लेते हैं।

पूरक 10 से लिया जाएगा। अतः 5 का पूरक 5 है जो इकाई के स्थान पर लिख जाएगा।

चरण 2 पुनः 5 जो 6 से छोटा है अतः 5 व 6 का अन्तर 1 है पूरक 9 से 1 को घटाने पर 8 आएगा।

चरण 3 8 से एक कम 8 – 1 = 7 में से 5 घटाने पर 2 शेष आएगा जिसे सैकड़ा के स्थान पर लिखेंगे।

854 – 569 = 285

6.5 मनोरंजक गुणन विधियाँ

कक्षा VI में आपने निखिलम् विधि से गुणा करना सीखा था। इस कक्षा में गुणा की सरल विधियों का अध्ययन करेंगे ।

6.5.1 किसी भी संख्या को 10 से गुणा

जैसे $5 \times 10 = 50$ $10 \times 10 = 100$

$68 \times 10 = 680$

तीनों उदाहरणों को ध्यान से देखिए और अपने साथियों से चर्चा कीजिए कि किसी संख्या को 10 से गुणा करने पर गुणनफल व मूल संख्या (5, 10, 68) में क्या फर्क दिखता है? शायद आप सहमत होंगे कि इकाई के स्थान पर शून्य आ जाता हैं एवं मूल संख्या दहाई व दहाई के आगे खिसक जाती है।

करो और सीखो

1. यदि संख्या को 100 व 1000 से गुणा किया जाए तो गुणनफल में मूल संख्या से क्या परिवर्तन दिखता है, साथियों से चर्चा कीजिए।

2. आप कक्षा में दो समूह में विभक्त हो जाए संख्याओं को 10,100 या 1000 से गुणा करने के सवाल एक समूह पूछे दूसरा समूह उसका उत्तर दें। फिर दूसरा समूह प्रश्न पूछे एवं पहला उत्तर दें। इस तरह अन्त्याक्षरी की तरह खेल खेलें।

6.5.2 किसी संख्या का 5 से गुणा

1. किसी संख्या को 10 से गुणा करना आपने सीखा हैं। आइए संख्या को 5 से गुणा करने के मनोरंजक एवं सरल तरीके को देखेंगे।

(i) 18 x 5

$= 18 \times \frac{10}{2}$ (5, 10 का आधार है अत: $5 = \frac{10}{2}$ लिखा जाता है।)

$= \frac{18}{2} \times 10 = 9 \times 10 \left(\frac{18}{2} = 9\right)$

$= 90$

(ii) 29×5

$= 29 \times \frac{10}{2}$ $\left(5 = \frac{10}{2}\right)$

$= \frac{29}{2} \times 10$ $\left(\frac{29}{2} = 14.5\right)$

$= 14.5 \times 10$ $\left(14.5 = \frac{145}{10}\right)$

$= \frac{145}{10} \times 10 = 145$

अर्थात् किसी संख्या को 5 से गुणा करते समय संख्या का आधा और उसका दस गुना करने पर गुणनफल प्राप्त होता है।

करो और सीखो

1. क्या 50 व 500 से किसी संख्या को गुणा करने में 5 का तरीका प्रयोग किया जा सकता है?
2. किसी संख्या को 25 से गुणा करने के लिए $\frac{100}{4}$ के रूप में गुणा किया जा सकता है? कक्षा में चर्चा कीजिए।

6.5.3 किसी संख्या को 9 से गुणा (सूत्र–एक न्यूनेन पूर्वेण विधि से)

उदाहरण 7 6 को 9 से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 9 \\ \hline \dot{6}/9-\dot{6} \\ 5/4 \\ =54 \end{array}$$

(i) एक न्यूनेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग होता है। अत: 6 में एक न्यूनेन का चिह्न तिरछी रेखा के बाएँ पक्ष में लगाया।

(ii) दाएँ पक्ष में 9 में से एक न्यूनेन लगा गुण्य 6 को घटाया गया।

उदाहरण 8 12 को 9 से गुणा कीजिए।

हल

12 ×9 12/9 − 12	(1)	यहाँ पर गुणक 9 ही है परन्तु गुण्य 9 से बड़ा है।
	(2)	एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग करते हुए 12 का एक न्यून = 11 तिरछी रेखा के बाईं ओर लगाया।
11/9 − 11	(3)	तिरछी रेखा के दाएँ ओर 9 में से 12 का एक न्यून(9−11) को घटाया।
11/−2 या $(\bar{2})$	(4)	तिरछी रेखा के बाएँ भाग में दहाई 11 व दाएँ भाग में −2 या $\bar{2}$ है।
$11\bar{2}$ = 108	(5)	तिरछी रेखा को हटाकर $11\bar{2}$ में $\bar{2}$ को सामान्य संख्या में बदलने पर 108 प्राप्त होता है।

6.5.4 किसी संख्या का 99 से गुणा

आपने संख्या को 9 से गुणा करना सीखा है आइए अब 99 से गुणा करते हैं। 99 से गुणा करने की विधि भी वही है जो 9 से गुणा करने की विधि है। अतः एक उदाहरण से वैदिक गणित में इसे एक न्यूनेन पूर्वेण के रूप में देखते है।

उदाहरण 9 18 × 99 को हल कीजिए।

हल

18
×99
18/99-18 (संकेत पूर्वानुसार)
17/99-17
17/82
=1782

उदाहरण 10 99 × 99 को हल कीजिए।

99
×99
99/99-99
98/99-98
98/1

[99×99 = 981 सही है यदि नहीं तो क्या आप खोजने का प्रयास करेंगे कि भूल कहाँ हुई? जी हाँ आप सही है तिरछी रेखा के दाएँ पक्ष में आधार 100 है अतः यहाँ दो अंकों की संख्या होगी लेकिन यहाँ एक ही है इसलिए इसे 01 लिखेंगे।]

अतः हल 9801 होगा।

क्या आप 999 व 9999 से भी किसी संख्या का गुणा कर सकते हैं ?

करो और सीखो

• किसी संख्या को 999 व 9999 से गुणा स्वयं करके देखें एवं समस्या आने पर अपने अध्यापक जी से सहयोग लें।

6.5.5 किसी संख्या का 11 से गुणा

आइए 11 से गुणा करने की एक सीधी विधि सीखते हैं ।

72 को 11 से गुणा कीजिए –

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 11 \\ \hline 72 \\ 72\times \\ \hline =7(7+2)2 \\ =792 \end{array}$$

एक और विधि देखते हैं –

72×11

$72 \times (10+1)$

$720+72$

यानि $7(7+2)\,2$

$= 792$

इन दोनों विधि से हम देखते हैं कि गुण्य के दोनों अंकों के मध्य में गुण्य के दोनों अंकों का योग होता है।

उदाहरण 11 81 को 11 से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 11 \\ \hline 8/(8+1)/1 \\ 891 \end{array}$$

जाँच करे कि क्या $81\times11 = 891$ होता है?

उदाहरण 12 99 को 11 से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 11 \\ \hline 9/(9+9)/9 \\ 9/18/9 \\ =1089 \end{array}$$

(18 में 8 को दहाई स्थान पर एवं 1 को सैंकड़े की संख्या के साथ जोड़ेंगे।)

क्या तीन या तीन से अधिक अंकों की संख्या के लिए भी यह नियम लागू होता है? चर्चा करें एवं उन पर आधारित सवालों का अभ्यास कीजिए।

प्रश्नावली 6.2

1. निखिलम् सूत्र से घटाव कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} 9000 \\ -3768 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 5872 \\ -2987 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 4987 \\ -1898 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

2. उपयुक्त सूत्र लगाकर गुणा कीजिए।

(i)	87×10	(ii)	53×100	(iii)	432×1000	(iv)	64×5
(v)	72×50	(vi)	81×99	(vii)	99×999	(viii)	99×9

6.6 भिन्न

भिन्नों से आप परिचित हैं हम भिन्नों को वैदिक गणित के कुछ तरीकों से आसान बनाते हैं।

निम्न भिन्नों को ध्यान से देखिए –

उदाहरण 13 $\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल इनके हर समान है एवं अंश अलग–अलग हैं।

इस भिन्न को बढ़ते क्रम में लिख सकते हैं।

$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

भिन्न जिनके हर समान है, तब जिस भिन्न का अंश बड़ा होगा वह भिन्न बड़ी भिन्न होगी। यदि भिन्नों के अंश परस्पर समान है तो जिसका हर बड़ा है वह छोटी भिन्न होगी।

$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ को बढ़ते क्रम में जमाइए।

यहाँ हर 5 सबसे बड़ी संख्या है अतः सबसे छोटी भिन्न $\frac{1}{5}$ होगी, एवं सबसे बड़ी भिन्न $\frac{1}{2}$ होगी।

