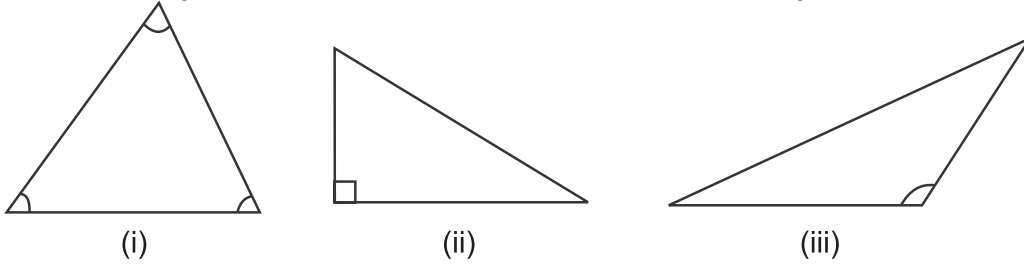


अध्याय 8

त्रिभुज और उसके गुण

8.1 त्रिभुज तीन रेखाखण्डों से बनी हुई बंद सरल आकृति है। जिसमें तीन भुजाएँ, तीन कोण तथा तीन शीर्ष होते हैं। त्रिभुज का वर्गीकरण भुजाओं और कोणों के आधार पर किया जाता है। नीचे बने त्रिभुजों को ध्यान से देखिए।



आप इनके कोणों में क्या विशेषता देखते हैं?

त्रिभुज (i) के तीनों कोण न्यून कोण है इसलिए इसे न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं।

त्रिभुज (ii) में एक कोण समकोण है इसलिए इसे समकोण त्रिभुज कहते हैं।

त्रिभुज (iii) में एक कोण अधिक कोण है इसलिए इसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।

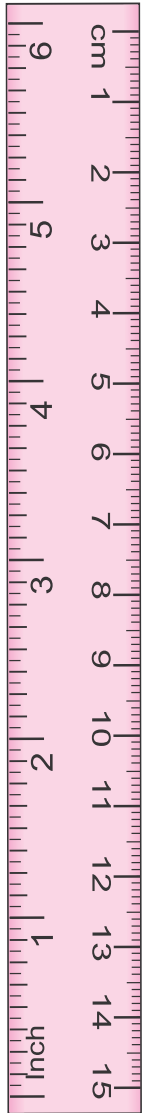
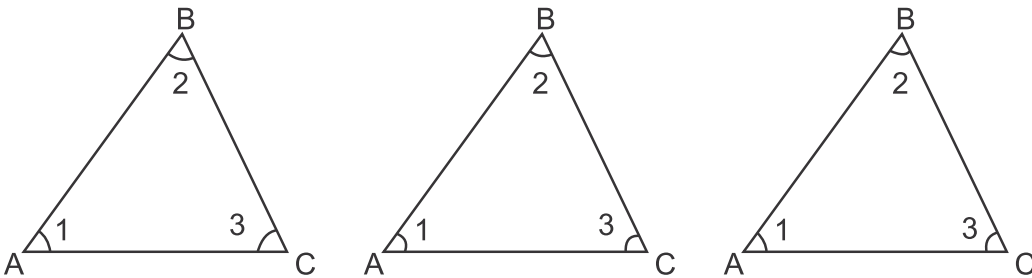
क्या त्रिभुज के किसी एक कोण को बदलने पर उसके अन्य दो कोणों की माप भी बदलती है ?

आप अलग-अलग त्रिभुज बनाकर जाँचें और तालिका में भरें—

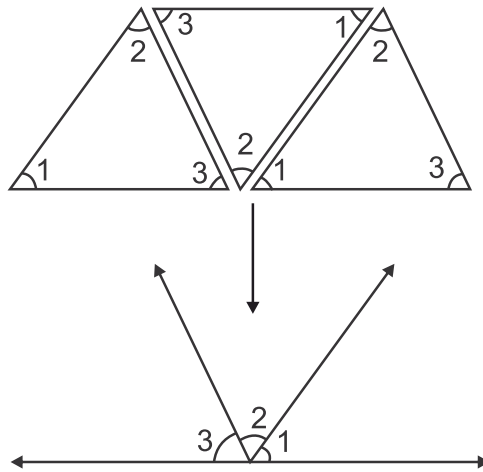
त्रिभुज का नाम	कोणों की माप
ΔABC	$\angle A=50^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=70^\circ$
ΔABC	$\angle A=30^\circ, \angle B=.....^\circ, \angle C=.....^\circ$
ΔABC	$\angle A=100^\circ, \angle B=.....^\circ, \angle C=.....^\circ$

8.2 त्रिभुज के अंतःकोणों का योग गुण

1. तीन समान माप की भुजा व कोण के त्रिभुज बनाकर उन्हें काटिए।



2. तीनों त्रिभुजों को नीचे दिए अनुसार जमाइए ।



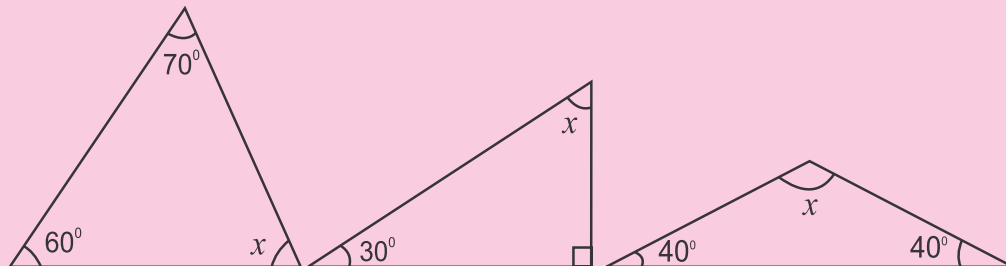
$\angle 1$, $\angle 2$ व $\angle 3$ मिलकर एक सरल कोण का निर्माण करते हैं। अतः $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

आप भी इसी प्रकार के कुछ और त्रिभुज बनाकर तथ्य की जाँच कीजिए ।

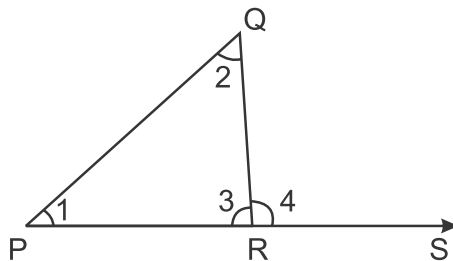
करो और सीखो

नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज में x का मान ज्ञात कीजिए ।

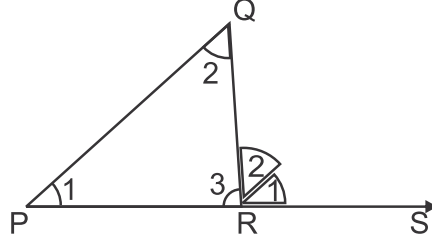


8.3 त्रिभुज के बाह्य कोण एवं इसके गुण

1. एक त्रिभुज PQR बनाइए और इसकी एक भुजा PR को बढाइए ।



2. त्रिभुज PQR के समान भुजा व कोण का एक और त्रिभुज बनाकर उसके $\angle 1$ व $\angle 2$ को काट कर नीचे दिए गए चित्रानुसार त्रिभुज PQR के बाह्य कोण $\angle QRS$ पर जमाइए ।



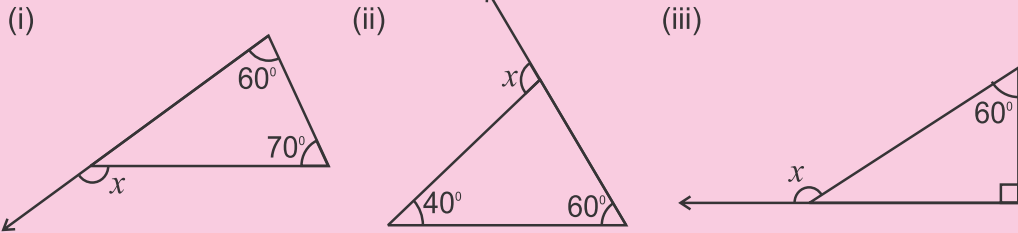
हम देखते हैं कि कोण $\angle 1$ व $\angle 2$ त्रिभुज PQR के बाह्य कोण $\angle QRS$ को पूरी तरह से ढक लेते हैं ।

$$\text{अतः } \angle QRS = \angle P + \angle Q$$

किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अंतः कोणों के योग के बराबर होता है ।

करो और सीखो

1. निम्न चित्रों में बाह्य कोण x का मान ज्ञात कीजिए ।

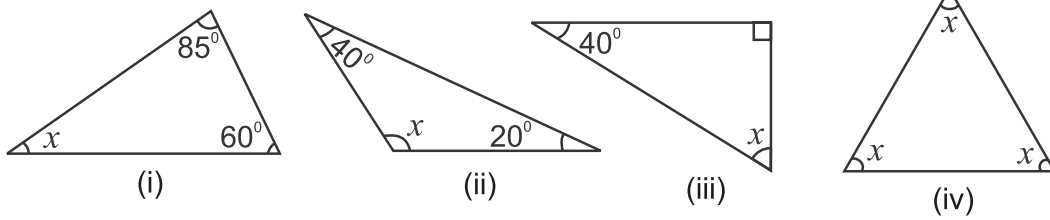


2. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसके दो कोण समकोण हो ?

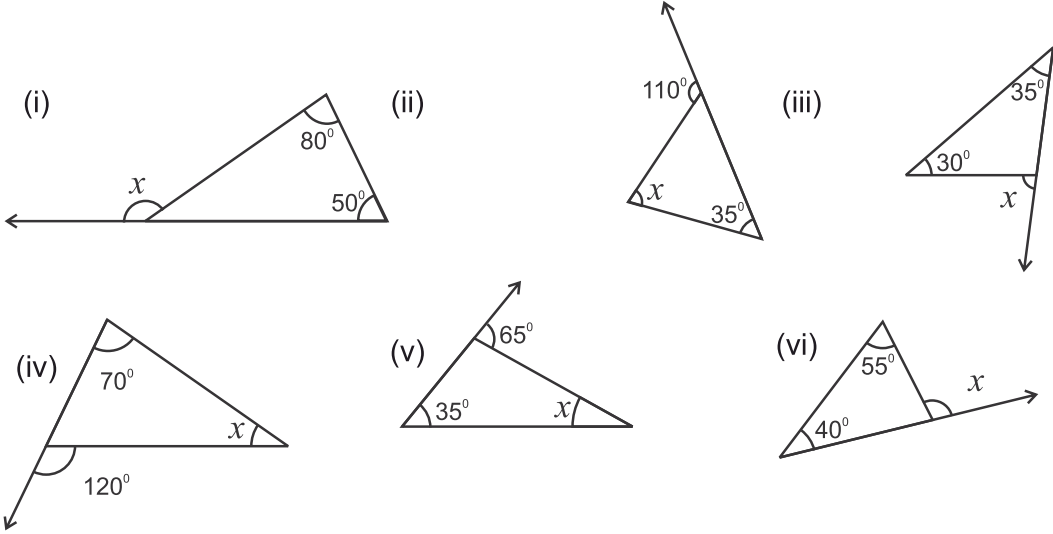
3. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसके तीनों कोण 60° से अधिक हो ?

प्रश्नावली 8.1

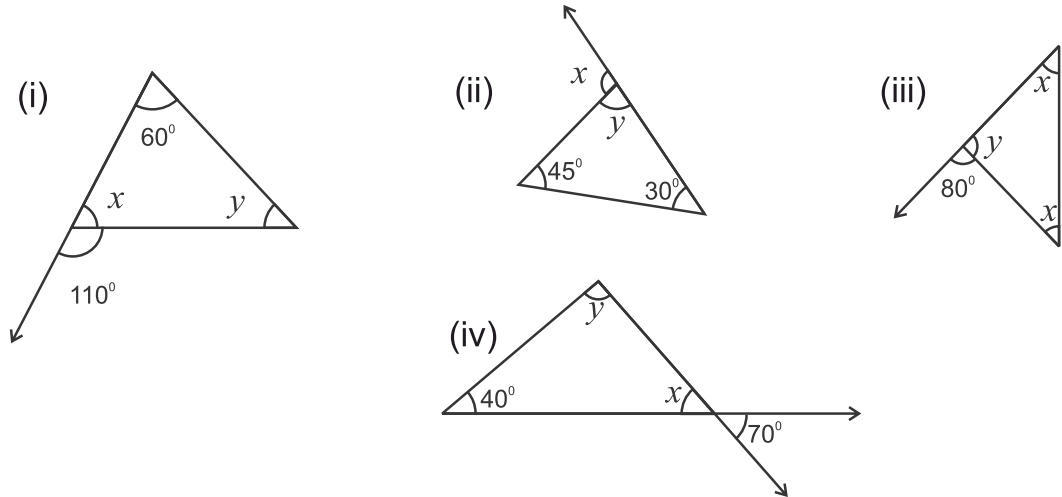
1. नीचे दिये गए त्रिभुजों में अज्ञात कोण x का मान ज्ञात कीजिए ।



2. नीचे दी गई आकृतियों में अज्ञात कोण x का मान ज्ञात कीजिए ।



3. नीचे दी गई आकृतियों में अज्ञात कोण x व y का मान ज्ञात कीजिए ।



4. किसी समकोण त्रिभुज का एक न्यून कोण 45° का है तो इसका दूसरा न्यून कोण ज्ञात कीजिए ।

5. किसी त्रिभुज के दो कोण $50^\circ, 50^\circ$ हो तो तीसरा कोण ज्ञात कीजिए ।

6. किसी त्रिभुज के कोण $1 : 2 : 3$ अनुपात में हो तो त्रिभुज का प्रत्येक कोण ज्ञात कीजिए ।

7. क्या ऐसा समकोण त्रिभुज संभव है जिसके दो कोण क्रमशः 70° व 21° हैं? नहीं, तो क्यों ? स्पष्ट कीजिए ।

8. नीचे कुछ कोणों के त्रिक दिए गए हैं बताइए इनमें से कौन-कौन से, त्रिभुज के कोणों को प्रदर्शित करते हैं ?

- (i) $100^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ (ii) $30^\circ, 59^\circ, 91^\circ$ (iii) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (iv) $120^\circ, 30^\circ, 50^\circ$

8.4 किसी त्रिभुज की भुजाओं की माप में सम्बन्ध

8.4.1 त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग

नीचे दिए गए मापों के अनुसार त्रिभुज बनाइए।

1. 5 सेमी, 4 सेमी, 6 सेमी नाप का त्रिभुज XYZ ।
2. 6.5 सेमी, 4.5 सेमी, 3 सेमी नाप का त्रिभुज MNO ।
3. 5 सेमी, 6 सेमी, 12 सेमी नाप का त्रिभुज PQR ।
4. 2.0 सेमी, 3 सेमी, 5 सेमी नाप का त्रिभुज UVW ।

क्या आप सभी माप के त्रिभुज बना पाए ? नहीं तो क्यों ? साथियों से चर्चा करें। आपने जो त्रिभुज बनाए उसकी भुजाओं की माप तालिका में दिखाए अनुसार भरिए।

त्रिभुज का नाम	भुजा का माप	दो भुजाओं का योग	भुजाओं में संबंध	दो भुजाओं का योग तीसरी से अधिक है	त्रिभुज बना हाँ/ नहीं
ΔXYZ	$x = 5$ $y = 4$ $z = 6$	$x + y = 5 + 4$ $y + z = 4 + 6$ $z + x = 6 + 5$	$x + y > z$ $9 > 6$ $y + z > x$ $10 > 5$ $z + x > y$ $11 > 4$	हाँ हाँ हाँ	
ΔMNO	$m =$ $n =$ $o =$	$m + n =$ $n + o =$ $o + m =$			
ΔPQR	$p =$ $q =$ $r =$	$p + q =$ $q + r =$ $r + p =$			
ΔUVW	$u =$ $v =$ $w =$	$u + v =$ $v + w =$ $w + u =$			

इस तालिका से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की मापों का योग हमेशा तीसरी भुजा के माप से अधिक होता है।

8.4.2 त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का अन्तर

इसी प्रकार दो भुजाओं की माप के अन्तर पर विचार कीजिए । आपने क्या देखा ?