आरोही क्रम में जमाने पर

$\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

उदाहरण 14 $\frac{3}{4}$ व $\frac{4}{5}$ में बड़ी भिन्न बताइए।

हल

$$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ \hline 15 & 16 \end{array}$$

(i) बिना रेखा के भिन्नों के अंश व हर लिखिए।

(ii) तिर्यक गुणनफल बने $3\times5 = 15$ तथा $4\times4 = 16$

(iii) जिस तरफ का गुणनफल बड़ा वह भिन्न बड़ी होगी।

(iv) $\because$ 15<16 अतः भिन्न $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

उदाहरण 15 $\frac{2}{3}$ व $\frac{6}{9}$ में भिन्न का क्रम बताइए।

हल

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 3 & 9 \\ \hline 18 & 18 \end{array}$$

(i) तिर्यक गुणा करने पर बने $9 \times 2 = 18$ तथा $6 \times 3 = 18$

(ii) गुणनफल परस्पर समान अतः भिन्न बराबर

(iii) अतः यह तुल्य भिन्न है।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्न भिन्नों के मध्य सही चिन्ह लगाएँ। (>, =, < में से एक)

(i) $\frac{4}{9} \square \frac{3}{9}$ (ii) $\frac{4}{5} \square \frac{4}{10}$ (iii) $\frac{3}{5} \square \frac{6}{10}$

(iv) $\frac{5}{7} \square \frac{6}{7}$ (v) $\frac{2}{3} \square \frac{3}{2}$

2. निम्न भिन्नों को आरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$

3. निम्न भिन्न को अवरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ (ii) $\frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{5}$

6.6.1 भिन्नों का योग

यदि भिन्नों का हर परस्पर समान है तो–

उदाहरण 16 $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ भिन्नों का योग कीजिए।

हल $= \frac{1+2}{5}$ $\qquad \frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

अतः भिन्नों का योग $= \frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

यदि दी गई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं है–

उदाहरण 17 $\frac{2}{3}$ व $\frac{4}{5}$ का योग कीजिए।

हल $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

$= \frac{2\times5+3\times4}{3\times5}$ बनने वाले तिर्यक गुणन 2×5 तथा 3×4

हरों का गुणनफल $3 \times 5 = 15$

$$= \frac{10+12}{15} \quad = \frac{22}{15} \quad = 1\frac{7}{15}$$

उदाहरण 18 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ योग कीजिए।

हल $\frac{1\times3\times5+2\times2\times5+4\times2\times3}{2\times3\times5}$ यहाँ योग में बनने वाले तिर्यक गुणन – $1\times3\times5$, $2\times2\times5$ तथा $4\times2\times3$ हैं।

$= \frac{15+20+24}{30}$ हरों का गुणनफल – $2\times3\times5$ हैं।

$= \frac{59}{30} \quad = 1\frac{29}{30}$

जब दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हों और उनमें उभयनिष्ठ गुणनखण्ड भी हो।

उदाहरण 19 $\frac{1}{4}+\frac{1}{10}$ हल कीजिए।

हल $\frac{1\times10+1\times4}{4\times10} \quad = \frac{10+4}{40} \quad = \frac{14}{40}$ (सरलतम रूप में बनाने के लिए अंश व हर को समान संख्या में भाग देना होगा)

$= \frac{14\div2}{40\div2} \quad = \frac{7}{20}$ (सरलतम रूप में लिखने पर)

6.6.2 मिश्र भिन्नों का योग (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक गुणन से)

मिश्र भिन्नों का योग विलोकनम् तथा तिर्यक गुणन के प्रयोग से बड़ी सरलता से निकाला जा सकता है।

$1\frac{3}{4}+2\frac{1}{3}$ (विलोकनम सूत्र से मिश्र भिन्न के दो टुकड़े करें)

$1\frac{3}{4}=1+\frac{3}{4}$ तथा $2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$

$=1+\frac{3}{4}+2+\frac{1}{3}$

$=(1+2)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)$ ($\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ का तिर्यक गुणन से योग)

$=3+\frac{3\times3+1\times4}{4\times3} \quad =3+\frac{9+4}{12} \quad =3+\frac{13}{12} \quad =3+1\frac{1}{12}$ (विलोकनम् का उपयोग)

$=(3+1)+\frac{1}{12} \quad =4+\frac{1}{12}$ या $4\frac{1}{12}$

6.7 भिन्नों का व्यवकलन

भिन्नों की व्यवकलन संक्रिया भिन्नों की योग संक्रिया से मिलती जुलती है। योग संक्रिया में योग चिह्न (+) एवं व्यवकलन संक्रिया में व्यवकलन चिह्न (–) का उपयोग करेंगे।

6.7.1 भिन्नों का व्यवकलन जब भिन्नों का हर परस्पर समान हो

उदाहरण 20 भिन्न $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}$$

6.7.2 जब भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हैं और उनमें कोई उभयनिष्ठ गुणनफल नहीं है तो व्यवकलन करना

उदाहरण 21 भिन्न $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल

$$\frac{4\times 3 - 5\times 2}{5\times 3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

उदाहरण 22 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ को हल कीजिए।

हल

$$\frac{1\times3\times5+1\times2\times5-1\times2\times3}{2\times3\times5}$$ (भिन्नों के योग की तरह हल)

$$= \frac{15+10-6}{30} = \frac{19}{30}$$

6.7.3 मिश्र भिन्न का व्यवकलन

योग संक्रिया के समान सूत्र विलोकनम् और तिर्यक गुणन के प्रयोग से मिश्र भिन्नों का व्यवकलन भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण 23 $3\frac{3}{4} - 3\frac{2}{5}$ हल कीजिए।

हल

$$\left(3+\frac{3}{4}\right)-\left(3+\frac{2}{5}\right)$$

$$(3-3)+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)$$

$$= 0 + \frac{3\times5-4\times2}{4\times5}$$

$$= \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$$

प्रश्नावली 6.4

1. योग कीजिए। (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक गुणन से)

(i) $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{7}{15}+\frac{2}{15}$ (iii) $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$

(iv) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}$ (v) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ (vi) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$

2. व्यवकलन कीजिए (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक गुणन से)

(i) $\frac{9}{10}-\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{19}{5}-\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

(iv) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ (v) $3\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}$ (vi) $2\frac{5}{6}-2\frac{1}{6}$

6.8 भिन्नों का गुणा

दो भिन्नों का गुणा सरलता से ज्ञात किया जा सकता हैं। इसमें से दोनों भिन्नों के अंशों का गुणनफल अंश के स्थान पर एवं दोनों भिन्नों के हरों का गुणनफल हर के स्थान पर लिखते हैं –

$\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{4}$ का गुणा कीजिए –

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$ $\frac{1\times3}{2\times4}=\frac{3}{8}$

6.8.1 दो मिश्र भिन्नों का गुणा (सूत्र– एकाधिकेन पूर्वेण से)

दो मिश्र भिन्नों के चरम अंकों का योग यदि 1 होता है एवं आधार तथा शेष निखिलम् अंक समान हो, तो सामान्य संख्याओं के समान सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा इनका गुणनफल दो भागों में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 24 $6\frac{1}{4}\times6\frac{3}{4}$ को हल कीजिए।

हल (1) चरम अंक $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ का योग $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$

(2) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान = 6

$6\times(6+1)\Big/\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$

(3) वाम पक्ष = प्रथम भाग = शेष निखिलम अंक × उसका एकाधिक

(4) दक्षिण पक्ष = दूसरा भाग = चरम अंकों का गुणा

अर्थात् $6\times(6+1)+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$

$6\times7+\frac{3}{16}$

$42+\frac{3}{16} \quad =42\frac{3}{16}$

उदाहरण 25 भिन्न $15\frac{4}{7}\times15\frac{3}{7}$ का गुणा कीजिए।

हल $15\times(15+1)/\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}$

$15\times16/\frac{12}{49}$

$240\frac{12}{49}$

6.8.2 दो भिन्नों का गुणा (विलोकनमसूत्र से)

उदाहरण 26 भिन्न $5\frac{1}{2}\times6$ का गुणा वैदिक विधि से कीजिए ।

हल $\left(5+\frac{1}{2}\right)\times6$ (विलोकनम् सूत्र)

$=5\times6+\frac{1}{2}\times6$ (कोष्ठक का हल)

$= 30+3$ (6 का आधा = 3)

$=33$

उत्तर की जाँच : $5\frac{1}{2}\times6$

$=\frac{11}{2}\times6$ $\left(5\frac{1}{2}=\frac{11}{2}\right)$

$=11\times\frac{6}{2}$

$= 11\times3$ (6 का आधा = 3)

$=33$

उदाहरण 27 मिश्र भिन्न $7\frac{1}{2}\times8\frac{1}{2}$ का गुणा कीजिए।

हल $\left(7+\frac{1}{2}\right)\times\left(8+\frac{1}{2}\right)$ (विलोकनम् सूत्र से)

$$7\times8+7\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=56+3\frac{1}{2}+4+\frac{1}{4}$$

$$=56+3+4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$=63+\frac{6}{8} \qquad \left(\frac{6\div2}{8\div2}=\frac{3}{4}\right)$$

$$=63\frac{3}{4}$$

अन्य तरीका – $7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+(7+8)\frac{1}{2}$

$$=56+\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{2}$$

$$=56+7+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=63+\frac{3}{4}$$

$$=63+\frac{3}{4}$$

प्रश्नावली 6.5

उपयुक्त सूत्र का उपयोग करते हुए भिन्न संख्याओं का गुणा कीजिए –

(1) $\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}$ (2) $5\frac{1}{2}\times5\frac{1}{2}$ (3) $2\frac{3}{4}\times2\frac{1}{4}$

(4) $3\frac{2}{5}\times3\frac{3}{5}$ (5) $12\frac{1}{4}\times12\frac{3}{4}$ (6) $8\frac{2}{7}\times8\frac{5}{7}$

(7) $3\frac{1}{4}\times4$ (8) $2\frac{1}{5}\times5$ (9) $3\frac{1}{2}\times4$

(10) $4\frac{1}{3}\times6$

6.9 वर्ग संख्याएँ

वर्ग संख्याएँ – वे संख्याएँ होती है जिनके अभाज्य गुणनखण्ड दो–दो के युग्म में हो। जैसे 4 एक वर्ग संख्या है क्योंकि इसके अभाज्य गुणनखण्ड = 2×2 है।

यहाँ 2 का एक युग्म है।

क्या 100 एक वर्ग संख्या है?

आइए 100 के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं। 100 के अभाज्य गुणनफल $2\times2\times5\times5$ है यहाँ 2 व 5 का एक युग्म हैं। अतः ये दोनों संख्याएँ वर्ग संख्याएँ हैं।

ये दोनों संख्याएँ किन संख्याओं की वर्ग संख्याएँ है? आइए तय करते हैं।

4 का अभाज्य गुणनखण्ड $= 2\times2$ है एवं यहाँ 2 का एक जोड़ा है अतः यह 2 की वर्ग संख्या है।

इसी प्रकार 100 का अभाज्य गुणनखण्ड $2\times2\times5\times5$ (2 व 5 का युग्म है)

अतः $2\times5 = 10$ की वर्ग संख्या 100 है।

किसी संख्या की वर्ग संख्या ज्ञात करने के लिए उस संख्या को उसी संख्या से गुणा करते हैं। आइए वर्ग संख्या ज्ञात करने के कुछ सरल तरीकों पर चर्चा करते हैं।

(1) दो/तीन अंकों की ऐसी संख्याओं के वर्ग ज्ञात करना जिनका इकाई का अंक 5 हो –

(i) $15\times15 = 1\times(1+1)/5\times5$ (एकाधिकेन पूर्वेण दहाई अंक का)

$= 1\times2/25$

$= 2/25$

$= 225$

(ii) $35\times35 = 3\times(3+1)/5\times5$ (एकाधिकेन पूर्वेण दहाई स्थान पर)

$= 3\times4/25$

$= 1225$

(iii) $95\times95 = 9\times(9+1)/5\times5$

$= 9\times10/25$

$= 9025$

(iv) $105\times105 = 10(10+1)/5\times5$

$= 10\times11/25$

$= 110/25 = 11025$

(v) $125\times125 = 12(12+1)/5\times5$

$= 12(13)/25$

$= 15625$

उदाहरणों से स्पष्ट है कि इकाई पर 5 अंक वाली संख्याओं को उसी संख्या से गुणा करने पर या उसका वर्ग ज्ञात करने पर अंत में 25 अवश्य आता है। उसके पूर्व दहाई वाली संख्या को एकाधिक संख्या से गुणा कर लिखते हैं।

दहाई पर 5 वाली संख्याओं के वर्ग ज्ञात करना।

दहाई पर 5 वाली संख्याएँ 51 से 59 तक ही हैं।

अतः $51^2 = 51\times51$

$= \underline{26}\ \underline{01}$

→ $1\times1=01$ (इकाई का वर्ग)

→ $5\times5+1=26$ (दहाई का वर्ग + इकाई का अंक)

53^2 = 53×53

28 09

$3 \times 3 = 09$ (दहाई का वर्ग)

$5 \times 5 + 3 = 28$ (दहाई का वर्ग + इकाई का अंक)

59^2 = 59×59

34 81

$9 \times 9 = 81$

$5 \times 5 + 9 = 34$

तीन अंक वाली संख्या का वर्ग ज्ञात करना जिसके अंत में 25 हो –

125^2 = 125×125

$(25 \times 25 = 625)$

$1 \times 15 = 15$ (125 में इकाई व सैंकड़ा से बनी संख्या 15 को सैंकड़ा के 1 से)

अतः 125^2 = 15625

325^2 = 325×325

$(25 \times 25 = 625)$

$3 \times 35 = 105$ (325 में इकाई व सैंकड़ा से बनी संख्या 35 को सैंकड़ा 3 से)

अतः 325^2 = 105625

725^2 = 725×725

$(25 \times 25 = 625)$

$7 \times 75 = 525$

= 525625

इसमें सदैव 625 (25^2) अंत में आता है। उससे पहले सैकड़ा तथा इकाई के अंकों से बनी संख्या को सैकड़ा के अंक से गुणा करके रख देते हैं।

वर्ग के कुछ अन्य तरीके –

11×11 = 1 2 1 ← इकाई की संख्या का वर्ग

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना

दहाई की संख्या का वर्ग

31^2 = 31×31 में इकाई की संख्या का वर्ग – $1 \times 1 = 1$

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना $(1 \times 3) \times 2 = 6$

दहाई की संख्या का वर्ग – $3 \times 3 = 9$

$= 961$

12X12 = इकाई की संख्या का वर्ग – $2\times2=4$

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना $(1\times2)2=4$

दहाई की संख्या का वर्ग = $1\times1=1$

अतः संख्या 12 का वर्ग = 144 है।

तीन अंकों की संख्याओं का वर्ग ज्ञात करने के लिए उसे दो भागों में बाँटते हैं जिनका उपसूत्र अनुरूप्येण विधि से वर्ग ज्ञात करते हैं। ''अनुरूप्येण'' का अर्थ ''अनुरूपता अथवा समानुपात द्वारा।''

जैसे– 152 का वर्ग ज्ञात करना है तो 152 को 15 दहाई व 2 इकाईयों में बाँटा गया है।

$\underline{15}\,\underline{2}\times\underline{15}\,\underline{2}=$ इकाई की संख्या का वर्ग $=2^2=4$

इकाई एवं दहाई की संख्या का गुणा एवं दुगुना $=2\times15\times2=60$

दहाई की संख्या का वर्ग $=15^2=225$

$225/60/4$

$225+6/04$

$=\underline{23104}$

यहाँ हम देखते हैं कि जिस संख्या का वर्ग करना है उसको –

1. दाएँ से प्रथम भाग में दाईं संख्या का वर्ग ज्ञात करना।
2. मध्य भाग में मूल संख्या में स्थित अंकों को गुणा व उसका दुगुना करते हैं।
3. तीसरे भाग में मूल संख्या में स्थित दूसरे अंक का वर्ग करना।
4. संख्या को व्यवस्थित करना।

उदाहरण 28 संख्या 43 का वर्ग करना।

हल

$$\begin{array}{rccc} & \text{III} & \text{II} & \text{I} \\ 43^2 = & 4^2 & 4\times3 & 3^2 \\ & & 4\times3 & \\ \hline & 16 & 12 & 9 \\ & & +12 & \\ \hline & 16 & 24 & 9 \\ & 16+2 & & 49 \\ & & 1849 & \end{array}$$

(16 के साथ मध्य भाग (II) का हासिल जुड़ जाता है)

उदाहरण 29 $(132)^2$ $\underline{13}\ \underline{2}$ इसे दो भाग 13 व 2 में बाँटा

हल

$$\begin{array}{ccc} \text{III} & \text{II} & \text{I} \\ (13)^2 & 13\times2 & 2^2 \\ & +13\times2 & \\ \hline 169 & 26 & 4 \\ & 26 & \\ \hline 169 & 52 & 4 \\ & 169+5 & 24 \\ & 17424 & \end{array}$$

प्रश्नावली 6.6

1. उपयुक्त विधि से वर्ग ज्ञात कीजिए।

(i) 18 (ii) 42 (iii) 83 (iv) 127 (v) 136

6.10 वर्गमूल

किसी संख्या x को उसी संख्या x से गुणा किया जाए तो प्राप्त मान x^2, संख्या x की वर्ग संख्या है। इसे इस तरह समझा जाए कि x^2, $x \times x$ का एक युग्म है। अतः x^2 का वर्गमूल x है।