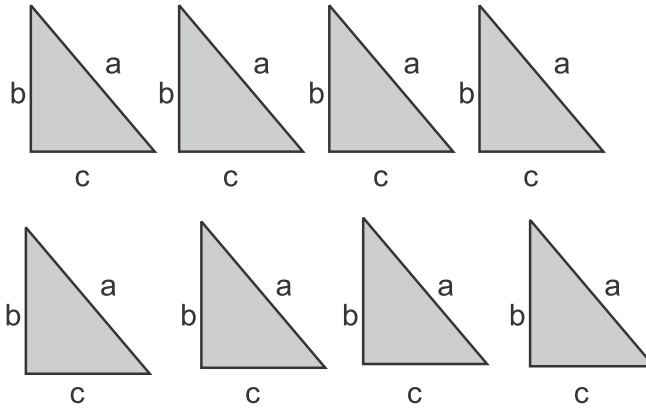
क्या किन्हीं दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से कम है, अधिक है अथवा बराबर है ? ऐसे कई त्रिभुजों की भुजाओं को जाँचने पर आप पाएँगे कि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से छोटा होता है ।

करो और सीखो

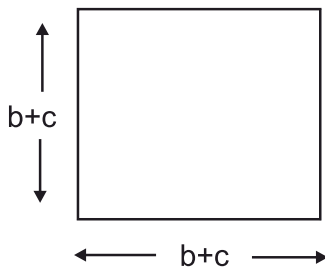
1. एक त्रिभुज बनाइए जिसकी भुजाओं की माप 3.5 सेमी, 4.5 सेमी तथा 6 सेमी हो ।
2. क्या एक ऐसा त्रिभुज बन सकता है जिसकी भुजाओं की माप 4 सेमी, 5 सेमी और 9 सेमी हो ।

8.5 बोधायन प्रमेय (पाइथागोरस प्रमेय)

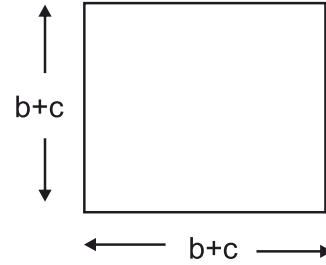
1. एक समकोण त्रिभुज बनाइए इसके आठ समान प्रतिरूप कार्डशीट पर बनाइए और उन्हें काट लीजिए । मान लीजिए त्रिभुज के समकोण के सामनेवाली भुजा (कर्ण) की लम्बाई a तथा अन्य भुजाओं की लम्बाई क्रमशः b व c है ।



2. अब त्रिभुज की भुजा b और c का योग कीजिए तथा $(b + c)$ माप की भुजा वाले दो एक समान वर्ग एक अन्य कार्डशीट पर बनाइए ।

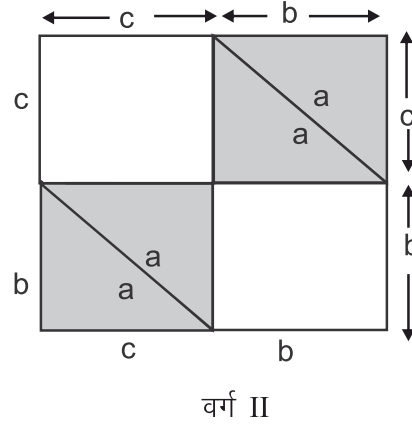
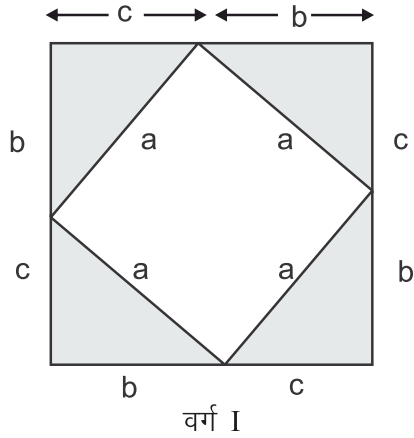


वर्ग - I



वर्ग - II

3. अब ऊपर बनाए त्रिभुजों में से चार त्रिभुजों को वर्ग - I में तथा चार त्रिभुजों को वर्ग -II में नीचे दिए गए चित्रानुसार जमाइए ।

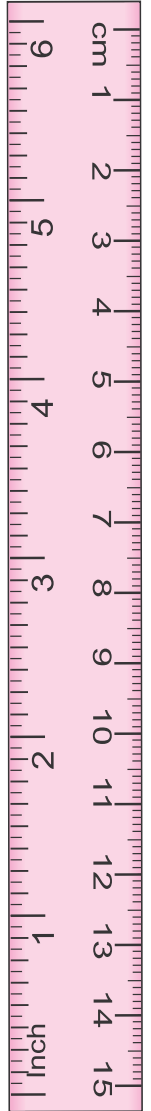
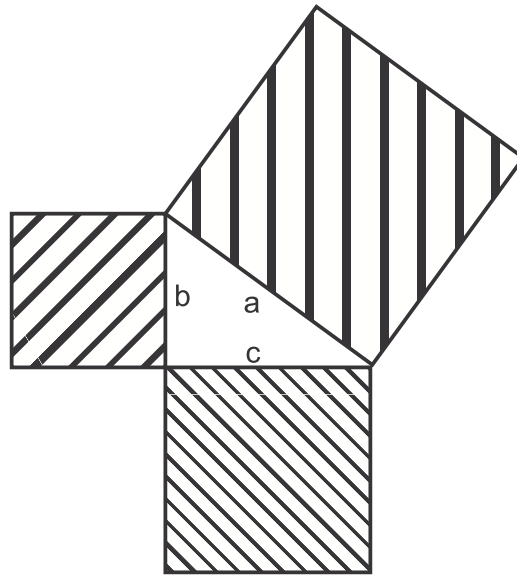


4. दोनों वर्ग एक समान हैं तथा आठों त्रिभुज भी एक समान हैं।

अतः वर्ग I के खाली भाग का क्षेत्रफल = वर्ग II के खाली भाग का क्षेत्रफल
या वर्ग I के खाली भाग में बने वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग II के खाली भाग में बने दोनों वर्गों के क्षेत्रफलों का योग।

$$\text{अर्थात् } a^2 = b^2 + c^2$$

समकोण त्रिभुजों का यह सम्बन्ध पाइथोगोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है, इसे सर्वप्रथम भारतीय गणितज्ञ बोधायन ने ज्ञात किया था, जिसका आधुनिक गणित में पाइथोगोरस ने व्यवस्थित प्रमाण दिया। इस प्रमेय को निम्न प्रकार भी समझा जा सकता है। हम a माप की भुजा वाले वर्ग को Δabc के सबसे बड़ी भुजा (कर्ण) तथा b माप की भुजा व c माप की भुजा वाले वर्ग को Δabc की भुजा b व c पर नीचे दिए गए चित्रानुसार जमा सकते हैं।

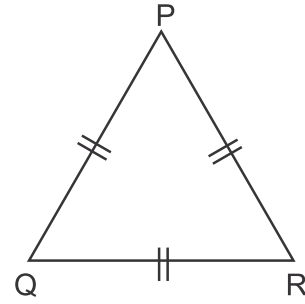
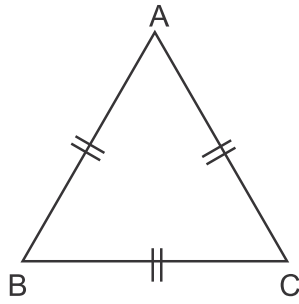


इसके अनुसार हम कह सकते हैं।

समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा (कर्ण) पर बना वर्ग अन्य दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है। प्रतीकात्मक रूप में $a^2 = b^2 + c^2$ ।

8.6 भुजाओं एवं कोण में संबंध

एक समबाहु त्रिभुज ΔABC बनाकर इसी की एक और प्रतिलिपि ΔPQR (ट्रेस पेपर से) काटिए। अब आप ΔPQR के कोण $\angle P$ को ΔABC के तीनों कोण पर बारी-बारी से रख कर देखिए— जब $\angle P$ को $\angle A$ पर रखते हैं तो $\angle Q$, $\angle B$ को तथा $\angle R$, $\angle C$ को ढक लेता है।



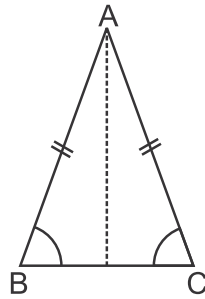
समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों को एक दूसरे पर रखने से वह एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढक लेते हैं, अर्थात् समबाहु त्रिभुज में तीनों भुजाएँ समान होने पर तीनों कोण भी समान होते हैं।

— क्या त्रिभुज में दो भुजाएँ समान होने पर कोण भी समान होंगे? यदि हाँ, तो कौनसे?

एक कार्डशीट/कागज पर समद्विबाहु त्रिभुज बनाइए। इसे नाम दीजिए ABC उसे इस प्रकार मोड़िए कि बराबर भुजाएँ सम्पाती हो।

क्या बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर हैं?

आप पाएँगे कि समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

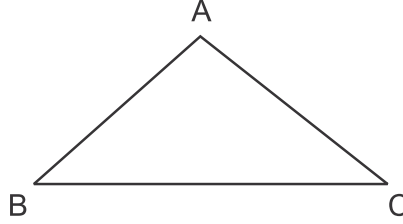


इस प्रकार समान भुजा AB और AC त्रिभुज की सम भुजाएँ कहलाती है। और उनके सम्मुख कोण $\angle B$ और $\angle C$ आधार कोण हैं जो परस्पर समान हैं।

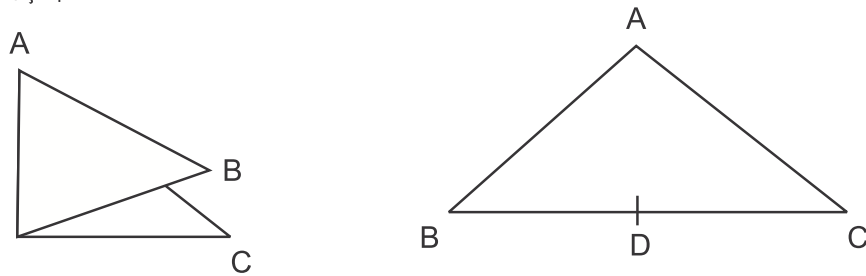
अर्थात् समद्विबाहु त्रिभुज में दो समान माप वाली भुजाओं के सम्मुख कोण की माप भी समान होती है।

8.7 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

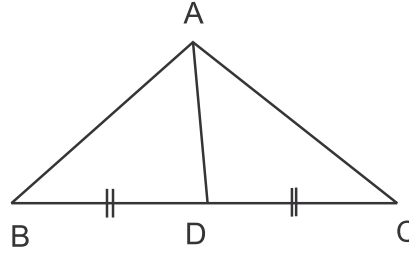
1. एक कागज पर एक त्रिभुज ABC बनाकर इसे काटकर अलग कर लीजिए ।



2. त्रिभुज को मोड़कर शीर्ष B व C को मिलाइए। इससे भुजा BC का मध्य बिन्दु प्राप्त होगा। इसे D नाम दीजिए ।

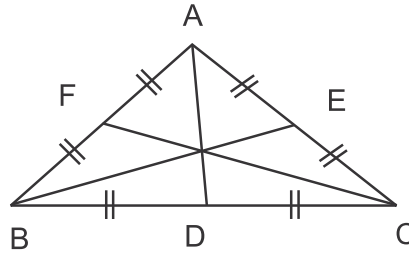


3. अब शीर्ष A को BC के मध्य बिन्दु D से मिलाइए। AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है।



त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को त्रिभुज की माध्यिका कहते हैं।

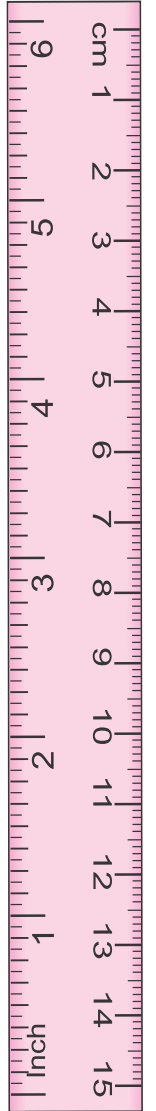
4. इसी प्रकार निम्न चित्रानुसार BE तथा CF माध्यिकाएँ खींची जा सकती हैं।

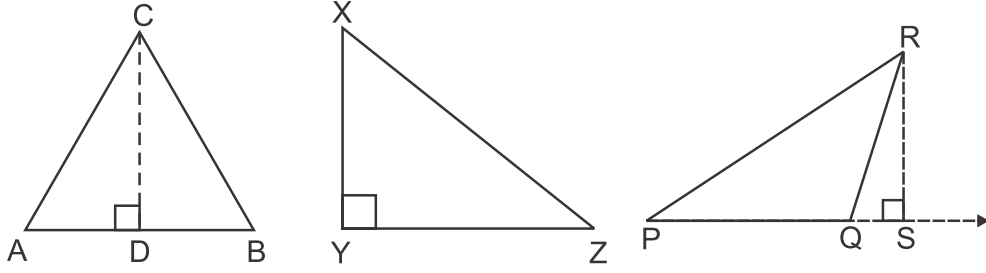


किसी भी त्रिभुज की अधिकतम 3 माध्यिकाएँ होती हैं। माध्यिकाओं के संगमन बिन्दु को केन्द्रक कहते हैं।

8.8 त्रिभुज के शीर्ष लम्ब

त्रिभुज के किसी भी शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब शीर्ष लम्ब कहलाता है। प्रत्येक त्रिभुज के तीन शीर्ष लम्ब होते हैं। शीर्षलम्बों के संगमन बिन्दु को लम्ब केन्द्र कहते हैं। नीचे दिए गए त्रिभुज के चित्रों में दिखाए गए शीर्षलम्बों को पहचानिए।



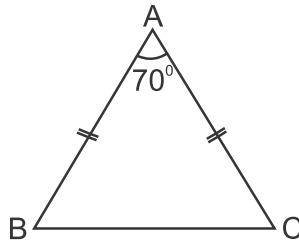


- ΔABC एक न्यून कोण त्रिभुज है, इसका प्रत्येक शीर्ष लम्ब त्रिभुज के अन्दर ही होता है ।
 ΔXYZ एक समकोण त्रिभुज हैं, इसकी समकोण बनाने वाली दो भुजाएँ स्वयं ही शीर्ष लम्ब होती है ।
 ΔPQR एक अधिक कोण त्रिभुज हैं, इसका एक शीर्ष लम्ब, त्रिभुज के बाहर बनता है ।

शीर्ष लम्ब जिस भुजा पर डाला जाता है, वह उस भुजा के सापेक्ष दिए गए त्रिभुज की ऊँचाई होती है ।

प्रश्नावली 8.2

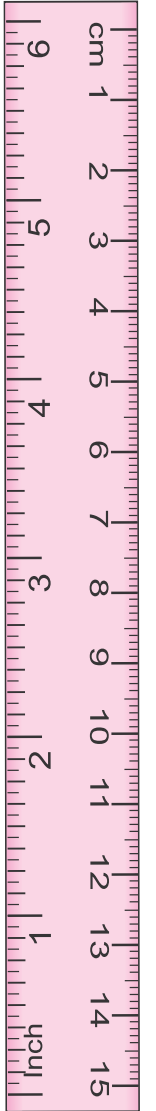
- भुजाओं की मापों के आधार पर बताइए कौन-कौनसे माप त्रिभुज का निर्माण कर सकते हैं ?
 (i) 6, 5, 5 (ii) 2, 3, 5 (iii) 3, 4, 8 (iv) 3, 5, 6 (v) 4, 4, 8 (vi) 9, 2, 8
- एक समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों का मान ज्ञात कीजिए ।
- रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।
 (i) प्रत्येक त्रिभुज में कम से कम दो कोण.....होते हैं ।
 (ii)त्रिभुज का एक शीर्ष लम्ब त्रिभुज के बाहर होता है ।
 (iii) प्रत्येक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से.....होता है ।
 (iv)त्रिभुज के दो कोण समान होते हैं ।
 (v) त्रिभुज के किसी शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा..... कहलाती है ।
 (vi) किसी त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ जिस बिन्दु मिलती है, उसे.....कहते हैं ।
 (vii) लम्बकेन्द्र से त्रिभुज के तीनों गुजरते हैं ।
- त्रिभुज ABC में $\angle A = 70^\circ$ तथा $AB = AC$ हो तो $\angle B$ व $\angle C$ का माप ज्ञात कीजिए ।



5. एक त्रिभुज का चित्र बनाकर उसमें एक माधिका तथा एक शीर्ष लम्ब को दर्शाइए ।
6. एक त्रिभुज की दो भुजाओं के माप 3 सेमी तथा 6 सेमी है। इस त्रिभुज की तीसरी भुजा का न्यूनतम तथा अधिकतम माप क्या हो सकता है ?
7. दो चेतावनी सूचक चिह्न (त्रिभुजाकार यातायात संकेतक) बनाएँ जो कि समभुज हो और जो आपका ध्यान सड़क पर आने वाले खतरों की ओर आकर्षित करता हो।

हमने सीखा

1. एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण इसके छः अवयव कहलाते हैं ।
2. एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है ।
3. किसी त्रिभुज का बाह्य कोण किसी एक भुजा को एक ही ओर बढ़ाने पर बनता है। एक भुजा को दो प्रकार से बढ़ाकर दो बाह्य कोण बनाए जा सकते हैं।
4. त्रिभुज के बाह्य कोण का माप उसके दो सम्मुख अंतःकोणों के योग के बराबर होता है ।
5. त्रिभुज की भुजाओं के गुण
 - (i) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की मापों का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है ।
 - (ii) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की मापों का अंतर तीसरी भुजा की माप से कम होता है ।
 ये दोनों गुण किसी त्रिभुज की रचना की संभावना के लिए उपयोगी होते हैं। जब त्रिभुज की माप दी हो।
6. समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा कर्ण तथा अन्य दोनों भुजाएँ उसके पाद कहलाते हैं। समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग = दोनों पादों के वर्गों का योग। (बोधायन प्रमेय)
7. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष को उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाले रेखाखण्ड को उसकी माधिका कहते हैं। एक त्रिभुज की तीन माधिकाएँ होती हैं। माधिकाओं का संगमन बिन्दु केन्द्रक कहलाता है।
8. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर खींचे गए लंब को शीर्ष लंब कहते हैं। एक त्रिभुज के तीन शीर्ष लंब होते हैं । शीर्ष लम्बों का संगमन बिन्दु लम्ब केन्द्र कहलाता है।