16 एक वर्ग संख्या है जो 4 × 4 का एक युग्म है अतः 16 का वर्गमूल 4 है।

वर्गमूल का संकेत $\sqrt{\ }$ है।

वर्गमूल संख्या के अंक

किसी संख्या की वर्ग संख्या में अंक, इस संख्या के अंकों की संख्या का दुगुना व दुगुने से एक कम अंक होता है। उसी तरह किसी वर्ग संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या यदि सम हो तो आधी एवं यदि विषम हो तो उस संख्या में 1 जोड़ कर आधी होती हैं। आइए सारणी का अवलोकन करें –

वर्ग संख्या में अंकों की संख्या विषम				वर्ग संख्या जब अंकों की संख्या सम			
वर्ग संख्या	अंकों की संख्या	वर्ग मूल	अंकों की संख्या	वर्ग संख्या	अंकों की संख्या	वर्ग मूल	अंकों की संख्या
1	1	1	$\frac{1+1}{2}=1$	16	2	4	$\frac{2}{2}=1$
100	3	10	$\frac{3+1}{2}=2$	81	2	9	$\frac{2}{2}=1$
961	3	31	$\frac{3+1}{2}=2$	1024	4	32	$\frac{4}{2}=2$
16641	5	129	$\frac{5+1}{2}=3$	108900	6	330	$\frac{6}{2}=3$

किसी पूर्ण वर्ग संख्या के दाहिनी ओर से (इकाई अंक) दो–दो अंकों के जोड़े बनाने पर जितने जोड़े बनते हैं उतने ही अंक उस संख्या की वर्गमूल संख्या में होते हैं। भले ही अन्तिम जोड़े में एक ही अंकशेष हो।

पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

1. पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 0, 1, 4, 5, 6 तथा 9 होता है अर्थात् जिस संख्या का इकाई अंक 2, 3, 7 व 8 होता है वह पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।
2. पूर्ण वर्ग संख्या के अन्त में शून्यों की संख्या सम होती है एवं शून्यों के पूर्व संख्या वर्ग संख्या हो। जिससे संख्या के अन्त में शून्यों की संख्या विषम होती है तो वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।
3. किसी संख्या का बीजांक 2, 3, 5, 6 व 8 हो तो वह पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

वर्गमूल ज्ञात करने की वैदिक विधि

1. सर्वप्रथम ज्ञात कीजिए कि संख्या पूर्ण वर्ग है अथवा नहीं?
2. यदि संख्या पूर्ण वर्ग हो तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करेंगे।
3. इकाई के अंक का पता लगाएँगे।

संख्या का चरम अंक	वर्गमूल का चरम अंक
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7

अब विलोकनम् विधि से निम्न दूसरी सारणी द्वारा ज्ञात कीजिए कि पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल का दहाई अंक क्या है ?

संख्या समूह	वर्गमूल का दहाई अंक
1 – 3	1
4 – 8	2
9 – 15	3
16 – 24	4
25 – 35	5
36 – 48	6
49 – 63	7
64 – 80	8
81 – 99	9

समूह 1–3 का अर्थ है कि इस समूह में 1, 2 व 3 संख्याएँ है और इन तीनों का सम्भावित वर्गमूल एक माना जा सकता है।

वर्गमूल ज्ञात करने की विलोकनम् विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 30 संख्या 361 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल संख्या को देखने पर निम्न निष्कर्ष प्राप्त हुए।

(i) संख्या 361 का इकाई अंक 1 है अतः पूर्ण वर्ग संख्या हो सकती है।

(ii) संख्या 361 का बीजांक = 3+1+6 = 10 अतः 10 का बीजांक = 1 + 0 = 1 यह पूर्ण वर्ग हो सकती है।

(iii) इस संख्या के वर्गमूल में दो अंक हो सकते हैं।

(iv) संख्या 361 में दाहिनी ओर से दो–दो अंकों के जोड़े बनाने पर दूसरे जोड़े में संख्या 3 रहती है अतः संख्या के वर्गमूल का दहाई अंक एक होगा।

(v) संख्या का चरम अंक 1 है अतः वर्गमूल का चरम अंक 1 या 9 होगा एवं दहाई अंक के लिए 3 है जो 1–3 समूह में होने से वर्गमूल में दहाई का अंक 1 होगा।

(vi) इस प्रकार 361 का वर्गमूल 11 अथवा 19 हो सकता है।

(vii) वर्गमूल के दहाई अंक 1 को उसके एकाधिक से गुणा कीजिए।

गुणनफल $= 1 \times 2 = 2$, दूसरे जोड़े का $3 >$ गुणनफल 2

अतः 11 अथवा 19 में से बड़ा वर्गमूल लेते हैं।

वर्गमूल = 19 उत्तर

उदाहरण 31 संख्या 5184 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल (i) प्रथम जोड़ा = 84 तथा द्वितीय जोड़ा = 51

(ii) प्रथम जोड़े का चरम अंक = 4 अतः सम्भावित वर्गमूल का चरम अंक 2 या 8 हो सकता है।

(iii) 51 में समाहित सबसे बड़ा वर्गमूल अंक = 7 अतः सम्भावित वर्गमूल 72 या 78

गुणनफल $= 7 \times 8 = 56$

(iv) $51 < 56$ है अतः छोटी संख्या ही वर्गमूल होगी। वर्गमूल = 72

विशेष – इस विधि से केवल 4 अंको तक की पूर्ण वर्ग संख्या का ही वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है।

प्रश्नावली 6.7

विलोकनम् विधि से वर्गमूल ज्ञात कीजिए –

(1)	169	(2)	324	(3)	576	(4)	2025
(5)	3025	(6)	9025	(7)	1024	(8)	441

6.11 भाग संक्रिया

जब किसी संख्या से किसी संख्या को क्रमशः कई बार घटाया जाता है तो क्रमशः घटाने की क्रिया को भाग संक्रिया कहा जाता है। जिस संख्या से घटाया जाता है, उसे भाज्य कहते हैं जिसे घटाया जाता है वह भाजक कहलाता है। किसी संख्या से किसी संख्या को जितने बार घटाया जा सकता है वह भाग संक्रिया का भागफल कहलाता है। किसी संख्या से किसी संख्या को अधिकतम बार घटाने से जो संख्या शेष रहती है। उसे शेषफल कहते है। शेषफल सदैव भाजक से छोटा होता है।

उदाहरण 32 संख्या 10 में क्रमशः संख्या 2 को घटाने पर।

हल $10-2 = 8$, $8-2 = 6$, $6-2 = 4$, $4-2 = 2$, $2-2 = 0$

यहाँ पर भाज्य 10 एवं भाजक 2 है घटाने की संक्रिया 5 बार की गयी है। जब शेष भाजक से छोटी संख्या प्राप्त हुई है। अतः भागफल = 5 शेषफल = 0।

6.11.1 परावर्त्य योजयेत् विधि– जब भाजक आधार के निकट होता है तब इस विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि में भाजक की आधार संख्या से भाज्य में भाग देकर अनुमानित भागफल एवं शेषफल ज्ञात कर लिया जाता है।

इसके दो प्रकार है (क) जब भाजक आधार संख्या से बड़ा हो।
(ख) जब भाजक आधार संख्या से छोटा हो।

(क) जब भाजक आधार संख्या से बड़ा हो –

(1) भाजक का आधार संख्या से विचलन ज्ञात करते हैं।

(2) विचलन का परावर्त्य करके संशोधन गुणक ज्ञात करते हैं। (चिह्न बदलते हैं)

(3) भाज्य का प्रथम अंक छोड़कर संशोधन गुणक से भाग देते हैं।

(4) भाग संक्रिया को 3 खण्डों में विभाजित करना है। उदाहरण से समझें।

उदाहरण 33 4656 ÷ 11 को हल कीजिए ।

हल

भाजक	11	4 6 5	6
आधार	10	$\bar{4}$ -	-
विचलन	1	$\bar{2}$	$\bar{3}$
संशोधन गुणांक	$\bar{1}$		
भागफल		**4 2 3**	**3** शेषफल

क्रियाविधि–

1. भाग संक्रिया को पूर्ण करने के लिए पहले तीन खण्ड बनाना।
2. प्रथम खण्ड में भाजक, द्वितीय खण्ड में भाज्य तथा तृतीय खण्ड में आधार के अनुसार आधार में जितने शून्य हैं उतने ही अंक रखना है। जैसे – उदाहरण–1 में आधार 10 है तो तृतीय खण्ड में 1 अंक रखते हैं जबकि उदाहरण–2 में आधार 100 है व तीसरे खण्ड में 2 अंक रखते हैं।
3. आधार, विचलन एवं संशोधन गुणांक ज्ञात करना।
4. भाज्य संख्या का बाँईं और का प्रथम अंक नीचे लिखना।
5. नीचे लिखे अंक का संशोधन गुणक से गुणा करके भाज्य के आगे की संख्या के नीचे लिखना।
6. घटाकर का नीचे लिखना फिर उसका संशोधन गुणक से गुणा करना। इसी क्रिया को आगे तब तक करेंगे जब तक तृतीय खण्ड में अंक आ जाएँ।