अध्याय

9

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

9.1 इन्द्र को जन्मदिन पर (उपहार) के बहुत सारे लिफाफे मिले। वह उन लिफाफों से रूपयों को निकाल कर जमाने लगा। वह सारे नोटों को अलग-अलग आकार देखकर जमा रहा था। जमाने के बाद वह नोटों को ध्यान से देखने लगा और फिर अपनी बहन से जाकर बोला दीदी सारे 50-50 के नोट बिल्कुल बराबर नाप के हैं। ऐसे ही 100-100 के नोट भी सारे एक नाप के हैं। दीदी ने कहा हाँ तुमने सही कहा। ऐसी और भी चीजें होती हैं जो बिल्कुल बराबर नाप व समान आकार की होती हैं। आप अपने आस-पास ऐसी कौन-कौनसी वस्तुएँ देखते हैं जो एक समान माप और आकार की हैं। नीचे बने चित्रों में कौनसे युग्म एक जैसे चित्रों के हैं-

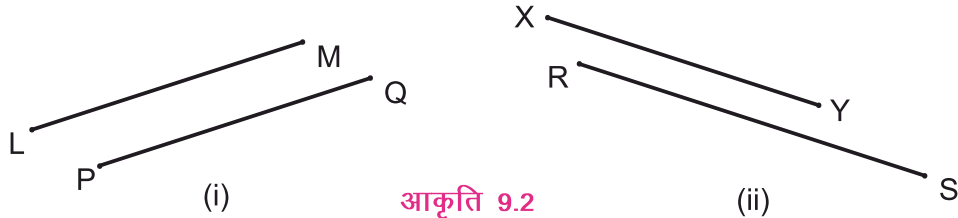


आकृति 9.1

– आपने किस आधार पर एक जैसे जोड़े छाँटे ?
 – ऐसे कौनसे जोड़े हैं जो एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढँक लेते हैं।
 एक स्केल (पटरी) को जब दूसरे स्केल पर रखते हैं तो वे एक दूसरे को पूरा-पूरा ढँक लेते हैं क्योंकि दोनों का आकार और माप समान है। इसी तरह एक ताश का पत्ता दूसरे पत्ते पर रखें तो वह एक दूसरे को पूरा-पूरा ढक लेता है। ऐसी आकृतियाँ जो एक दूसरे को पूरा-पूरा ढक लेती हैं, वे सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती हैं। सर्वांगसमता को (\cong) द्वारा दर्शाते हैं। क्या आपकी हिन्दी व गणित की किताबें आपस में सर्वासंगम हैं या नहीं ? साथियों से चर्चा करें।

9.2 ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता

9.2.1 रेखाखण्डों की सर्वांगसमता



आकृति 9.2

आकृति 9.2 में दिए गए रेखाखण्डों के दोनों जोड़ों को नाप कर देखिए आप इन रेखाखण्डों के बारे में क्या कह सकते हैं? चित्र (i) के दोनों रेखाखण्डों की लम्बाई एक समान है। अतः ये जोड़ा सर्वांगसम है। तथा चित्र (ii) में दोनों रेखाखण्ड एक समान लम्बाई को नहीं है।

अतः ये जोड़ा सर्वांगसम नहीं है। निष्कर्षतः हम यह कह सकते हैं कि दो रेखाखण्ड तभी सर्वांगसम होते हैं जब उनकी लम्बाई समान हो।

9.2.2 कोणों की सर्वांगसमता

आकृति 9.3 में दिए गए कोणों में कोण (i) को ट्रेस पेपर पर ट्रेस कर लीजिए। अब उसे क्रमशः (ii), (iii) व (iv) पर रखकर देखिए।



आकृति 9.3

किस कोण को \angle (i) ने ढँका ?

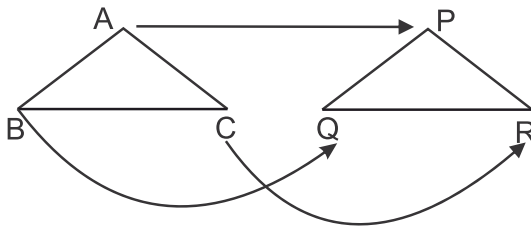
अब प्रत्येक कोण को चाँदे से मापिए। क्या सर्वांगसम कोणों के माप बराबर होते हैं। इस क्रियाकलाप से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि बराबर कोण सर्वांगसम होते हैं एवं सर्वांगसम कोणों के माप समान होते हैं।

यदि दो आकृतियाँ A व B सर्वांगसम हो तो हम लिखेंगे $A \cong B$

जैसे रेखाखण्ड AB तथा रेखाखण्ड ED सर्वांगसम हैं तो हम लिखेंगे $AB \cong ED$

इसी प्रकार यदि $\angle 1$ व $\angle 2$ सर्वांगसम है तो $\angle 1 \cong \angle 2$

9.2.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

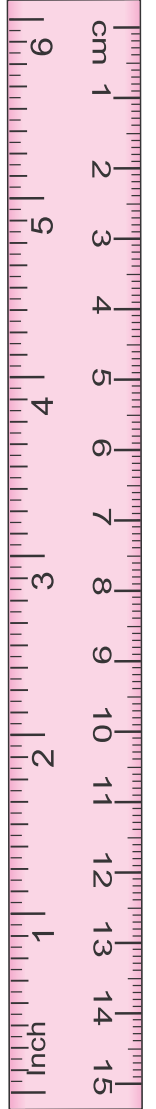


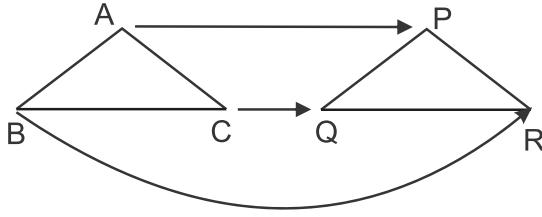
आकृति 9.4

यदि आप $\triangle ABC$ को $\triangle PQR$ पर इस प्रकार से अध्यारोपित करते हैं कि A, P के उपर रखें क्या इसके शेष शीर्ष भी यथा योग्य होंगे। ऐसा होना आवश्यक नहीं। सर्वांगसमता के बारे में चर्चा करते समय न केवल कोणों की माप और भुजाओं की लम्बाईयाँ महत्व रखती है। परन्तु शीर्ष का सुमेलन भी उतना ही महत्व रखता है। ऊपर दी गई स्थिति में सुमेलन है।

$$A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q, C \leftrightarrow R$$

हम सुमेलन को ऐसे भी लिख सकते हैं। $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle PQR$ परन्तु यदि $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow R, C \leftrightarrow Q$ और तब हम लिखेंगे $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle PRQ$





आकृति 9.5

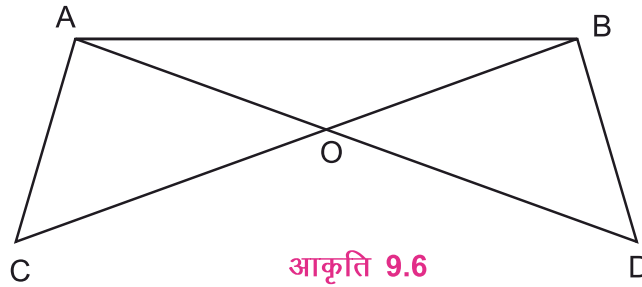
सर्वांगसमता को अच्छे ढंग से समझने के लिए चित्र ध्यान से देखिए – यहाँ

$AB \leftrightarrow PR, AC \leftrightarrow PQ, BC \leftrightarrow RQ$
तथा

$\angle A \leftrightarrow \angle P, \angle B \leftrightarrow \angle R, \angle C \leftrightarrow \angle Q$

अतः त्रिभुज ABC सर्वांगसम है त्रिभुज PRQ के इसे ऐसे लिखते हैं

$$\Delta ABC \cong \Delta PRQ$$



आकृति 9.6

यहाँ ΔABC व ΔBAD में

$\angle ABC = \angle BAD, \angle ACB = \angle BDA$ तथा $\angle BAC = \angle ABD$ हैं।

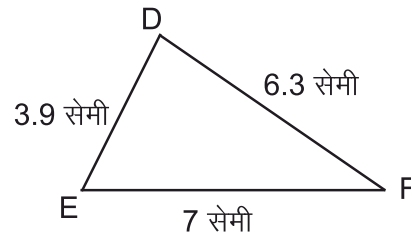
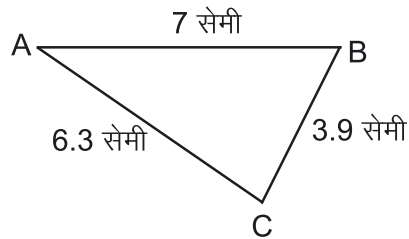
$AB \leftrightarrow BA, BC \leftrightarrow AD, AC \leftrightarrow BD$ अर्थात् $AB = BA, AC = BD$ तथा $BC = AD$

अतः $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ हैं।

करो और सीखो

- जब दो त्रिभुज ΔABC और ΔPQR दिए गए हो तो उनमें आपस में छः संभव सुमेलन होते हैं दो त्रिभुजों के कट-आउट का प्रयोग करके यह सुमेलन ज्ञात कीजिए।
- क्या सभी सुमेलन सर्वांगसमता दर्शाते हैं? अध्यारोपित कर पता लगाइए।

उदाहरण 1 क्या $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है? उनके संगत कोण लिखिए।



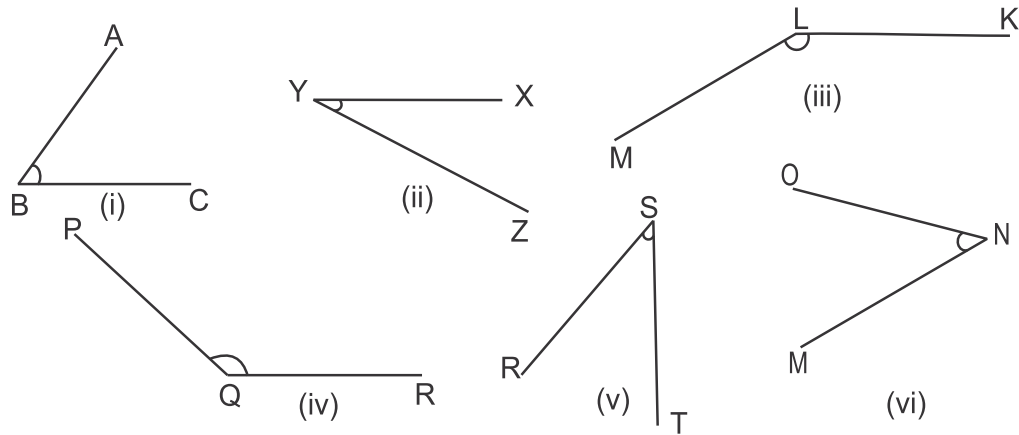
हल दिए गए चित्र में ΔABC और ΔDEF से
 $AB=EF=7$ सेमी, $BC=DE=3.9$ सेमी, $AC=DF=6.3$ सेमी

स्पष्टतः A बिन्दु संगत है F के
 B बिन्दु संगत है E के
 C बिन्दु संगत है D के
 अतः $\Delta ABC \cong \Delta FED$

$$\left(\begin{array}{l} \text{यहाँ संगत कोण युग्म} \\ \angle A = \angle F \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle D \end{array} \right)$$

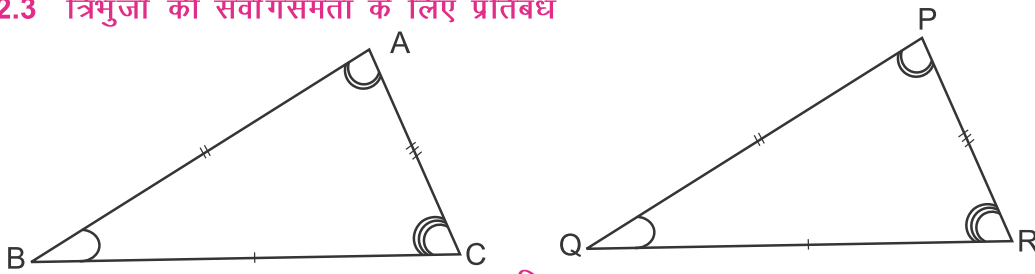
प्रश्नावली 9.1

- यदि त्रिभुज ABC त्रिभुज PQR के सर्वांगसम हैं तो त्रिभुज के सभी संगत सर्वांगसम भागों को लिखिए।
- यदि $\Delta LMN \cong \Delta XYZ$ हो तो उन भागों को लिखिए जो निम्न के संगत हो—
 (i) $\angle N$ (ii) LM (iii) $\angle M$ (iv) MN
- रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए—
 (i) दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी..... समान हो ।
 (ii) दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी.....समान हो ।
 (iii) दो सर्वांगसम त्रिभुज ΔPQR और ΔABC में कोण $\angle P$ का माप 60° है, तो $\angle A$ का माप.....होगा ।
- सर्वांगसम आकृतियों को आप दैनिक जीवन में कहाँ-कहाँ देखते हैं ? कोई दो उदाहरण लिखिए।
- नीचे दिए गए चित्रों में सर्वांगसम कोणों को छाँटिए (कोण को ट्रेस कर पता कीजिए।)

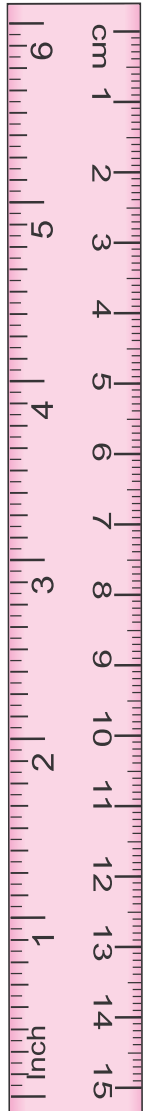


(क्या आप परकार की सहायता से भी कोणों की सर्वांगसमता का पता लगा सकते हैं? करके देखिए)

9.2.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध



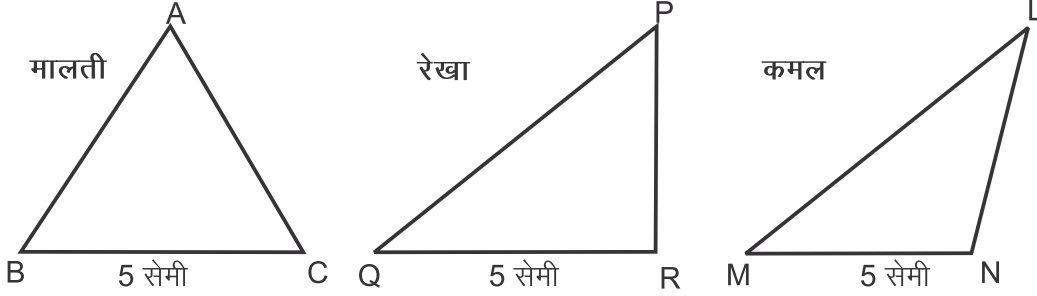
आकृति 9.7



आकृति 9.7 में दोनों त्रिभुज समान आकार व आकृति के हैं $\triangle ABC$ को ट्रेसिंग पेपर से ट्रेस कर $\triangle PQR$ पर रखिए। क्या ABC तथा PQR एक दूसरे को आपस में पूरी तरह ढक लेते हैं? किन्हीं दो त्रिभुजों के संगत भाग समान होने पर त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

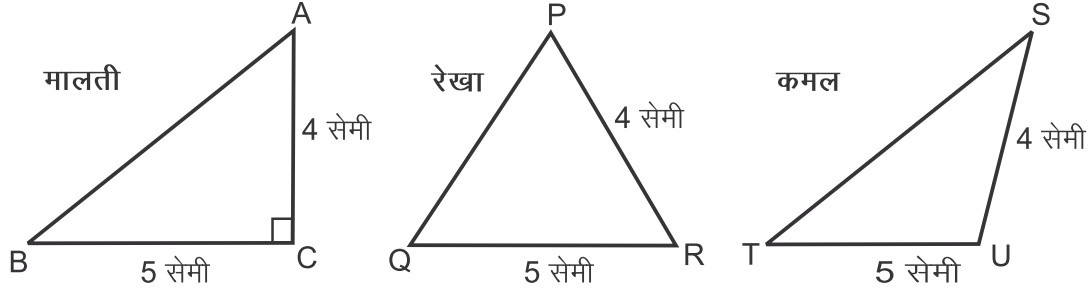
[A] SSS (भुजा-भुजा-भुजा) सर्वांगसमता

यदि आपको किसी त्रिभुज की एक भुजा का माप 5 सेमी दिया गया है तो उसे आप कैसे बनाएंगे। मालती, रेखा व कमल ने इस प्रकार से त्रिभुज बनाए।



आप पाएँगे कि मालती ने समबाहु त्रिभुज, रेखा ने समकोण त्रिभुज तथा कमल ने अधिक कोण त्रिभुज बनाए।

पुनः यदि आपको त्रिभुज के दो भुजाओं के माप दे दिए जाएँ 4 सेमी तथा 5 सेमी तब क्या आप तीनों त्रिभुज समान बना सकेंगे, मालती, रेखा व कमल ने भी प्रयास किया।