उदाहरण 34 35984 ÷ 112 को हल कीजिए।

हल

भाजक	1 1 2	3 5 9	8 4
आधार	1 0 0	$\bar{3}\ \bar{6}$	- -
विचलन	1 2	$\bar{2}$	$\bar{4}$
संशोधन गुणांक	$\bar{1}\ \bar{2}$		$\bar{1}\ \bar{2}$
	भागफल	**3 2 1**	32 शेषफल

(ख) जब भाजक आधार संख्या से छोटा हो–

पूर्व में की गई क्रिया विधि के अनुसार ही हल करना है। उदाहरण से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 35 30103 ÷ 9 को हल कीजिए।

हल

भाजक	9	3 0 1 0	3
आधार	1 0	3 - -	-
विचलन	$\bar{1}$	3 -	-
संशोधन गुणांक	1	4	4
	भागफल	**3 3 4 4**	7 शेषफल

ध्यान रहे इस बार संशोधन गुणांक धनात्मक है अतः यह अगली संख्या में जुड़ेगा।

दिए गए उदाहरण में 9 का भाग देना है जो नजदीकी आधार 10 से एक कम है।

भाज्य में प्रथम अंक 3 को तो ज्यों का त्यों भागफल में लिख देंगे फिर 3 की संशोधन गुणांक (+1) से गुणा कर अगली संख्या 0 में जोड़ेंगे भागफल 3 आया जिसे आड़ी संख्या के नीचे लिखेंगे, पुनः इसे संशोधन गुणांक संख्या से गुणाकर अगली संख्या में जोड़ेंगे और भागफल में लिखेंगे और यही क्रम आखिर तक चलेगा।

उदाहरण 36 11022 ÷ 89 को हल कीजिए।

हल

भाजक	8 9	1 1 0	2 2
आधार	1 0 0	1 1	-
विचलन	$\bar{1}\ \bar{1}$	2	2
संशोधन गुणांक	1 1		3 3
	भागफल	**1 2 3**	75 शेषफल

प्रश्नावली 6.8

निम्न प्रश्नों को हल कीजिए।

(1) $23244 \div 11$	(2) $12064 \div 12$	(3) $1234 \div 112$
(4) $324842 \div 101$	(5) $2012 \div 9$	(6) $10321 \div 98$

हमने सीखा

(1) सूत्र संकलन व्यवकलनाभ्याम् के आधार पर संख्याओं को 10 या 10 का गुणक से विचलन कर जोड़ एवं व्यवकलन करवाया गया।

(2) सूत्र पूरणापूरणाभ्याम् के द्वारा दो संख्याओं को पूर्ण के नजदीक बनाकर जोड़ व व्यवकलन करवाया गया।

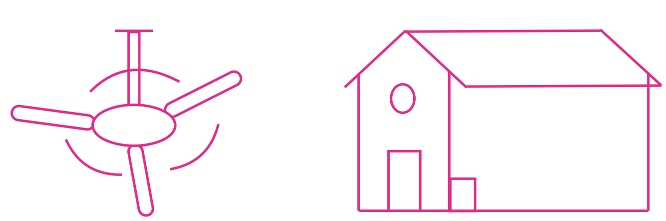
(3) सूत्र निखिलम नवतः चरमंदशतः का उपयोग कर व्यवकलन कराने का प्रयास कराया गया।

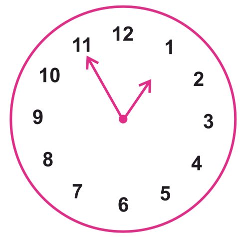
(4) वैदिक गणित की कुछ मनोरंजक गुणनविधियाँ सीखी है, जिसमें 10, 100, 1000, 5, 50, 500 व 11 से गुणा के सरल तरीके जो मौखिक हो सकते हैं को लिखने का प्रयास किया गया। एक न्यूनेन से 99,99,999 के गुणा करने का प्रयास किया।

(5) भिन्न, भिन्नों का योग, व्यवकलन, गुणा के सरलतम तरीकों के साथ वर्गमूल एवं भाग वैदिक विधि में क्रमशः उपसूत्र आनुरूपेण, विलोकनम् व निखिलम् विधि से सरलता से ज्ञात किए जा सकेंगे।

अध्याय 7 कोण एवं रेखाएँ

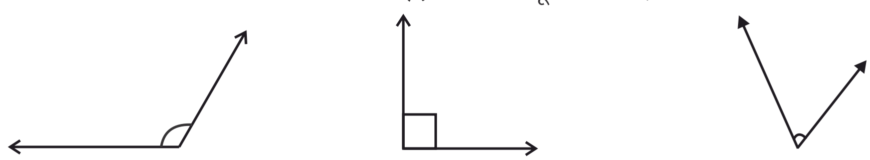
7.1 नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए।





(i) (ii) (iii)

प्रत्येक चित्र में बनने वाले कोणों को देखकर बताइए कि यह न्यून कोण है, समकोण है अथवा अधिक कोण है।

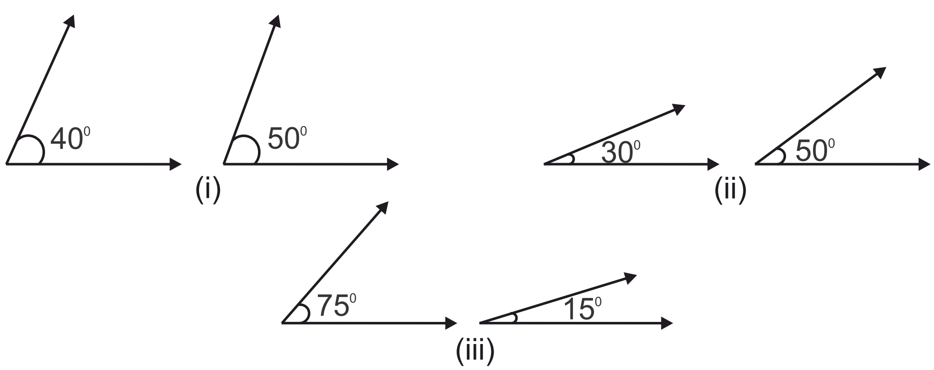


....

7.1.1 पूरक कोण

जब दो कोणों का योग 90° के बराबर होता है तो वह परस्पर **पूरक कोण** कहलाते हैं जैसे 30° का पूरक कोण 60° होगा तथा 60° का पूरक कोण 30° होगा ($30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$) । बताइए 45° का पूरक कोण क्या होगा?

नीचे दिए गए कोणों के जोड़ों में कौन–कौन से पूरक कोण है ?

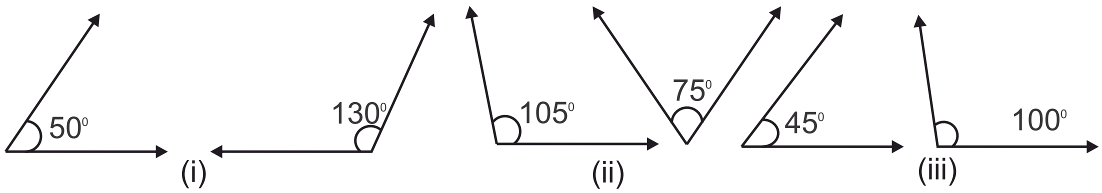


करो और सीखो

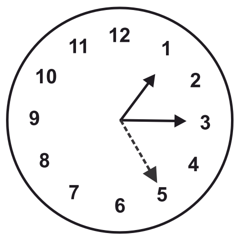
1. क्या दो न्यून कोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं ?
2. क्या दो अधिक कोण एक दूसरे के पूरक कोण हो सकते हैं ?
3. समकोण का पूरक कोण क्या होता है ?