आप पाएँगे कि इस स्थिति में भी त्रिभुज अलग-अलग बन गए हैं।

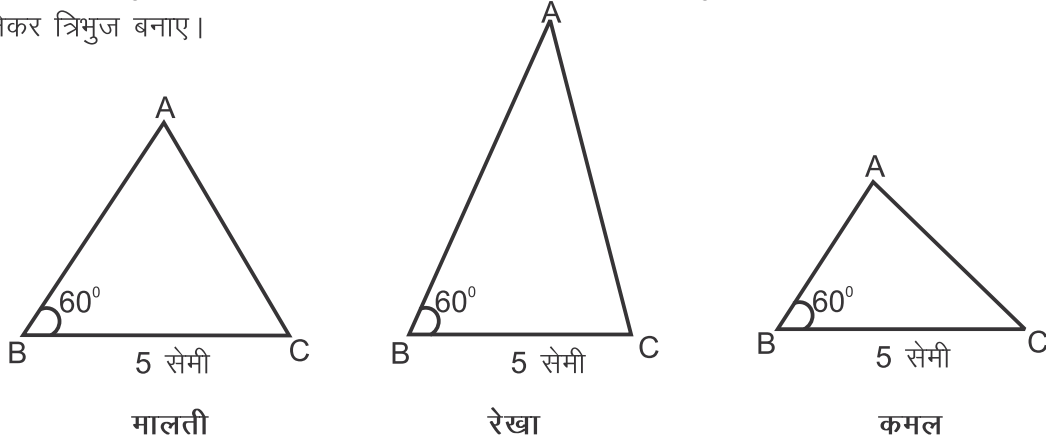
यदि तीनों भुजाएँ ज्ञात हो तो 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी तब क्या तीनों समान चित्र बना सकेंगे? आप भी बना कर देखें।



इस प्रकार मालती, रेखा तथा कमल तीनों द्वारा बनाए गए त्रिभुज समान है तथा इन त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान माप की है।

SSS नियम— यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे सर्वांगसमता का भुजा-भुजा-भुजा नियम कहते हैं।

[B] SAS (भुजा-कोण-भुजा) सर्वांगसमता— हमने देखा कि एक या दो भुजाओं की सहायता से दो सर्वांगसम त्रिभुज नहीं बनाए जा सकते हैं। यदि एक कोण एवं एक भुजा दी गई हो तो क्या दो सर्वांगसम त्रिभुज बना सकते हैं? मालती, रेखा व कमल ने एक भुजा 5 सेमी और एक कोण 60° लेकर त्रिभुज बनाए।



आकृति 9.8

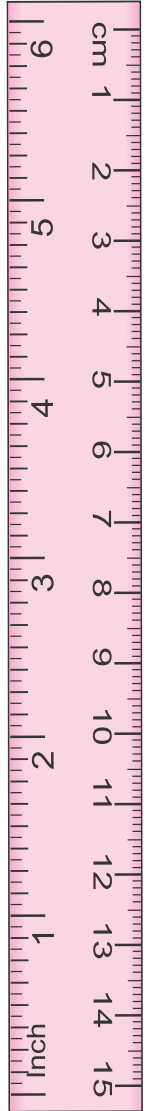
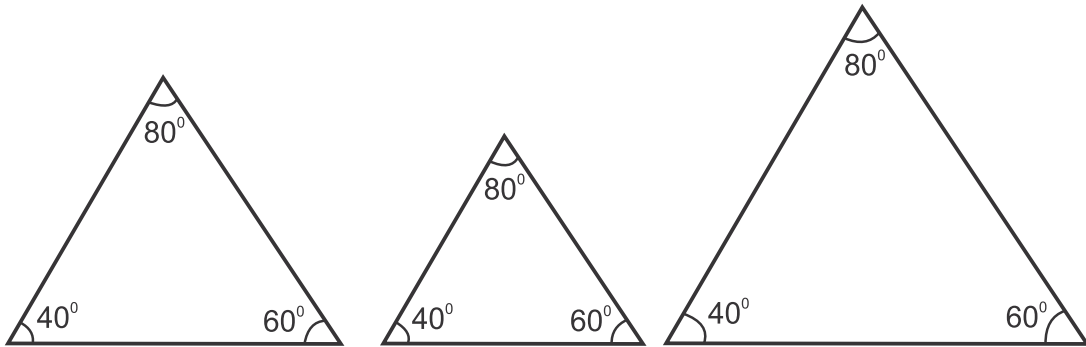
तीनों ने कोण वाली भुजा की लम्बाई अलग-अलग लेते हुए अलग-अलग नाप के त्रिभुज बना लिए। यदि हम इस त्रिभुज में आधार BC के अतिरिक्त AB की लम्बाई भी निश्चित कर देते हैं $AB = 4$ सेमी तब आप पाएँगे कि बनने वाले सभी त्रिभुज सर्वांगसम बनेंगे।

अर्थात् यदि $\triangle ABC$ के समान $\triangle PQR$ बनाना चाहते हैं। तो हमें दो भुजाओं की लम्बाई एवं उनके बीच का कोण ज्ञात होना आवश्यक है।

SAS नियम— यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ, उनसे बना कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनसे बने कोण के समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

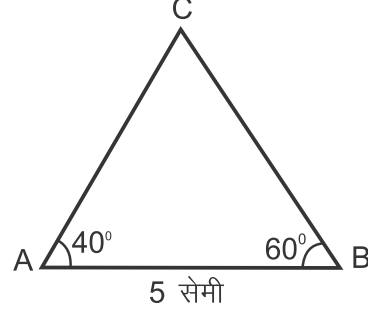
[C] कोण-भुजा-कोण (ASA) सर्वांगसमता

यदि त्रिभुज का एक कोण ज्ञात हो तो त्रिभुज बना सकते हो क्या? यदि त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात हो तो समरूप त्रिभुज बना सकते हैं? मालती, रेखा व कमल चित्र को बनाते हैं। कोण $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ ।



इसलिए त्रिभुज के सभी कोण समरूप हैं परन्तु भुजाएँ समान नहीं हैं अतः हमें भुजाओं की लम्बाई ज्ञात होनी चाहिए। यदि सर्वांगसम त्रिभुज बनाने के लिए दो कोण व उनके बीच की भुजा ज्ञात हो तो ?

तीनों बच्चों ने पुनः त्रिभुज बनाने के लिए $AB = 5$ सेमी, $\angle A = 40^\circ$ तथा $\angle B = 60^\circ$ के कोण बनाए। इस बार सभी त्रिभुज एक समान प्राप्त होते हैं। अर्थात् सर्वांगसम त्रिभुज बनाने हेतु एक भुजा व दो कोणों के मापों की आवश्यकता होगी।

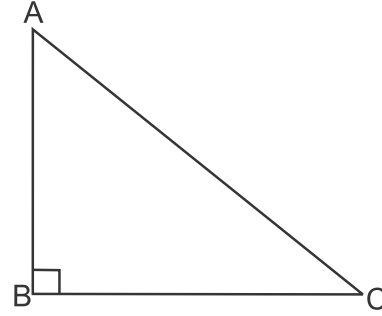


ASA नियम— यदि किसी एक त्रिभुज की एक भुजा व उस पर बने कोण, दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा एवं उस पर बने कोणों के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

[D] समकोण-कर्ण-भुजा (RHS) सर्वांगसमता

दो समकोण त्रिभुजों में एक बात हमें पता है कि इनके समकोण बराबर होते हैं तब और क्या पता हो कि हम इनकी सर्वांगसमता की जाँच कर सकें। निम्न 3 स्थितियाँ संभव हैं—

1. शेष दो संगत कोण बराबर हो।
2. समकोण के इर्द-गिर्द दोनों भुजाएँ ज्ञात हो।
3. कर्ण तथा एक अन्य भुजा ज्ञात हो।

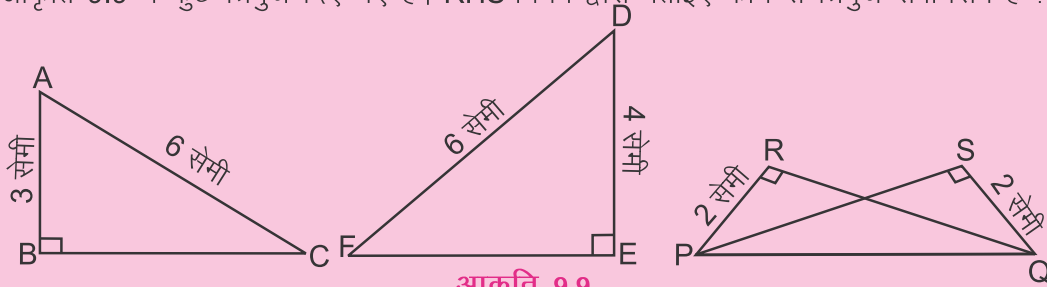


हम देखते हैं कि प्रथम स्थिति (AAA) से सर्वांगसमता सिद्ध नहीं की जा सकती है। दूसरी स्थिति में दो भुजाएँ ज्ञात होने पर तीसरी भुजा ज्ञात की जा सकती है। अतः यहाँ SSS अथवा SAS से सर्वांगसमता सिद्ध की जा सकती है। परन्तु तीसरी स्थिति समकोण त्रिभुज के लिए विशिष्ट है। इसे समकोण - कर्ण - भुजा (RHS) नियम कहते हैं।

RHS नियम— यदि एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की एक भुजा एवं कर्ण के समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

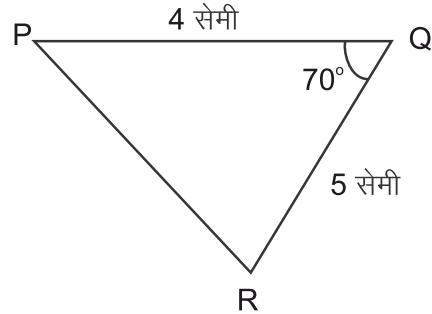
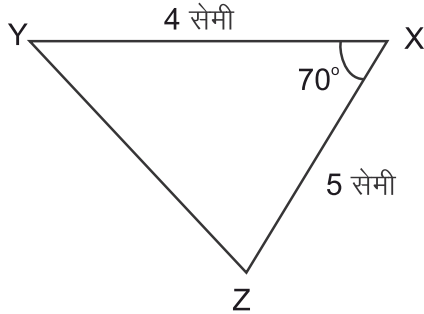
करो और सीखो ◆

आकृति 9.9 में कुछ त्रिभुज दिए गए हैं। RHS नियम द्वारा बताइए कौन से त्रिभुज सर्वांगसम हैं ?



आकृति 9.9

उदाहरण 2 नीचे दिए गए त्रिभुज के मापों के आधार पर बताइए कि क्या त्रिभुज सर्वांगसम हैं ? इनमें संगत कोण कौन-कौन से हैं ?



हल ΔXYZ और ΔPQR में $XY = PQ$ और $XZ = QR$ और कोण $\angle X = \angle Q$

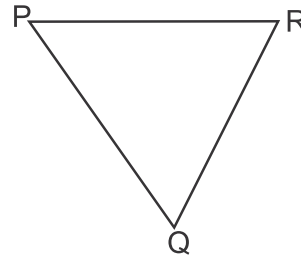
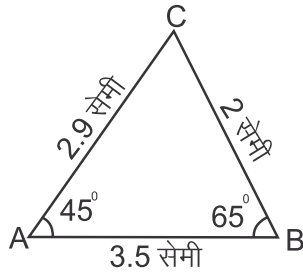
$$\therefore \Delta YXZ \cong \Delta PQR$$

अतः संगत कोण इस प्रकार $\angle X \leftrightarrow \angle Q, \angle Y \leftrightarrow \angle P, \angle Z \leftrightarrow \angle R$

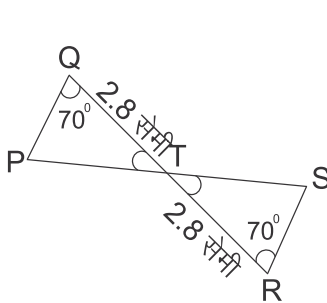
प्रश्नावली 9.2

1. दिए गए चित्र में $\Delta ABC \cong \Delta PRQ$ हो तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए।

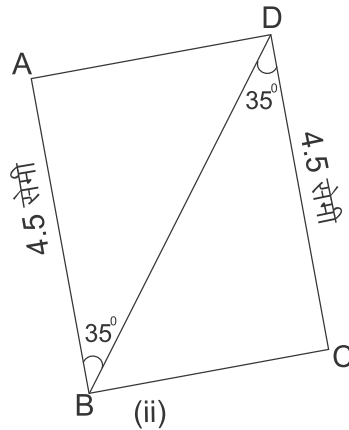
- (i) भुजा PR (ii) भुजा QR (iii) भुजा PQ (iv) $\angle P$ (v) $\angle Q$ (vi) $\angle R$



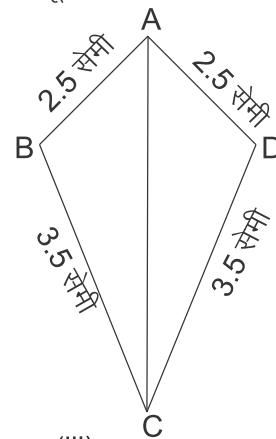
2. नीचे दिए गए चित्रों में त्रिभुजों की सर्वांगसमता का कौनसा प्रतिबन्ध लागू होता है? सर्वांगसम त्रिभुजों को सांकेतिक रूप से लिखिए।



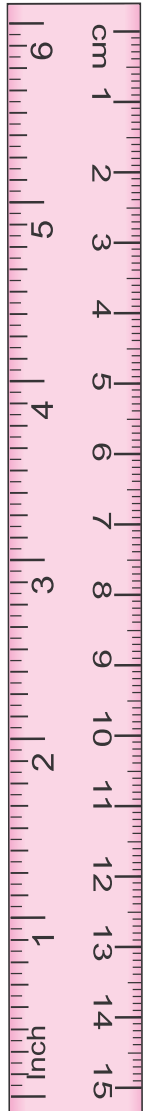
(i)



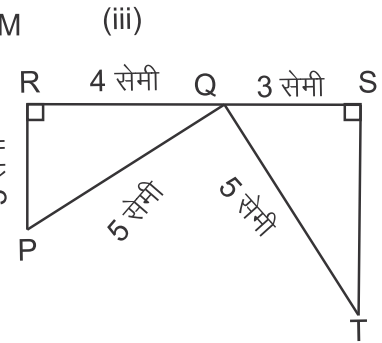
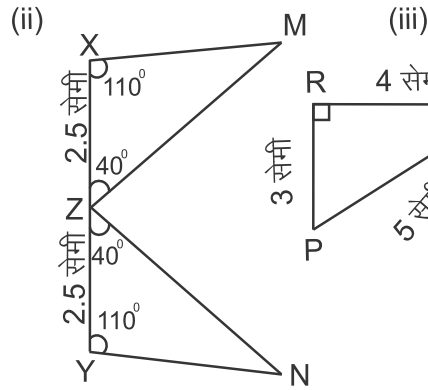
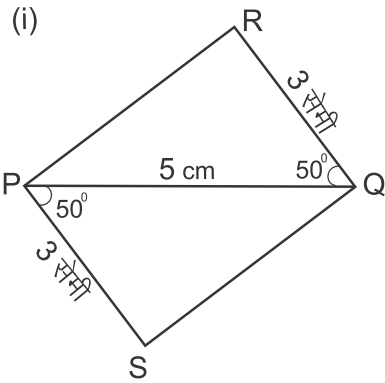
(ii)



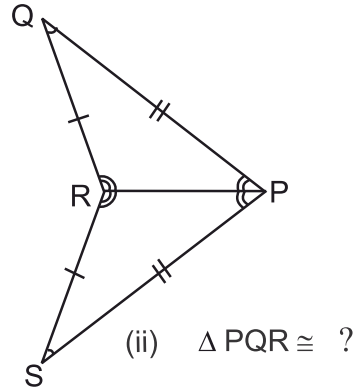
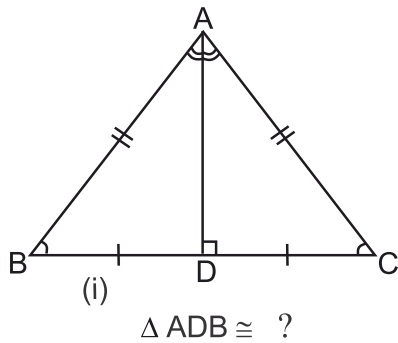
(iii)



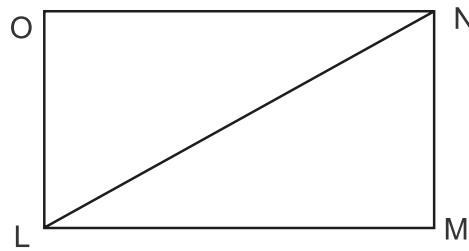
3. नीचे दिए गए त्रिभुज के जोड़ों में से कौनसे जोड़े सर्वांगसम है लिखिए ।



4. कथन को पूरा कीजिए ।

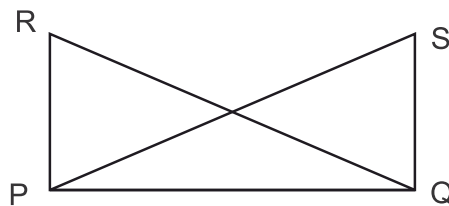


5. दिए गए चित्र में MNOL एक आयत है तो क्या $\triangle NOL \cong \triangle LMN$? यदि हाँ तो कारण बताइए ।