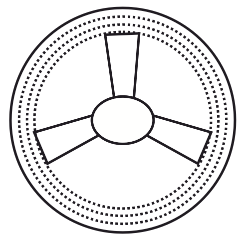
7.1.2 संपूरक कोण

जब दो कोणों का योग 180° होता है तो ये कोण एक दूसरे के **संपूरक कोण** कहलाते हैं। नीचे दिए गए कोणों के युग्म में कौन–कौन से संपूरक कोण हैं।



7.1.3 आसन्न कोण

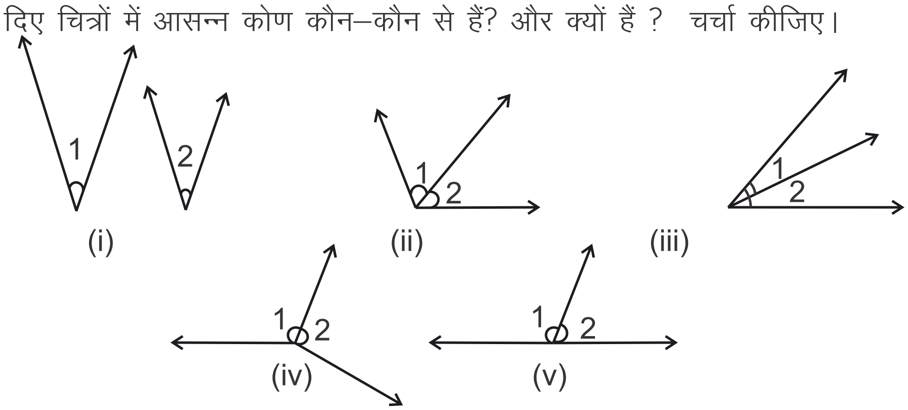




इन चित्रों में आपको दो–दो कोण आपस में जुड़े हुए दिख रहे हैं।
इस तरह से दो जुड़े हुए कोण आप और कहाँ – कहाँ देखते हैं ?
कोणों के ऐसे युग्म आसन्न कोण कहलाते हैं।

आसन्न कोणों में एक उभयनिष्ठ शीर्ष तथा एक उभयनिष्ठ भुजा होती है, तथा दोनों कोण उभयनिष्ठ भुजा के एक ही ओर न होकर विपरित ओर होते हैं।

नीचे दिए चित्रों में आसन्न कोण कौन–कौन से हैं? और क्यों हैं ? चर्चा कीजिए।



महक की कक्षा में चर्चा इस प्रकार हुई।

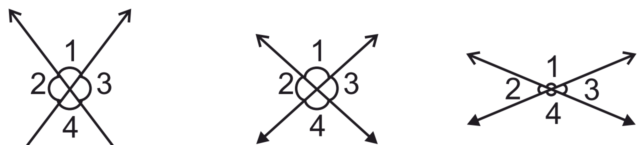
महक : चित्र (i) और (iii) में आसन्न कोण नहीं बन रहे हैं। क्योंकि चित्र (i) मे उभयनिष्ठ शीर्ष नहीं है और चित्र (iii) में उभयनिष्ठ भुजा बीच में नहीं है।

चन्दा : हाँ बाकी तीनों चित्रों में आसन्न कोण बन रहे हैं, और चित्र (v) में तो दोनों भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं है वे मिलकर एक सरल रेखा भी बना रही है।

महक : सरल रेखा तो 180^0 का कोण बनाती है।

रैखिक कोण युग्म– ऐसे आसन्न कोण जिसमें उभयनिष्ठ भुजा के दोनों तरफ बने कोणों का योग 180^0 होता है, रैखिक कोण युग्म कहलाते हैं। ये कोण संपूरक भी होते हैं।

7.1.4 सम्मुख कोण (शीर्षाभिमुख कोण)



(i) (ii) (iii)

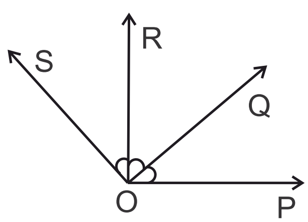
दिए गए चित्रों को ट्रेस पेपर की सहायता से एक कागज पर बना लीजिए। अब प्रत्येक चित्र के चारों कोणों को कैंची से काटकर अलग–अलग कर लीजिए।

अब कोणों को एक दूसरे के ऊपर रखकर देखें, कौन–कौन से कोण बराबर हैं।

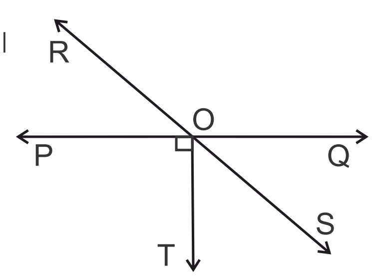
आप यह पाएँगे कि प्रत्येक चित्र में कोण 1, कोण 4 के तथा कोण 2, कोण 3 के बराबर है। यह कोण युग्म $\angle 1$, $\angle 4$ तथा $\angle 2$, $\angle 3$ शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं, **शीर्षाभिमुख कोण** दो रेखाओं के किसी बिन्दु पर काटने से निर्मित होते हैं।

प्रश्नावली 7.1

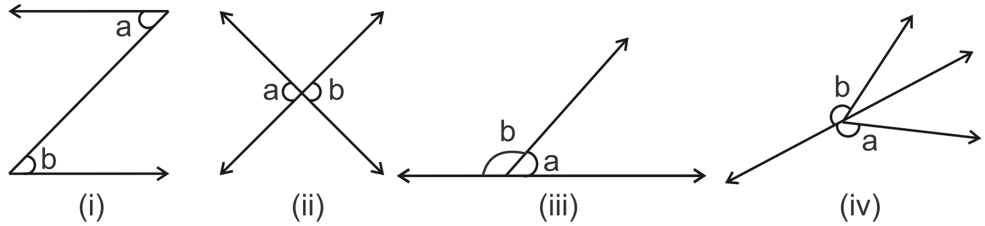
1. कोणों के निम्नलिखित जोड़ों में से पूरक और संपूरक जोड़ों को अलग–अलग लिखिए।
   (i) $140^0, 40^0$ (ii) $170^0, 10^0$ (iii) $75^0, 15^0$
   (iv) $33^0, 57^0$ (v) $115^0, 65^0$ (vi) $25^0, 65^0$
2. ऐसे कोण युग्म ज्ञात कीजिए जो एक दूसरे के पूरक हों और दोनों समान भी हों।
3. एक समकोण के संपूरक कोण का मान क्या होगा?
4. नीचे दिए गए चित्र में आसन्न कोणों के युग्म लिखिए।



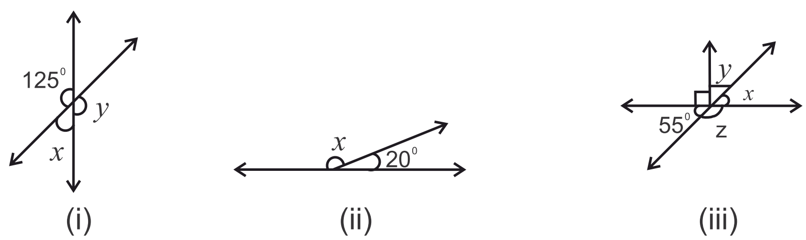
5. दिए गए चित्र में निम्नलिखित कोणों के युग्म ज्ञात कीजिए।
(i) समान संपूरक कोण
(ii) असमान संपूरक कोण
(iii) शीर्षाभिमुख कोण
(iv) आसन्न कोण जो रैखिक युग्म नहीं है
(v) आसन्न पूरक कोण



6. निम्न में से कौनसी आकृतियों में कोण a व b आसन्न कोण हैं।



7. निम्नलिखित में अज्ञात कोणों का मान ज्ञात कीजिए ।



8. सत्य या असत्य लिखिए।

(i) रैखिक युग्म बनाने वाले दोनों कोणों का योग 180° होता है।

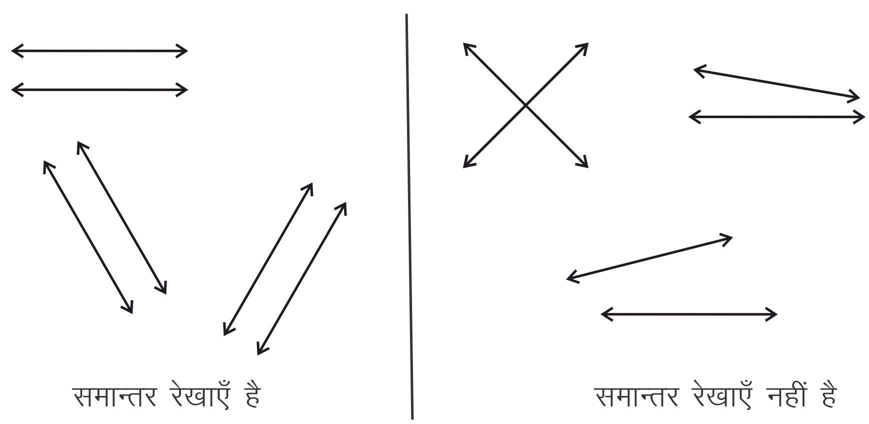
(ii) शीर्षाभिमुख कोणों के मापों का योग 90^0 होता है।