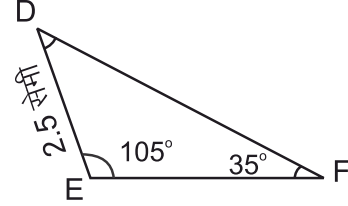
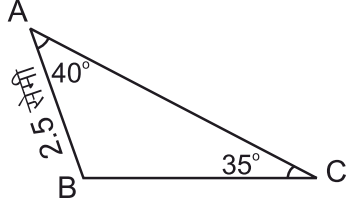


6. दिए गए चित्र में $\triangle PQR$ तथा $\triangle PQS$ में भुजा $PR =$ भुजा QS , तथा $RQ = PS$ तब बताइए कौनसा कथन सत्य है ।

(i) $\triangle PQR \cong \triangle PQS$ (ii) $\triangle PQR \cong \triangle QPS$ (iii) $\triangle PQR \cong \triangle QSP$

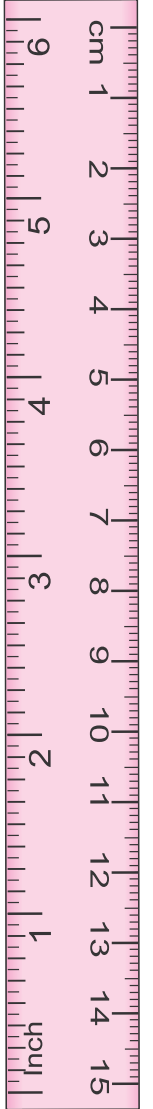


7. दिए गए चित्र में $\triangle ABC$ में $\angle A = 40^\circ, \angle C = 35^\circ$ तथा भुजा $AB = 2.5$ सेमी है, तथा $\triangle DEF$ में $\angle F = 35^\circ, \angle E = 105^\circ$ एवं भुजा $DE = 2.5$ सेमी हो तो बताइए क्या $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ है।



हमने सीखा

- सर्वांगसम त्रिभुज समान आकार और समान माप के होते हैं ।
- त्रिभुजों की सर्वांगसमता जाँचने के लिए उनकी प्रतिलिपियों को एक-दूसरे पर अध्यारोपित करने का तरीका इस्तेमाल किया जा सकता है ।
- यदि त्रिभुज के सभी भाग, दूसरे त्रिभुज के संगत भाग के समान हों तो वे त्रिभुज एक दूसरे के सर्वांगसम कहलाएँगे ।
- दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता दर्शाने के लिए आवश्यक व सम्पूर्ण नियम इस प्रकार हैं—
 - भुजा-भुजा-भुजा (SSS) नियम— यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।
 - भुजा-कोण-भुजा (SAS) नियम— यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और उनके मध्य कोण के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।
 - कोण-भुजा-कोण (ASA) नियम— यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके मध्य की भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण एवं उसके मध्य भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।
 - समकोण-कर्ण-भुजा (RHS) नियम— यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक अन्य भुजा किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण व एक अन्य भुजा के समान हो तो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।



अध्याय 10

त्रिभुजों की रचना

10.1 इस अध्याय को पढ़ने से पहले आप त्रिभुज की अवधारणा, इसके गुण एवं त्रिभुजों की सर्वांगसमता वाले अध्यायों को पुनः याद कर लें ।

हमने भुजाओं और कोणों के आधार पर त्रिभुजों को वर्गीकृत किया समबाहु, समद्विबाहु एवं विषम-बाहु त्रिभुज तथा कोणों के आधार पर न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, अधिक कोण त्रिभुज । इस अध्याय में हम विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों की रचना करना सीखेंगे ।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता अध्याय में हमने देखा कि एक अभीष्ट त्रिभुज बनाने के लिए हमें सभी 6 अवयवों (3 भुजा एवं 3 कोण) का माप ज्ञात होना आवश्यक नहीं होता है। यदि हमें नीचे दिए गए माप समूहों में से कोई एक दिया हो तो हम अभीष्ट त्रिभुज की रचना कर सकते हैं। यहां अभीष्ट से तात्पर्य दिए गए मापों के आधार पर बनने वाले अद्वितीय त्रिभुज से है ।

1. तीन भुजाएँ ।
2. दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण ।
3. दो कोण एवं उनके बीच की भुजा ।
4. समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा ।

10.2 त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाएँ दी गईं हो

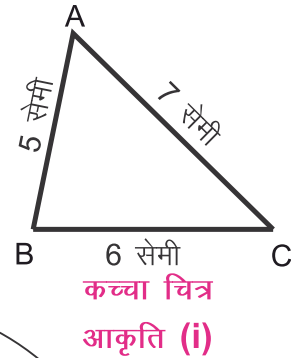
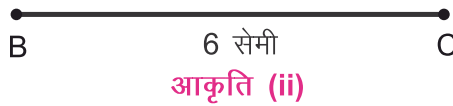
उदाहरण 1 एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 5$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, और $AC = 7$ सेमी हो।

हल चरण-1

पहले हम दी हुई मापों की एक कच्चा चित्र बनाते हैं। आकृति (i)

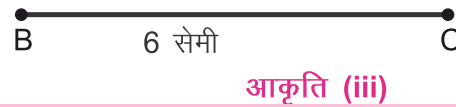
चरण-2

6 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड BC खींचिए, आकृति (ii)



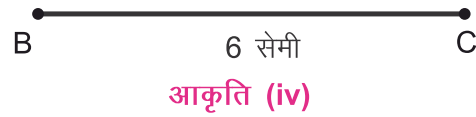
चरण-3

बिन्दु B से बिन्दु A से 5 सेमी की दूरी पर है। अतः B को केन्द्र मान कर और 5 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए ।



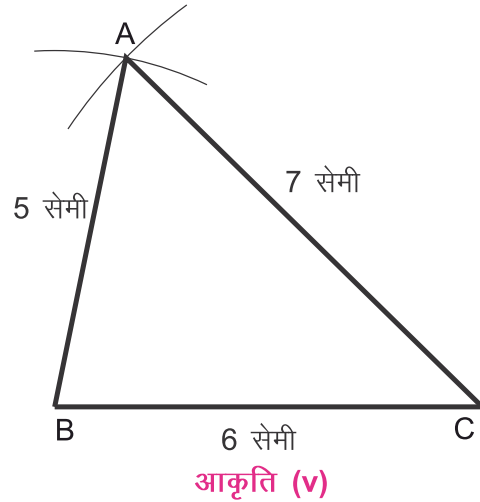
चरण-4

$AC = 7$ सेमी. है। अतः C को केन्द्र मानकर और 7 सेमी. त्रिज्या लेकर एक चाप इस तरह खींचेंगे कि वह B से खींचे गए चाप को एक बिन्दु पर काटे। आकृति (iv)



चरण-5

A को खींचे गए इन दोनों चापों पर स्थित होना चाहिए। अतः यह इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिन्दु है। इन चापों के प्रतिच्छेद बिन्दु को A से अंकित कीजिए। AB और AC को मिलाएँ। अब त्रिभुज ABC तैयार है। (आकृति v)

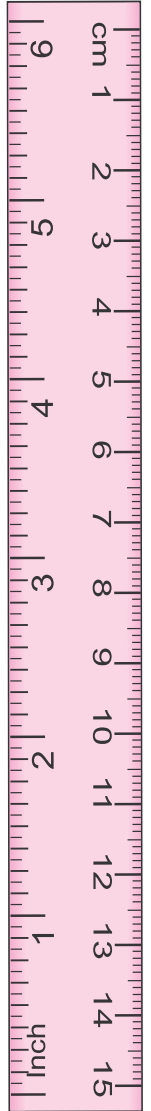


करो और सीखो

- $\triangle XYZ$ की रचना कीजिए, जिसमें $XY = 4.5$ सेमी, $YZ = 5$ सेमी और $ZX = 6$ सेमी है।
- 5.5 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
- $\triangle PQR$ की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 4$ सेमी, $QR = 3.5$ सेमी और $PR = 4$ सेमी है। यह किस प्रकार का त्रिभुज है ?

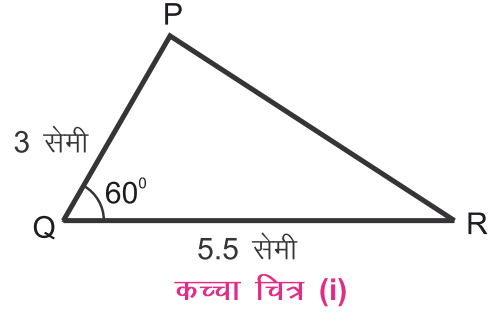
10.3 एक त्रिभुज की रचना जब दो भुजाओं की लम्बाइयाँ और उनके बीच के कोण की माप दी हो

हमें दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हुआ है। पहले हम एक कच्चा चित्र बनाते हैं इसके अन्य चरणों का अनुसरण उदाहरण 2 के अनुसार करते हैं।

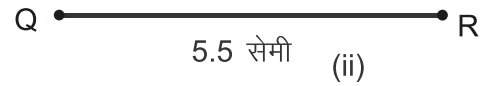


उदाहरण 2 एक त्रिभुज ΔPQR की रचना कीजिए, जब दिया है कि $PQ = 3$ सेमी, $QR = 5.5$ सेमी और कोण $\angle PQR = 60^\circ$ है।

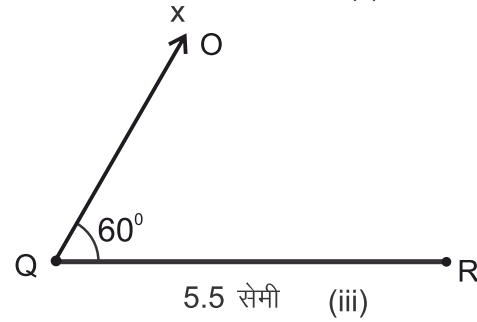
हल चरण-1 पहले हम दी हुई माप के अनुसार एक कच्चा चित्र खींचते हैं। (इससे हमें रचना की प्रक्रिया निर्धारित करने में सहायता मिलेगी) आकृति (i)



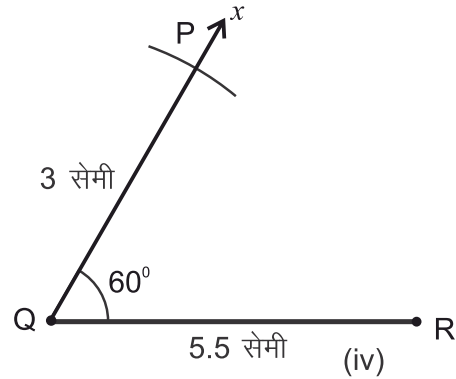
चरण-2 5.5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड QR खींचिए। (आकृति ii)



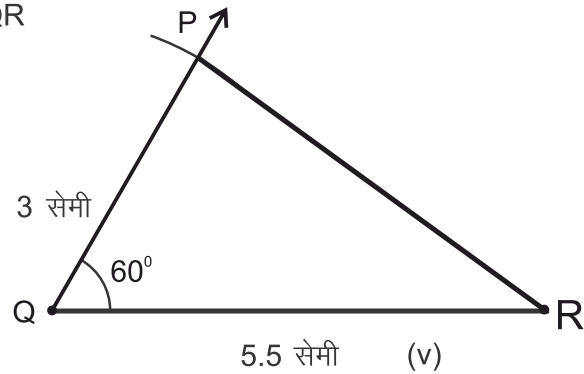
चरण-3 Q पर किरण QX खींचिए जो QR के साथ 60° का कोण बनाए। बिन्दु P कोण की उसी किरण पर होगा। (आकृति iii)



चरण-4 बिन्दु P निश्चित करने के लिए, दूरी QP दी हुई है। Q को केन्द्र मानकर 3 सेमी त्रिज्या का एक चाप खींचिए। यह QX को जिस बिन्दु पर काटता है वह P होगा। (आकृति iv)



चरण-5 PR को जोड़िए। इस प्रकार, ΔPQR प्राप्त हो जाता है। (आकृति v)



सोचिए, चर्चा कीजिए

अध्यापक – यदि $\triangle ABC$ में नाप $AB = 3$ सेमी, $AC = 5$ सेमी और $\angle C = 30^\circ$ हो तो क्या आप त्रिभुज की रचना कर सकते हैं?

कृष्णा, विक्रम, सरला बनाने का प्रयास करते हैं।

कृष्णा – $AC = 5$ सेमी खींचकर $\angle C = 30^\circ$ खींच सकते हैं।

विक्रम – $\angle C$ की एक भुजा CA है। पर बिन्दु B को इस कोण C की दूसरी भुजा पर स्थित होना चाहिए

अध्यापक – ध्यान दीजिए कि बिन्दु B को अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है, जब उसकी दो भुजाओं की लंबाइयों और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण का माप दिया हुआ है।

करो और सीखो

- $\triangle DEF$ की रचना कीजिए, जबकि $DE = 5$ सेमी, $DF = 3$ सेमी और $\angle EDF = 90^\circ$ हो।
- एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक समान भुजा की लम्बाई 6.5 सेमी हो और उनके बीच का कोण 110° हो।
- $BC = 7.5$ सेमी और $AC = 5$ सेमी और $\angle C = 60^\circ$ वाले $\triangle ABC$ की रचना कीजिए।

10.4 एक त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोणों के माप और इन कोणों की अन्तर्गत भुजा की लम्बाई दी हो

सबसे पहले एक कच्चा चित्र खींचिए। अब दिया हुआ रेखाखण्ड खींचिए। दोनों अंत बिन्दुओं पर कोण बनाइए। उदाहरण 3 देखिए।

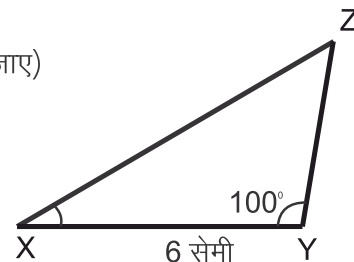
उदाहरण 3 $\triangle XYZ$ की रचना कीजिए, यदि $XY = 6$ सेमी, $\angle ZXY = 30^\circ$ और $\angle XYZ = 100^\circ$ है।

हल चरण-1 वास्तविक रचना से पहले, हम इस पर अंकित

मापों के अनुसार एक कच्चा चित्र खींचते हैं।

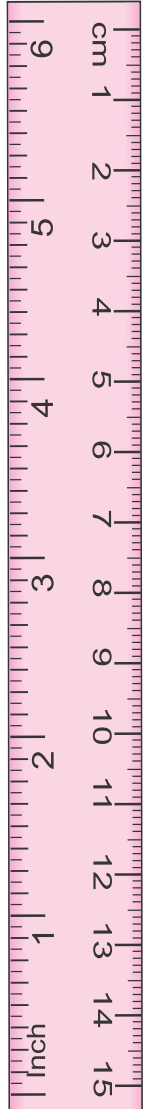
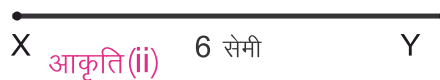
(इससे अनुमान लग जाता है कि कैसे रचना की जाए)

आकृति (i)



चरण-2 6 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड

XY खींचिए। (आकृति ii)

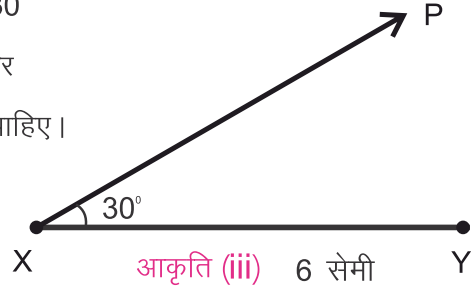


चरण-3 X पर एक किरण XP खींचिए जो XY से 30°

का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार

बिन्दु Z किरण XP पर कहीं स्थित होना चाहिए।

(आकृति iii)

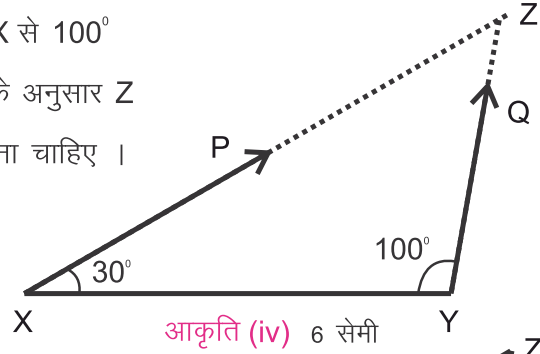


चरण-4 Y पर एक किरण YQ खींचिए जो YX से 100°

का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार Z

किरण YQ पर भी अवश्य स्थित होना चाहिए।

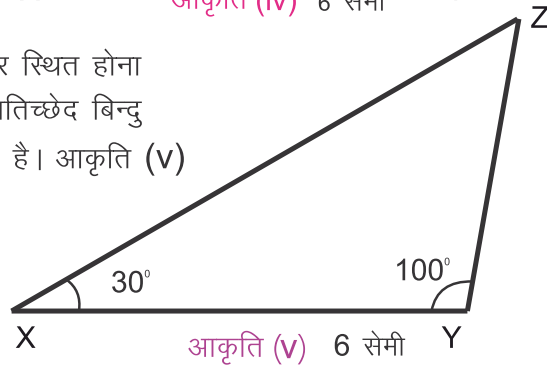
(आकृति iv)