(iii) यदि दो कोण संपूरक हैं तो उनके मापों का योग 180° होता है।

(iv) यदि दो आसन्न कोण संपूरक हो तो वे रैखिक कोण युग्म कहलाते हैं।

7.2 रेखा युग्म

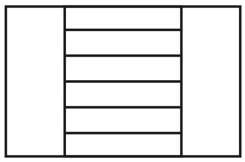
नीचे दिए गए रेखा युग्मों को देखिए।

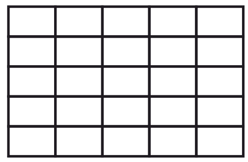


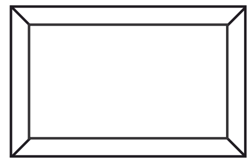
7.2.1 समान्तर रेखाएँ

दो समतलीय रेखाएँ जो एक दूसरे को नहीं काटती है अर्थात् इनके बीच की लम्बवत दूरी सदैव समान रहती हैं, **समान्तर रेखाएँ** कहलाती है।

नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए और उनमें समान्तर रेखाएँ ढूँढिए।


खिड़की

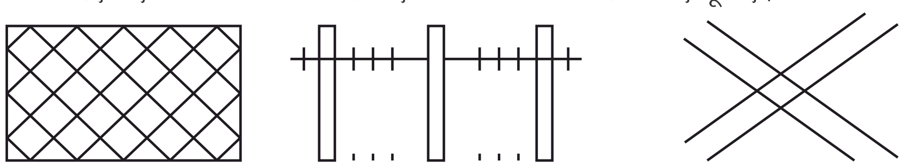

ग्रिड पेपर


ब्लेक बोर्ड

7.2.2 प्रतिच्छेदी रेखाएँ

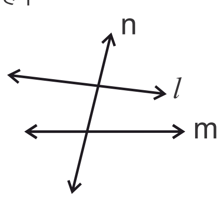
ऐसी रेखाएँ जो समान्तर नहीं होती है अर्थात् एक दूसरे को काटती है, प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती है।

नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए और उनमें प्रतिच्छेदी रेखाएँ ढूँढिए।

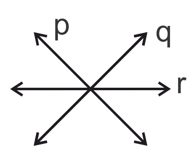


7.2.3 तिर्यक छेदी रेखाएँ

एक ऐसी रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।



चित्र–A



चित्र–B

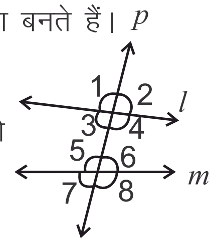
चित्र – A में रेखा युग्म l तथा m को तिर्यक छेदी रेखा n दो अलग–अलग बिन्दुओं पर काटती है। क्या चित्र B में कोई तिर्यक छेदी रेखा है? हम देखते हैं कि चित्र B में सभी रेखाएँ एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। अतः ये तिर्यक छेदी रेखा का उदाहरण नहीं है।

करो और सीखो

1. एक रेखा युग्म के लिए कितनी तिर्यक छेदी रेखाएँ खींची जा सकती है ?
2. यदि तीन रेखाओं पर एक तिर्यक छेदी रेखा खींची जाए तो कितने प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त होंगे ?

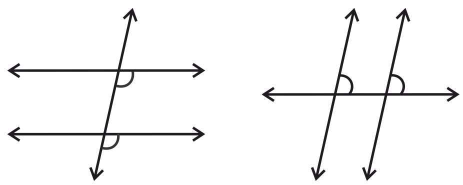
7.2.3.1 तिर्यक छेदी रेखा द्वारा बनने वाले कोण

जब रेखा l तथा m को तिर्यक छेदी रेखा (p) काटती है तो 8 विभिन्न कोण बनते हैं। चित्र में इन 8 कोणों को देखिए।



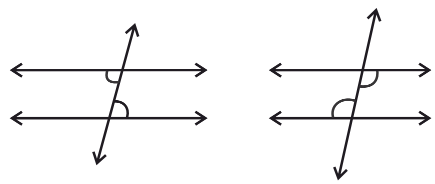
इन कोणों में बाहर की ओर बनने वाले कोण $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ व $\angle 8$ हैं, ये बाह्य कोण कहलाते हैं। इसी प्रकार अंदर की ओर बनने वाले कोण $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ व $\angle 6$ अन्तः कोण कहलाते हैं।

संगत कोण



संगत कोण F आकार बनाते हैं।

एकान्तर कोण

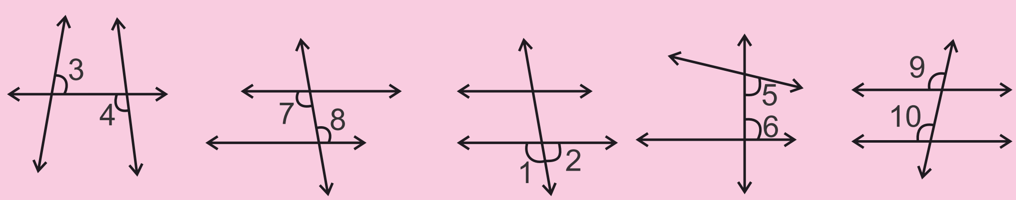


एकान्तर कोण में Z आकृति बनती है।

संगत कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 5$, $\angle 2$ व $\angle 6$, $\angle 3$ व $\angle 7$, $\angle 4$ व $\angle 8$
एकान्तर अन्तः कोण युग्म	$\angle 3$ व $\angle 6$, $\angle 4$ व $\angle 5$
एकान्तर बाह्य कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 8$, $\angle 2$ व $\angle 7$
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोण युग्म	$\angle 3$ व $\angle 5$, $\angle 4$ व $\angle 6$
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर बने बाह्य कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 7$, $\angle 2$ व $\angle 8$

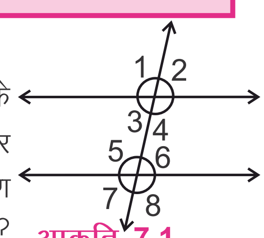
करो और सीखो

प्रत्येक आकृति में कोण युग्म को पहचान कर उनके नाम लिखिए।



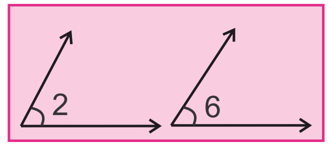
7.2.3.2 समान्तर रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा

दिए गए चित्र को देख कर एक कागज पर बनाइए। अब इसके सभी कोणों को अलग–अलग काट लीजिए। अब $\angle 2$ को $\angle 6$ पर रखकर देखिए क्या ये बराबर है ? इसी प्रकार सभी संगत कोण युग्मों को एक दूसरे पर रखकर देखिए, क्या वह आपस में बराबर है ?



आकृति 7.1

आप पाएँगे कि समान्तर रेखाओं के संगत कोण बराबर है। इसी प्रकार कोणों की कटिंग्स को एक दूसरे पर रखकर निम्न तथ्यों की जाँच कीजिए। क्या एकान्तर कोण युग्म बराबर है ? उक्त क्रियाकलाप से निम्न परिणामों की प्राप्ति होती है।



यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक छेदी रेखा काटती है तो बनने वाले एकान्तर कोण आपस में बराबर होंगे।

आकृति 7.1 में $\angle 3 + \angle 1 = 180^0$ ($\angle 3$ और $\angle 1$ रैखिक कोण युग्म बनाते हैं)

परन्तु $\angle 1 = \angle 5$ (संगत कोण युग्म)

इस प्रकार $\angle 5 + \angle 3 = 180^0$

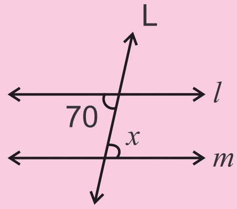
इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम की प्राप्ति होती है।

यदि दो समान्तर रेखाएँ किसी एक तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती है तो तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

करो और सीखो

1. निम्न चित्रों को देखिए और बताइए।

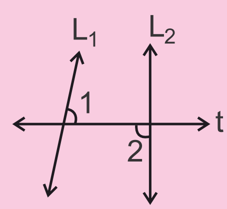
(i)



$l || m$, L एक तिर्यक छेदी रेखा है।

$\angle x = ?$

(ii)

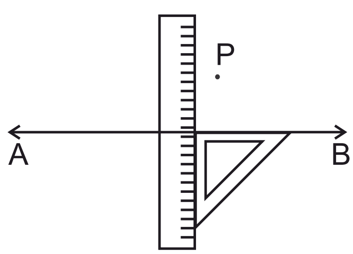


L_1, L_2 दो रेखाएँ तथा t एक तिर्यक छेदी रेखा है।

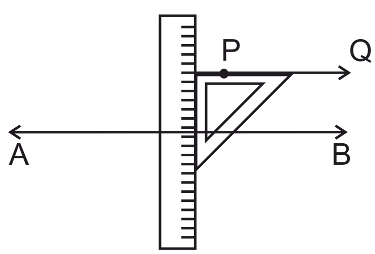
क्या $\angle 1 = \angle 2$ है ?