चरण-5 Z को दोनों किरणों XP और YQ पर स्थित होना

चाहिए। अतः इन दोनों किरणों का प्रतिच्छेद बिन्दु

ही Z है। अब $\triangle XYZ$ पूरा बन जाता है। आकृति (v)



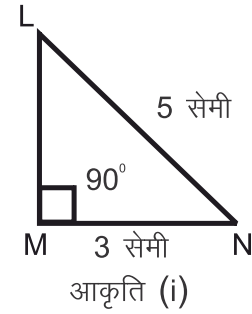
करो और सीखो

1. $\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जब $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ और $AB = 5.8$ सेमी दिया है।
2. $\triangle PQR$ की रचना कीजिए, यदि $PQ = 5$ सेमी $\angle PQR = 105^\circ$ और $\angle QRP = 40^\circ$ दिया है। (संकेत- त्रिभुज के कोण योग गुण को याद कीजिए)
3. जाँच कीजिए कि आप $\triangle DEF$ की रचना कर सकते हैं या नहीं, यदि $EF = 7.2$ सेमी, $\angle E = 110^\circ$ $\angle F = 80^\circ$ है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

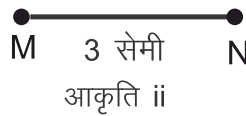
10.5 एक समकोण त्रिभुज की रचना जब उसके एक पाद (भुजा) और कर्ण की लम्बाईयाँ दी हुई हो। यहाँ, एक आकृति बनाना सरल है। दी हुई भुजा के अनुसार एक रेखाखण्ड खींचिए इसके एक अंत बिन्दु पर समकोण बनाइए। त्रिभुज की दी हुई लम्बाई की भुजा और कर्ण खींचने के लिए परकार का प्रयोग कीजिए। त्रिभुज को पूरा कीजिए। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 4 $\triangle LMN$ की रचना कीजिए, जिसका LMN समकोण है तथा दिया है कि $LN = 5$ सेमी, और $MN = 3$ सेमी

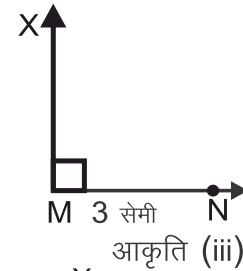
हल चरण-1 एक कच्चा चित्र खींचिए और उस पर दिए हुए माप को अंकित कीजिए। समकोण अंकित करना याद रखिए। (आकृति i)



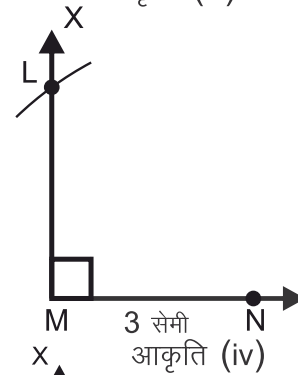
चरण-2 3 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड MN खींचिए (आकृति ii)



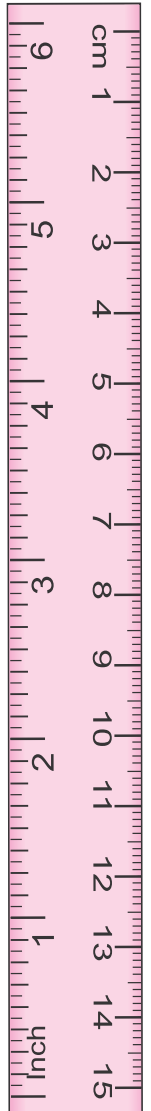
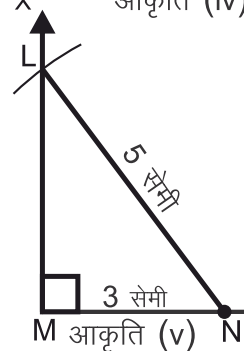
चरण-3 M पर $MX \perp MN$ खींचिए। इसके लिए M पर 90° का कोण बनाइए। (आकृति iii)



चरण-4 N को केन्द्र मानकर, 5 सेमी का एक चाप खींचिए। (L इसी चाप पर स्थित होना चाहिए क्योंकि यह N से 5 सेमी की दूरी पर है) (आकृति iv)



चरण-5 L को लंब रेखा MX पर और केन्द्र N वाले चाप पर स्थित होना चाहिए। अतः L इन दोनों का प्रतिच्छेद बिन्दु होगा। LN को जोड़िए। अब $\triangle LMN$ प्राप्त हो जाता है (आकृति v)



करो और सीखो

1. समकोण ΔPQR की रचना कीजिए, जहाँ $\angle Q = 90^\circ$, $QR = 8$ सेमी, $PR = 10$ सेमी है।
2. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 6 सेमी. लम्बा है और एक भुजा 4 सेमी लम्बी है।

प्रश्नावली 10

1. ΔPQR की रचना कीजिए, जब $PQ = 4$ सेमी, $QR = 3$ सेमी तथा $RP = 5.5$ सेमी हो।
2. ΔXYZ की रचना कीजिए, जब $XZ = 6$ सेमी, $XY = 4.5$ सेमी तथा $\angle X = 50^\circ$ है।
3. ΔABC की रचना कीजिए, जब $AB = 5$ सेमी, $\angle A = 45^\circ$ तथा $\angle B = 60^\circ$ है।
4. ΔDEF की रचना कीजिए, जब कर्ण $DE = 5$ सेमी, आधार $DF = 3$ सेमी तथा $\angle D = 90^\circ$ है।
5. एक 4 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
6. ΔPQR की रचना कीजिए जहाँ त्रिभुज $PQ = 5$ सेमी, $\angle P = 75^\circ$, तथा $\angle R = 55^\circ$ हो।

हमने सीखा

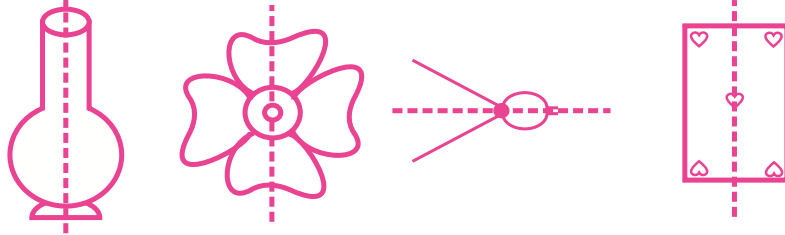
1. इस अध्याय में हमने स्केल और परकार की सहायता से त्रिभुज की कुछ रचनाओं की विधियों का अध्ययन किया है।
2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकल्पना का अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग करते हुए हमने त्रिभुज की रचना की विधि का अध्ययन किया है।
3. इस अध्याय में निम्नलिखित माप समूहों से त्रिभुज की रचना का अध्ययन किया है।
 - (i) जब त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई दी हो। (SSS)
 - (ii) जब किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाई और उनके मध्य स्थित कोण दिया गया हो। (SAS)
 - (iii) जब दो कोण और उनका अन्तर्गत भुजा की लम्बाई दी गई हो। (ASA)
 - (iv) जब किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा दी गई हो। (RHS)



अध्याय 11

सममिति

11.1 हम आस-पास में बहुत सारी वस्तुओं, चित्रों आदि को देखते हैं। इन सभी में अलग-अलग तरह की ज्यामिति दिखाई देती है।



इन आकृतियों को ठीक बीचो-बीच खींची गई रेखा के अनुदिश मोड़ा जाए या काटा जाए तो दोनों हिस्से एक दूसरे को पूरी तरह से ढँक लेते हैं। इस तरह की आकृतियाँ सममित आकृतियाँ कहलाती हैं। सममित आकृतियों, सममिति एवं सममित अक्ष के बारे में हमने पिछली कक्षाओं में जाना है। इस अध्याय में हम दी गई आकृतियों में सममित अक्ष पहचानना एवं बनाना, परावर्तन सममिति एवं घूर्णन सममिति के बारे में अध्ययन करेंगे।

करो और सीखो

सममिति दर्शाने के लिए

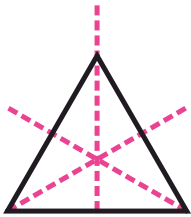
1. सममिति दर्शाने वाला एक चित्र बनाइए।
2. कागज के कटे हुए कुछ डिजाईन बनाइए।
3. रंगोली बनाइए।

11.2 रैखिक सममिति

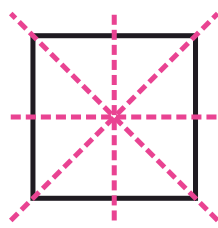
अभी हमने जिस सममिति के बारे में चर्चा की है, वह रैखिक सममिति है। इन चित्रों में एक ऐसी सरल रेखा है जिसके अनुदिश आकृतियों को मोड़ने से आकृति के दोनों भाग संपाति (एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढँक लेते हैं) हो जाते हैं। क्या आप समबहुभुज से परिचित हैं? यदि नहीं तो अपने साथियों एवं अध्यापकजी से चर्चा कर जानने का प्रयास कीजिए।

सम बहुभुज सममित आकृतियाँ हैं। यह एक रोचक निष्कर्ष है कि प्रत्येक समबहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं जितनी उसकी भुजाएँ हैं।

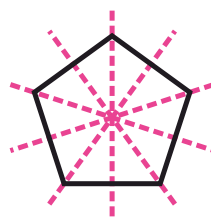
तीन सममित रेखाएँ चार सममित रेखाएँ पाँच सममित रेखाएँ छः सममित रेखाएँ



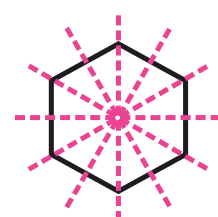
समबाहु त्रिभुज



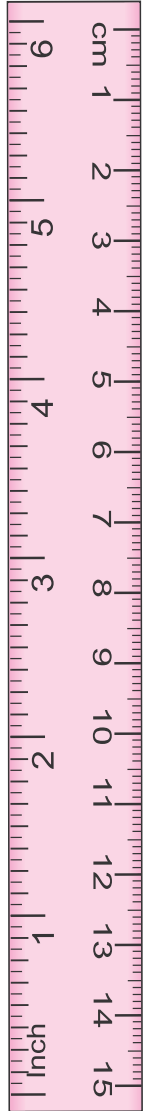
वर्ग




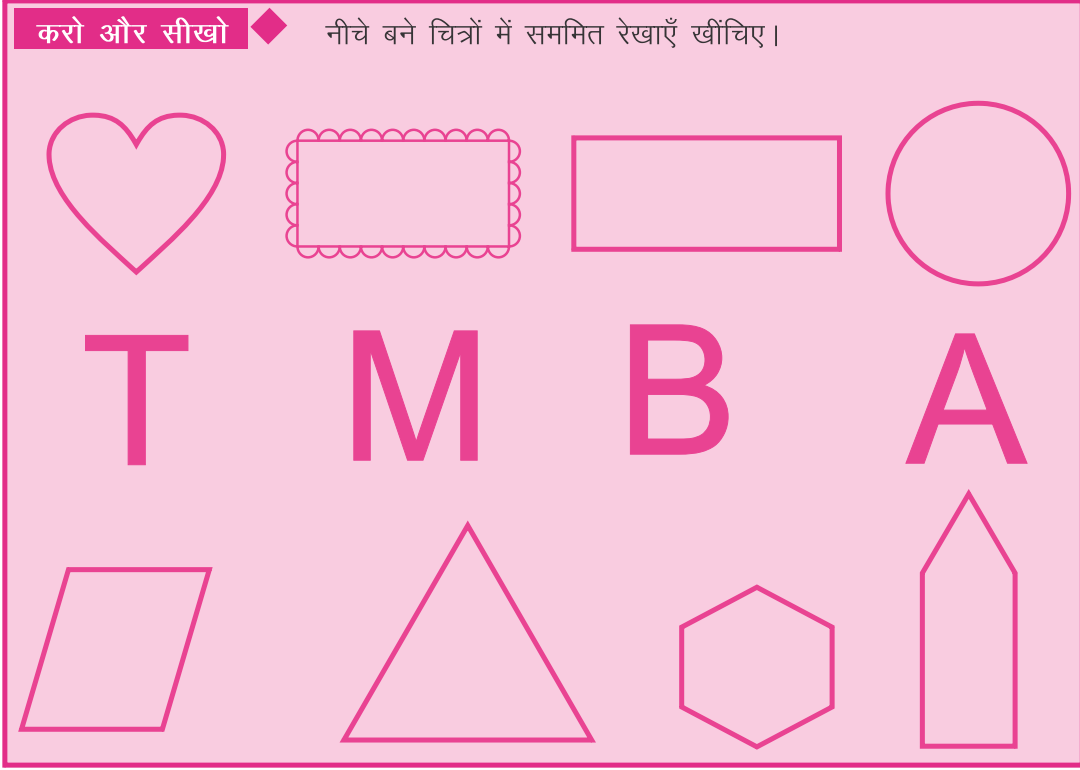
सम पंचभुज



सम षट्भुज

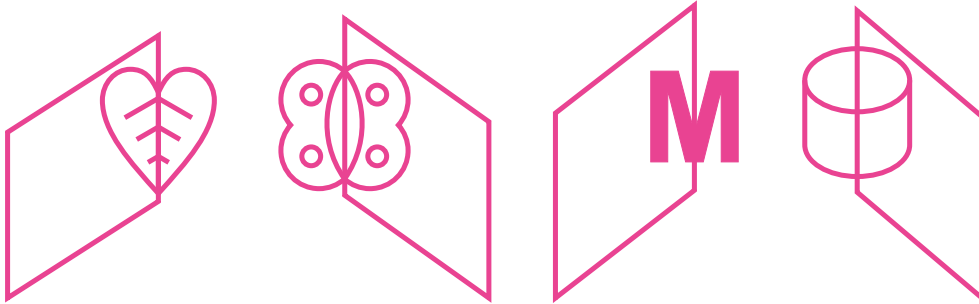


करो और सीखो  नीचे बने चित्रों में सममित रेखाएँ खींचिए।



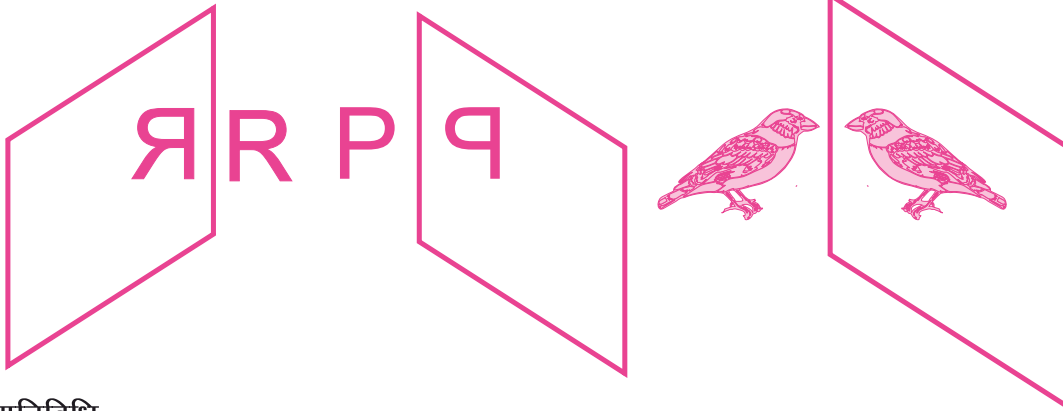
11.3 परावर्तन सममिति

एक समतल दर्पण लीजिए तथा उसके सामने विभिन्न वस्तुओं को बारी-बारी से देखिए। हम वस्तुओं के प्रतिबिम्ब दर्पण में देख सकते हैं। नीचे दिए चित्रों पर दर्पण को इस प्रकार रखो कि आधा हिस्सा दर्पण के सामने रहे। हम देखते हैं कि आधा हिस्सा दर्पण के सामने है तथा आधा दर्पण में। दोनों हिस्सों के मिलने से चित्र पूरा होता दिखाई देता है। यह परावर्तन सममिति है। दर्पण में बनने वाले इन प्रतिबिम्बों का अवलोकन कीजिए।



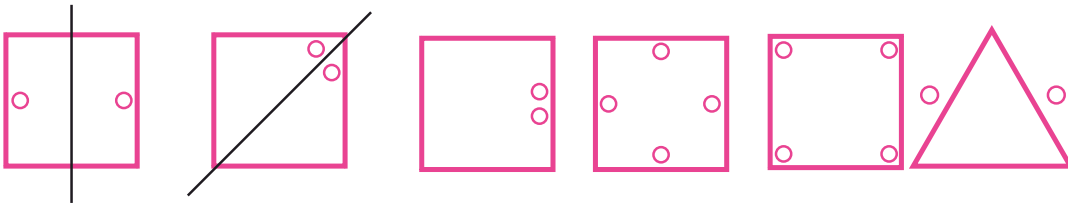
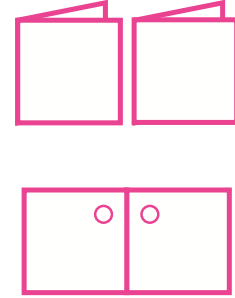
इन चित्रों का दर्पण प्रतिबिम्ब चित्र का आधा भाग है। दर्पण का किनारा सममित अक्ष के रूप में है। इस प्रकार रैखिक सममिति की अवधारणा का दर्पण परावर्तन से निकट का संबंध है। दर्पण रेखा हमें एक सममित रेखा ज्ञात करने में मदद करती है।