7.3.1 किसी बाह्य बिन्दु से दी गई रेखा के समान्तर रेखा खींचना

एक रेखा AB दी गई है और उसके बाहर बिन्दु P दिया गया है, P से AB के समान्तर रेखा खींचनी है।



(i)

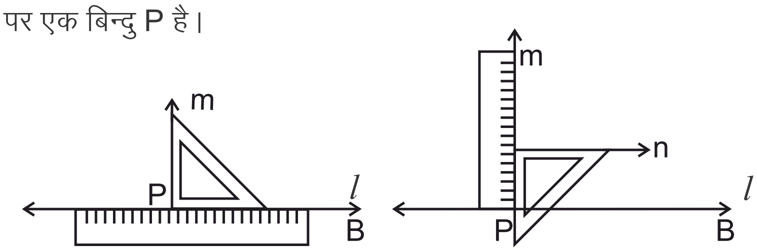


(ii)

चित्रानुसार स्केल व सेट स्क्वायर की सहायता से समान्तर रेखा खींच सकते हैं।

7.3.2 दी गई रेखा के समान्तर दी हुई दूरी पर रेखा खींचना

रेखा l पर एक बिन्दु P है।



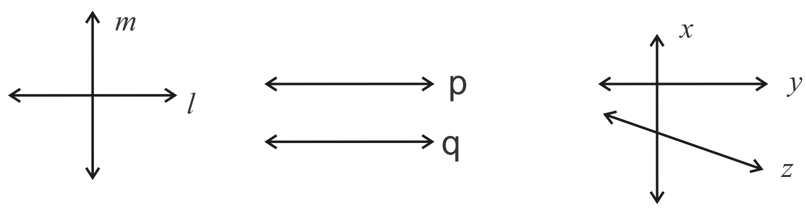
(i) (ii)

– चित्र (i) में दिखाए अनुसार सेट स्क्वायर के समकोण वाले सिरे को रेखा l पर सटा कर रखिए और बिन्दु P पर एक लम्बवत रेखा खींचिए।

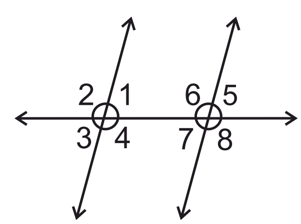
– चित्र (ii) में दिखाए अनुसार सेट स्क्वायर को बिन्दु P पर घुमा कर रखिए और दूसरे सिरे पर रेखा n (दी गई दूरी पर) रेखा l के समान्तर बनाइए।

प्रश्नावली 7.2

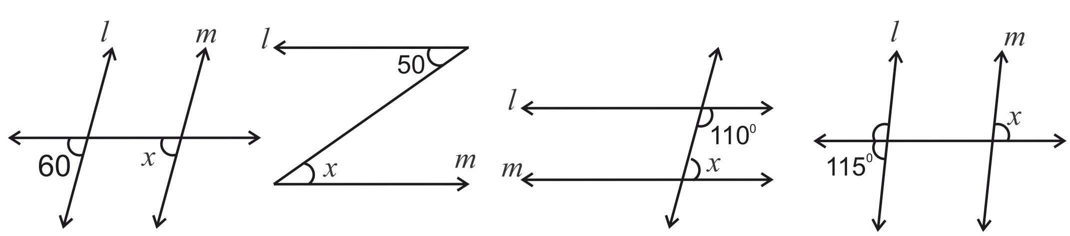
1. दिए गए चित्र में समान्तर, प्रतिच्छेदी तथा तिर्यक छेदी रेखाओं के नाम लिखिए।



2. दिए गए चित्र में बताइए।
   (i) अन्तः एकान्तर कोणों के नाम
   (ii) बाह्य एकान्तर कोणों के नाम
   (iii) संगत कोणों के नाम
   (iv) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का नाम।

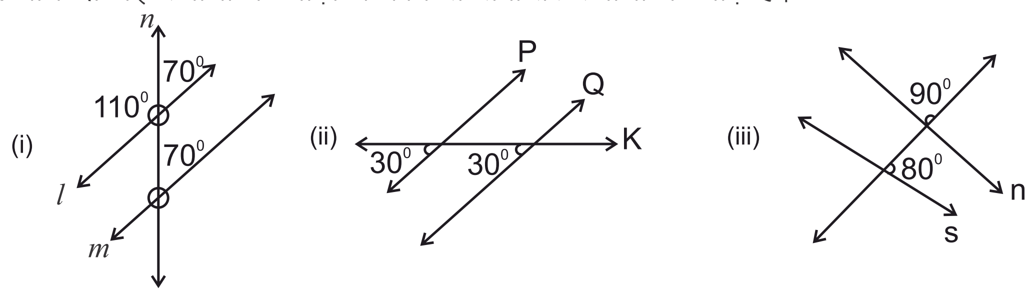


3. यदि $l \parallel m$ हो तो x का मान बताइए ।

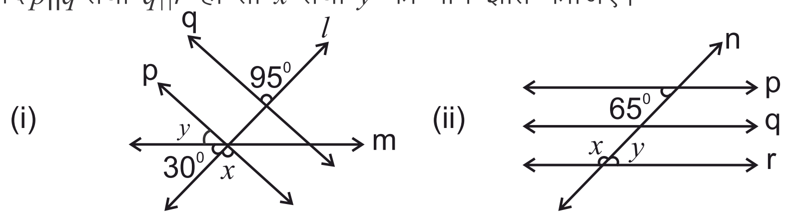


(i) (ii) (iii) (iv)

4. नीचे दी गई रेखाओं के जोड़ो में कौन से समान्तर रेखाओं के जोड़े हैं।



5. यदि $p||q$ तथा $q||r$ हो तो x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।

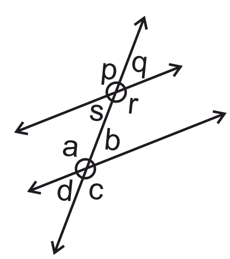


6. एक रेखा PQ खींचिए और इसके समान्तर रेखा RS खींचिए।

7. एक रेखा AB खींचिए और रेखा AB पर स्थित किसी बिन्दु से लंब खींचिए। इस लंब रेखा पर AB से 5 सेमी दूरी पर एक बिन्दु C लीजिए। C से होकर AB के समान्तर रेखा खींचिए।

हमने सीखा

1. (i) जब दो कोणों का योग 90^0 हो तो वह परस्पर पूरक कोण कहलाते हैं।
   (ii) पूरक कोणों में प्रत्येक कोण न्यून कोण होता है।
2. (i) यदि दो कोणों का योग 180^0 हो तो वह परस्पर संपूरक कोण कहलाते हैं।
   (ii) संपूरक कोणों के युग्म में एक कोण न्यून कोण, समकोण या अधिक कोण हो सकता है।
   (iii) दो समकोण सदैव एक दूसरे के संपूरक होते हैं।
3. उभयनिष्ठ भुजा एवं उभयनिष्ठ शीर्ष के दोनों और निर्मित कोणों को आसन्न कोण कहते हैं।
4. जब आसन्न कोण संपूरक कोण हो तो वह रैखिक युग्म बनाते हैं।
5. (i) जब दो रेखाएँ एक बिन्दु (शीर्ष बिन्दु) पर प्रतिच्छेदित होती है तो दोनों रेखाओं के आमने–सामने बनने वाले कोण को शीर्षाभिमुख कोण कहते हैं।
   (ii) शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म हमेशा समान होते हैं।
6. (i) एक रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को अलग–अलग बिन्दुओं पर काटती हो तो वह तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।
   (ii) इस स्थिति में दो रेखाओं पर काटने वाली रेखा आठ कोण बनाती है, जो इस चित्र में दर्शायी गई है।



क्र.सं.	कोणों के प्रकार	युग्मों की संख्या	कोण
1.	अन्तः कोण	–	$\angle s$, $\angle r$, $\angle a$, $\angle b$
2.	बाह्य कोण	–	$\angle p$, $\angle q$, $\angle c$, $\angle d$
3.	शीर्षाभिमुख कोण	4 युग्म	($\angle p$, $\angle r$)($\angle q$, $\angle s$)($\angle a$, $\angle c$)($\angle b$, $\angle d$)
4.	संगत कोण	4 युग्म	($\angle a$, $\angle p$)($\angle b$, $\angle q$)($\angle c$, $\angle r$)($\angle d$, $\angle s$)
5.	एकान्तर अन्तः कोण	2 युग्म	($\angle s$, $\angle b$) ($\angle a$, $\angle r$)
6.	एकान्तर बाह्य कोण	2 युग्म	($\angle p$, $\angle c$) ($\angle q$, $\angle d$)
7.	तिर्यक रेखा के एक ओर बनने वाले अन्तः कोण	2 युग्म	($\angle b$, $\angle r$) ($\angle a$, $\angle s$)

7. जब तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे तो :

(i) संगत कोण आपस में समान होते हैं।

(ii) एकान्तर अन्तःकोण समान होते हैं।

(iii) एकान्तर बाह्यकोण समान होते हैं।

(iv) तिर्यक रेखा के एक ओर बनने वाले अन्तःकोण संपूरक होते हैं।