चित्र में R, P और चिड़िया का दर्पण परावर्तन दिखाया गया है। यहाँ आकृति के दर्पण परावर्तन में पार्श्व परिवर्तन या अभिमुखों में दाएँ-बाएँ परिवर्तन हो जाता है।



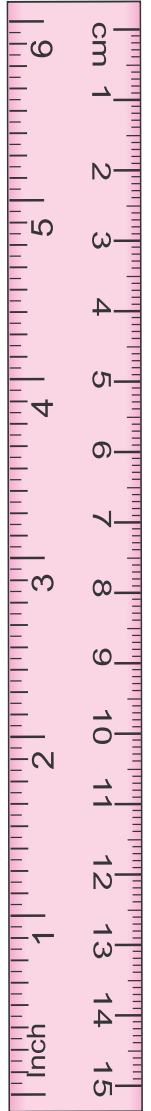
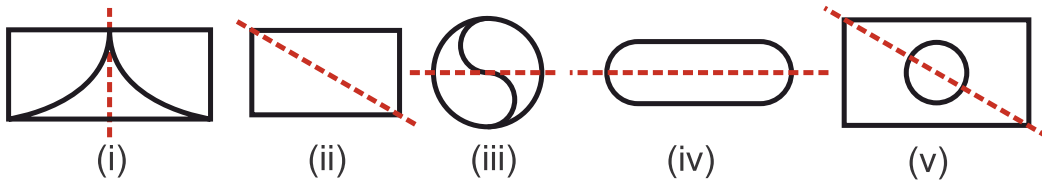
गतिविधि

चौकोर सादा कागज लीजिए। उसे बीच से चित्र में दिखाए अनुसार मोड़िए। अब कागज में एक छेद कीजिए। अब कागज को खोलिए, कागज का मोड़, सममित रेखा है, तथा कागज में बना छेद सममित आकृति के रूप में है। आइए इस तरह बनी अन्य छेद की हुई आकृतियों में सममित रेखा ढूँढ़ने का प्रयास करें।

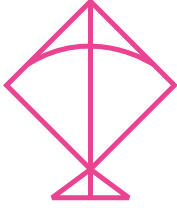


प्रश्नावली 11.1

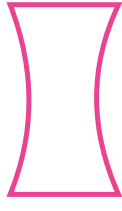
1. नीचे दी गई आकृति में जो बिन्दु रेखा दर्शाई गई है, वह उस आकृति की सममित रेखा है या नहीं? बताइए।



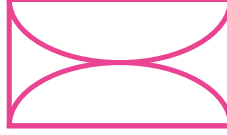
2. नीचे दी गयी आकृति में सममित रेखा खींचिए ।



(i)



(ii)



(iii)



(iv)

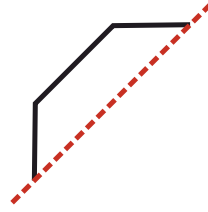
3. नीचे दी अधूरी आकृति को सममित रेखा के अनुदिश पूरा कीजिए ।



(i)



(ii)



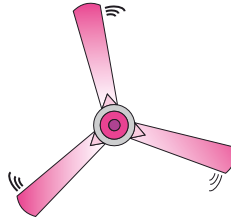
(iii)



(iv)

11.4 घूर्णन सममिति

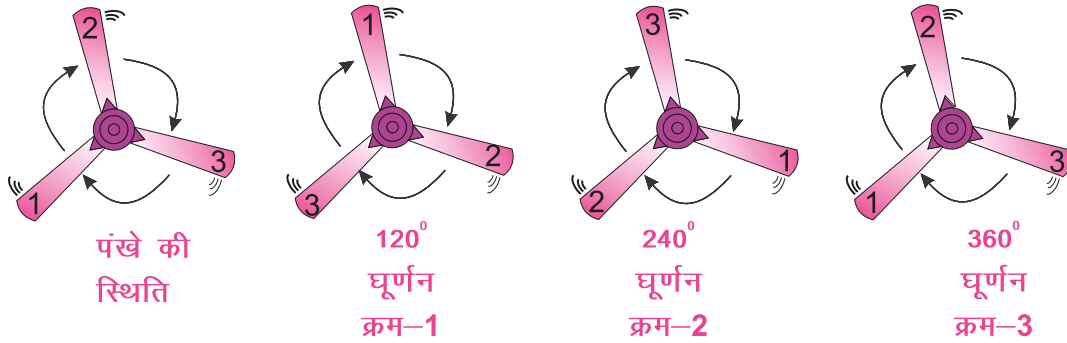
घड़ी की सुईयाँ, साइकिल का पहिया तथा छत से लगे पंखों आदि को हम गतिशील कहते हैं जब वे घूमते हैं या घूर्णन करते हैं । कुछ वस्तुओं में यह घूर्णन दोनों तरफ होता है, जबकि घड़ी की सुईयों में यह केवल एक दिशा में होता है। घड़ी की सुईयाँ, जिस दिशा में घूमती है वह घड़ी की दिशा में (दक्षिणावर्त) घूर्णन कहलाता है। शेष घूर्णनों को घड़ी की विपरीत दिशा में (वामावर्त) घूर्णन कहते हैं। साइकिल का पहिया दोनों दिशाओं में घूर्णन करता है।



करो और सीखो

1. घड़ी की दिशा में घूर्णन के दो उदाहरण दीजिए ।
2. घड़ी की विपरीत दिशा में घूर्णन के दो उदाहरण दीजिए ।

सोचिए ! साइकिल का पहिया, घड़ी की सुईयाँ जैसी वस्तुएँ घूर्णन करती है तो क्या उनके आकार एवं माप में कोई परिवर्तन होता है? नहीं। आकार और माप में परिवर्तन हुए बिना वस्तु एक निश्चित बिन्दु के चारों तरफ घूमती है। यह निश्चित बिन्दु **घूर्णन का केन्द्र** कहलाता है। घूर्णन के दौरान घूमे गए कोण को **घूर्णन कोण** कहते हैं। नीचे पंखे की पंखुड़ियों द्वारा केन्द्र पर बनने वाले कोण को दिखाया गया है।



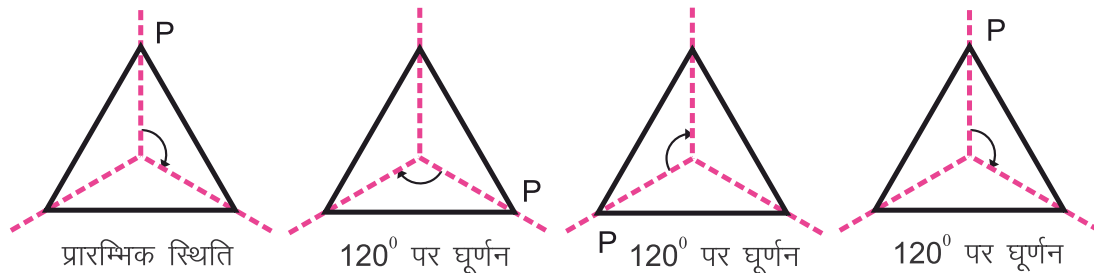
यहाँ हम देखते हैं कि पंखे को 120° घूमाने पर उसकी पंखुड़ियाँ पूर्व के समान ही दिखाई देती हैं, इसी प्रकार 240° तथा 360° घूर्णन पर भी वही स्थिति दिखाई देती है अतः हम कह सकते हैं कि पंखे में घूर्णन सममिति है तथा घूर्णन सममिति का क्रम 3 है।

एक पूरे चक्कर (360°) में कोई वस्तु जितनी बार स्थिति के अनुसार पहले जैसी ही दिखाई देती है वह संख्या उस **घूर्णन सममिति का क्रम** कहलाती है उदाहरण के लिए ऊपर दिए गए पंखे के उदाहरण में पूरे चक्कर में तीन समान स्थितियाँ प्राप्त होने से उसका घूर्णन क्रम 3 प्राप्त होता है। इसी प्रकार वर्ग में घूर्णन सममिति का क्रम 4 प्राप्त होता है।

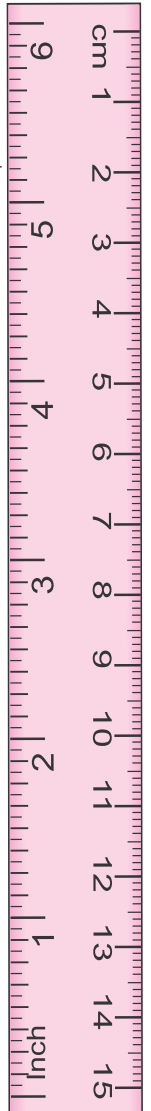
प्रत्येक वस्तु (आकृति) एक पूरे चक्कर अर्थात् 360° घूर्णन के बाद अपनी प्रारम्भिक स्थिति में आ जाती है अतः प्रत्येक वस्तु में क्रम - 1 की घूर्णन सममिति निश्चित रूप से होती है।

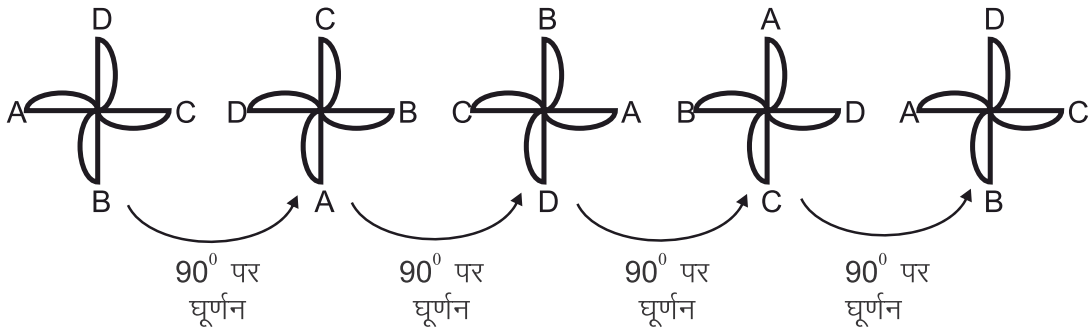
11.4.1 घूर्णन के कुछ उदाहरण

समबाहु त्रिभुज के लिए (दक्षिणावर्त घूर्णन) एक पूरे चक्कर में त्रिभुज तीन बार अपनी प्रारम्भिक स्थिति में आता है। इसे तीन क्रम का घूर्णन कहते हैं। चूंकि त्रिभुज अपनी प्रारम्भिक स्थिति से 120° घूमने के बाद पुनः अपनी पहले वाली स्थिति में आ जाता है, अतः इसका घूर्णन कोण 120° है।



चकरी का घूर्णन— चकरी को देखें। चकरी अपने एक घूर्णन में चार बार अपने प्रारम्भिक अवस्था में आती है। अतः इसका घूर्णन क्रम 4 है। तथा प्रत्येक 90° पर वह अपनी पहले वाली अवस्था में आती है। अतः चकरी का घूर्णन कोण 90° है।





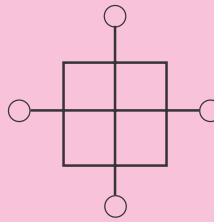
करो और सीखो

1. निम्न आकृतियों में घूर्णन सममिति के लिए घूर्णन कोण तथा घूर्णन क्रम बताइए।

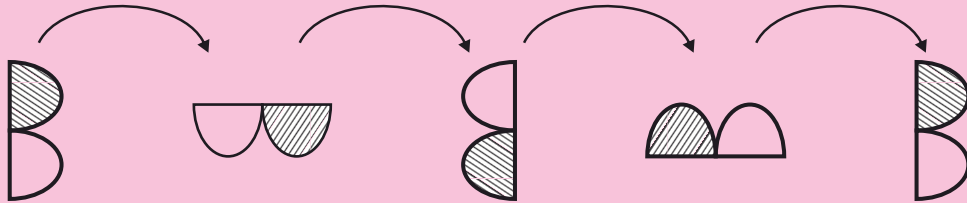
(i)



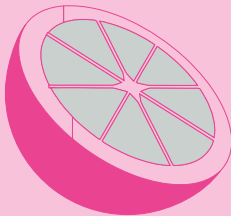
(ii)



2. B का घूर्णन की दिशा, घूर्णन कोण व घूर्णन क्रम बताइए—



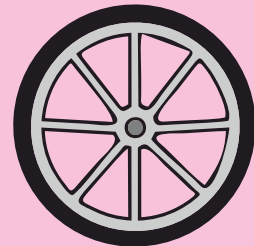
3. फलों के अनुप्रस्थ काट, यातायात संकेत, पहिया आदि में भी घूर्णन सममिति को देखिए। इनका घूर्णन क्रम बताइए।



फल का अनुप्रस्थ काट



सड़क संकेत



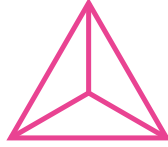
पहिया

प्रश्नावली 11.2

1. नीचे दी आकृतियों में घूर्णन सममिति का क्रम बताइए।



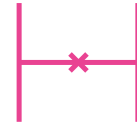
(i)



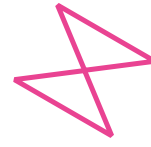
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

2. दो ऐसी आकृतियों के नाम बताइए, जिसमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक घूर्णन सममिति दोनों ही हैं।
3. ऐसे चतुर्भुजों के नाम बताइए जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों हो।
4. किसी आकृति को उसके परितः 60° के कोण पर घुमाने पर वह उसकी प्रारम्भिक स्थिति जैसी दिखाई पड़ती है, और किन-किन कोणों के लिए ऐसी स्थिति बनेगी?

हमने सीखा

1. एक आकृति में रैखिक सममिति तब होती है, जब कोई ऐसी रेखा प्राप्त की जा सके जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, उसके दोनों भाग परस्पर संपाति हो जाएँ।
2. समबहुभुजों में बराबर भुजाएँ और बराबर कोण होते हैं। उनकी अनेक अर्थात् एक से अधिक सममित रेखाएँ होती हैं।
3. प्रत्येक समबहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ होती हैं।

समबहुभुज	समषट्भुज	समपंचभुज	वर्ग	समबाहु त्रिभुज
सममित रेखाओं की संख्या	6	5	4	3

4. दर्पण परावर्तन में अभिमुखों में दाएँ-बाएँ परिवर्तन हो जाता है।
5. घूर्णन में एक वस्तु को एक निश्चित बिन्दु के चारों तरफ घुमाया जाता है। निश्चित बिन्दु घूर्णन का केन्द्र कहलाता है। जिस कोण पर वस्तु घूमती है, उसे घूर्णन का कोण कहते हैं।
6. यदि घूर्णन के बाद वस्तु, स्थिति के अनुसार पहले जैसी दिखाई देती है, तो हम कहते हैं कि उसमें घूर्णन सममिति है।
7. एक पूरे चक्कर (360° के) में, एक वस्तु जितनी बार स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, वह संख्या उस घूर्णन सममिति का क्रम कहलाती है।

अध्याय 12

ढोस आकारों का चित्रण

12.1 कक्षा 6 में हमने ढोस आकारों के बारे में पढ़ा है हमने पढ़ा है कि ढोस आकारों को त्रिविमीय आकार कहते हैं क्योंकि इसमें लम्बाई एवं चौड़ाई के अतिरिक्त ऊँचाई अथवा गहराई भी होती है।

घन, घनाभ, बेलन, शंकु एवं गोला त्रिविमीय आकृतियाँ हैं जबकि वर्ग, आयत, वृत्त आदि द्विविमीय आकृतियाँ हैं।

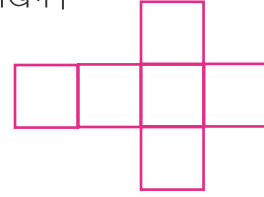
हमने यह पढ़ा है कि त्रिविमीय आकारों के फलक, किनारे एवं शीर्ष होते हैं कुछ आकारों के पृष्ठ समतल कुछ के वक्राकार एवं कुछ आकारों में दोनों प्रकार के पृष्ठ होते हैं।

इस अध्याय में हम ढोस आकारों का समतल पर चित्रण करना सीखेंगे।

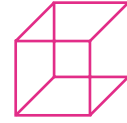
12.2 द्विविमीय एवं त्रिविमीय की पहचान

रेखा ने एक आयताकार पतले कागज को वर्गाकार जाल में इस तरह काटा। यह एक द्विविमीय जाल है। इसमें छः फलक हैं।

इस द्विविमीय जाल को मोड़कर छः फलकों से एक घन बनाया गया।



यह एक घन है जो त्रिविमीय आकृति है। इसमें लम्बाई, चौड़ाई के साथ ऊँचाई भी शामिल है। आप भी द्विविमीय एवं त्रिविमीय आकृतियों पर चर्चा करें। दी गई आकृतियों का उदाहरण के आधार पर मिलान कीजिए।



आकृति	आकृति के प्रकार	आकृति के नाम	आकृति	आकृति के प्रकार	आकृति के नाम
	द्विविमीय	त्रिभुज		द्विविमीय	वृत्त
	त्रिविमीय	बेलन		त्रिविमीय	शंकु
	द्विविमीय	घनाभ		त्रिविमीय	गोला
	त्रिविमीय	वर्ग		त्रिविमीय	घन

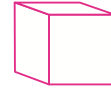
द्विविमीय आकृतियों को समतल आकृतियाँ या 2D आकृतियाँ तथा त्रिविमीय आकृतियों को ठोस आकार या 3D आकृतियाँ भी कहते हैं।

12.3 3-D आकारों का 2-D में निरूपण

जब ठोस आकारों को एक कागज (समतल) पर खींचा जाता है तो प्रतिबिम्बों को कुछ तिरछा (टेढ़ा) कर दिया जाता है ताकि वे त्रिविमीय दिखाई दें।

नीचे 3-D आकृतियों को समतल धरातल (कागज) पर बनाने की दो तकनीकों के बारे में बताया गया है।

दिए गए घन के चित्र को देखिए। सामने से देखने पर यह घन जैसा ही प्रतीत होता है जबकि वास्तव में इसके सभी तल देखा जाना संभव नहीं है। खींचे गये चित्र में सभी लम्बाइयाँ बराबर नहीं हैं जबकि एक घन में ये बराबर होनी चाहिए। फिर भी हम पहचान कर लेते हैं कि यह एक घन है।



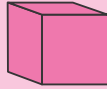
करो और सीखो

- नीचे कुछ कथन एवं आकारों के चित्र दिए गए हैं। प्रत्येक आकार के लिए कौनसा कथन सत्य है लिखिए

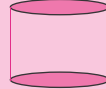
- मेरे छः आयताकार फलक हैं।
- मेरा एक ही पृष्ठ होता है और वह भी वक्राकार है।
- मेरे सभी फलक वर्गाकार हैं।
- मेरा एक फलक वक्राकार एवं दो फलक समतल है।
- मेरा एक फलक वक्राकार एवं एक फलक समतल है।



घनाभ



घन



बेलन



शंकु



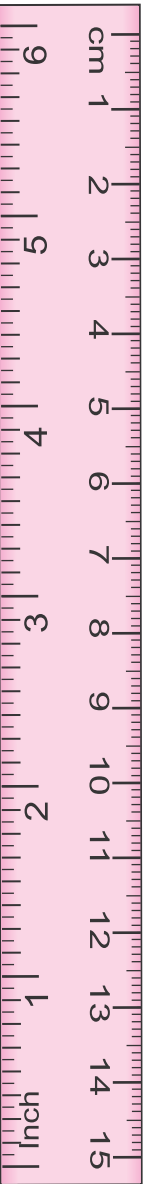
गोला

- सारणी भरिए।

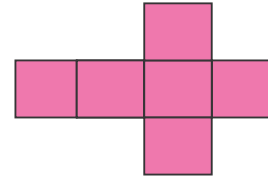
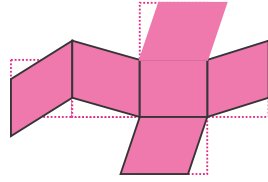
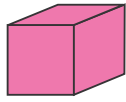
क्र.सं.	आकृति	पृष्ठ की संख्या	पृष्ठों का प्रकार	
			समतल	वक्र
1.	घन			
2.	घनाभ			
3.	बेलन	3	समतल-2	वक्र - 1
4.	शंकु			
5.	गोला			

12.3.1 त्रिविमीय आकारों का समतल पर निरूपण

अदिति अपने दोस्त को जन्मदिन पर उपहार दे रही है। वह गिफ्ट पैक करना चाहती है इसके लिए एक घनाभाकार गत्ते का डिब्बा बनाना है पर वह देखना चाहती है कि एक चोकोर डिब्बा बना कैसे होता है इसके लिए वह एक चाय पत्ती का डिब्बा काटकर खोल देती है।



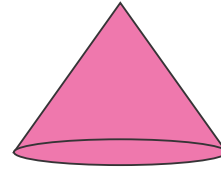
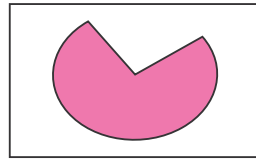
अब वह इसे कार्ड शीट पर बनाकर काटकर डिब्बा बना लेती है।



चाय पत्ती का
बंद डिब्बा

इसी प्रकार वह जन्मदिन की टोपियाँ बनाने के लिए भी कार्डशीट पर जाल बनाती है। कैंची से काटकर टोपियाँ बनाती है।

चाय पत्ती के
डिब्बे का जाल



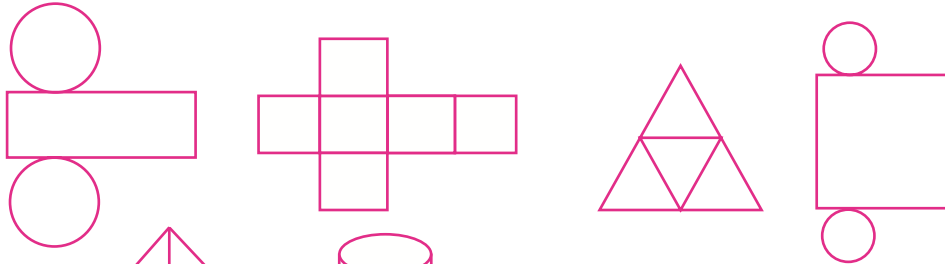
करो और सीखो

- (1) इसी प्रकार के जालक आप भी काटें एवं चोकोर डिब्बे बनाएँ।
- (2) एक बेलनाकार डिब्बा बनाने के लिए जालक बनाएँ।

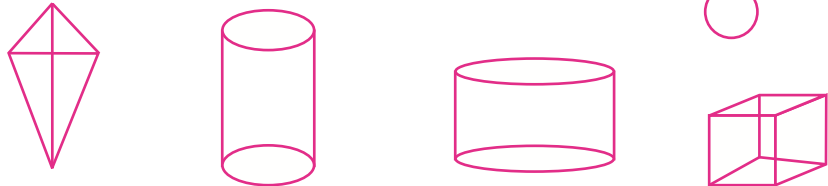
प्रश्नावली 12.1

1. नीचे कुछ ठोस आकारों के जालक दिए जा रहे हैं। उन्हें मोटे कागज पर बनाएँ उचित स्थान से मोड़कर त्रिविमीय आकृतियाँ बनाएँ और सही आकार पहचान कर मिलान करें।

जालक चित्र →



आकार →

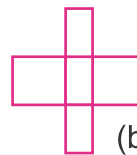


2. यहाँ प्रत्येक आकृति के लिए तीन जालक दी गई है। प्रत्येक आकृति के लिए उचित जालक चुनिए।

आकृति (i)



(a)

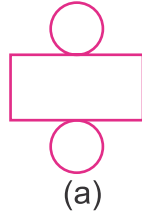
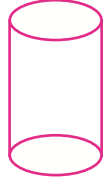


(b)

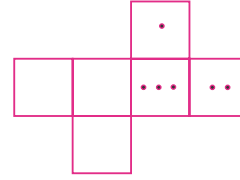
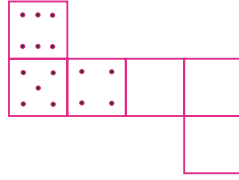


(c)

आकृति (ii)



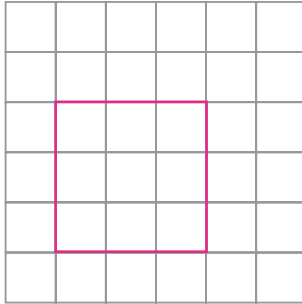
3. खलने का पासु आक ढन है। जिसके प्रत्येक फलक पर बिन्दु बने हुते हैं पासु के विपरीत पृष्ठुं पर बने बिंदुुं का युग 7 हुता है। नीचे पासु के दु जालक दिए गए हैं। रिक्त पृष्ठुं पर उचित संख्या में बिन्दु बनाइए।



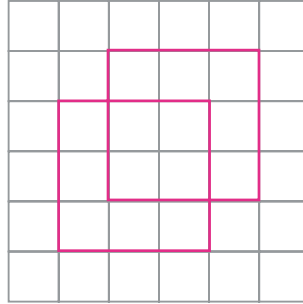
12.3.2 तिर्यक या तिरछा नक्शा (ग्रिड पेपर तकनीक)

ऐसा नक्शा (चिडुर) हम कैसे बना सकते हैं आओ यह बनाने की तकनीक सीखते हैं। इसके लिए हमें एक वर्गीकृत कागज (ग्रिड पेपर) की आवश्यकता हुगी।

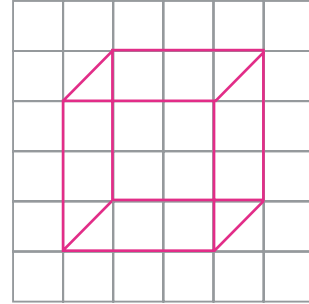
आइए हम $3 \times 3 \times 3$ के एक ढन (एक ऐसा ढन जिसका प्रत्येक किनारा 3 इकाई है) का तिर्यक चिडुर बनाने का प्रयत्न करते हैं।



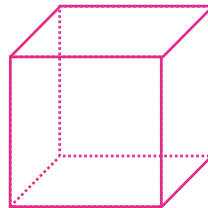
चरण - 1
सर्वप्रथम सामने का फलक खींचते है।



चरण - 2
सामने के फलक का सम्मुख फलक एक खाना खिसकाकर खींचते है। दुनुुं फलकुुं के माप बराबर हुने चाहिए।

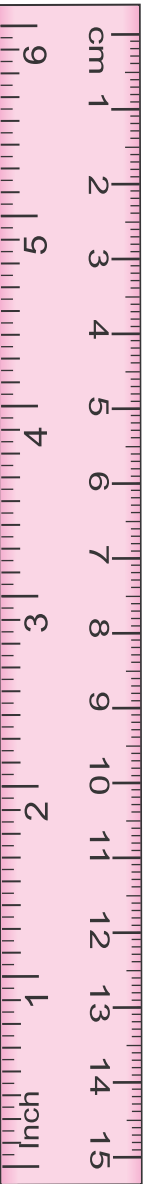


चरण - 3
संगत कुनुुं कु मिलाले हैं।



चरण - 4

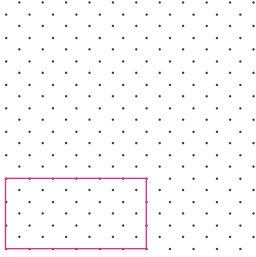
सुडे कागज पर यह चिडुर बनाने के लिए पार्श्व किनारुुं कु बिन्दु रेखाुुं का प्रयुग करते हुए खींचते हैं।



12.3.3 समदूरीक चित्र (आइसो मेट्रिक शीट तकनीक)

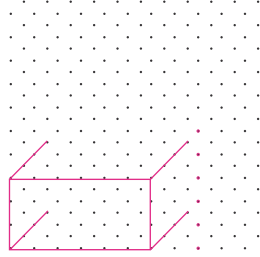
क्या आप आइसोमेट्रिक शीट के बारे में जानते हैं यह शीट एक ऐसा कागज होती है जो बिंदु रेखाओं से बने छोटे समबाहु त्रिभुजों में बँटा होता है। इस शीट में एक पंक्ति बिन्दु सामने के तल को तथा अगली पंक्ति के बिन्दु पार्श्वतल को दर्शाने में प्रयुक्त होते हैं। ताकि त्रिविमीय वस्तु की ऊँचाई या गहराई का आभास हो सके। ऐसी ही एक शीट इस पाठ्य पुस्तक के अंत में दी गई है।

आइए हम $7 \times 4 \times 4$ नाप के एक घनाभ (ऐसा घनाभ जिसकी लम्बाई 7 इकाई, चौड़ाई 4 इकाई तथा ऊँचाई या गहराई 4 इकाई हो) को आइसोमेट्रिक शीट पर बनाने का प्रयास करें।



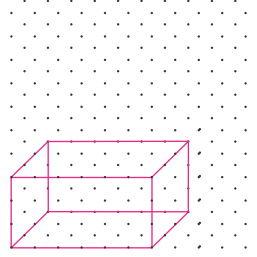
चरण - 1

सामने वाला फलक दर्शाने के लिए 7×4 के माप का एक आयत खींचिए।



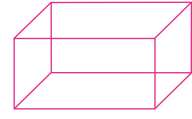
चरण - 2

आयत के चारों कोनों से 4 इकाई माप के चार रेखाखण्ड खींचिए।



चरण - 3

सुमेलित कोनों को उपयुक्त रेखाखंडों से मिलाइए।

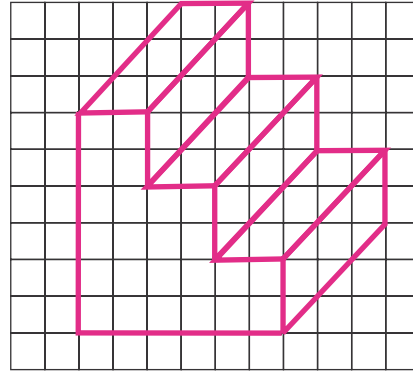
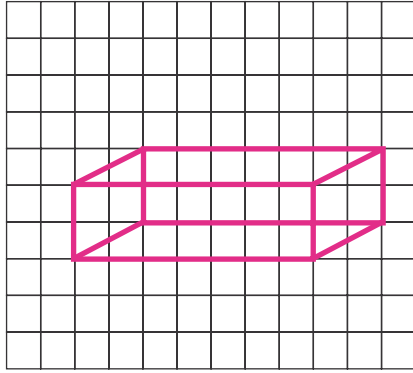


चरण - 4

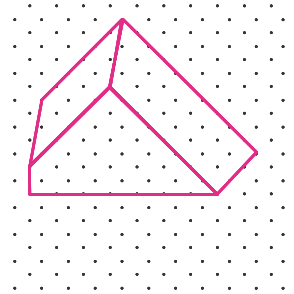
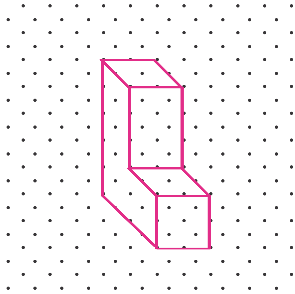
यह घनाभ का एक समदूरीक चित्र है।

प्रश्नावली 12.2

- निम्न बिन्दु रेखा समदूरीक आकारों का तिर्यक चित्र (ग्रिड पेपर पर) खींचिए।



- निम्न तिर्यक चित्रों के बिंदु रेखा कागज (आइसोमेट्रिक शीट) पर समदूरीक चित्र खींचिए।



3. किसी घनाभ की विमाएँ 5 सेमी, 3 सेमी तथा 2 सेमी है। इस घनाभ के तीन भिन्न-भिन्न समदूरीक चित्र बनाइए।

गतिविधि 1 स्लाइसिंग (टुकड़े करना) का खेल -

नीचे दिए गए डबलरोटी के चित्र को देखिए यह घनाभ के आकार की है। किन्तु इसका तल वर्गाकार है। जब इसे चाकू द्वारा चित्रानुसार उर्ध्वाधर काटा जाता है तो अनेक टुकड़े प्राप्त होते हैं तथा प्रत्येक टुकड़े का फलक वर्गाकार होता है। इस वर्गाकार फलक को डबल रोटी की एक अनुप्रस्थ काट कहते हैं।

यदि डबल रोटी को क्षैतिज तल के अनुदिश काटा जाता है तो एक अलग प्रकार का अनुप्रस्थ खण्ड प्राप्त होता है। इस बारे में सोचिए।

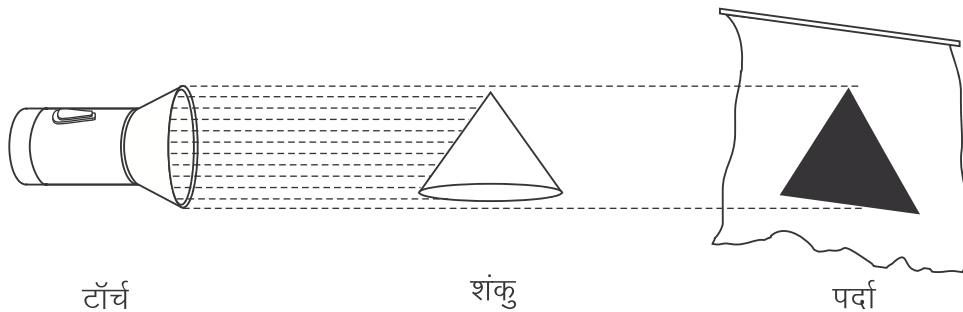
इसी प्रकार रसोईघर में भी सब्जियों को काटते समय उनके कटे हुए टुकड़ों को ध्यान से देखिए एवं उनके अनुप्रस्थ खण्डों के बारे में विचार कीजिए।



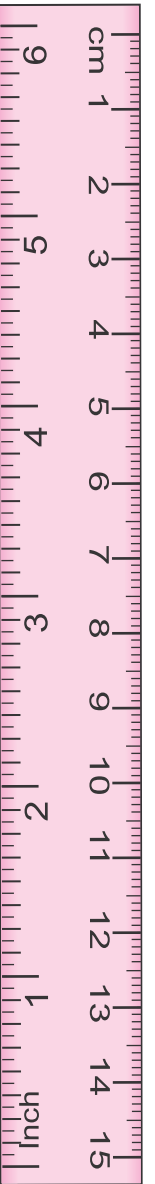
गतिविधि 2 परछाई का खेल

(त्रिआयामी आकारों का छाया चित्रण) त्रिविमीय वस्तुएँ द्विविमीय आकृतियों में कैसी दिखाई पड़ती है, इसे एक दूसरे तरीके (परछाई) द्वारा भी देखा जा सकता है। यह एक प्रकार का मनोरंजन है जहाँ ठोस वस्तुओं को किसी प्रकाशमय स्रोत के सामने रखकर उनके गतिमान प्रतिबिम्बों के भ्रम उत्पन्न किए जाते हैं।

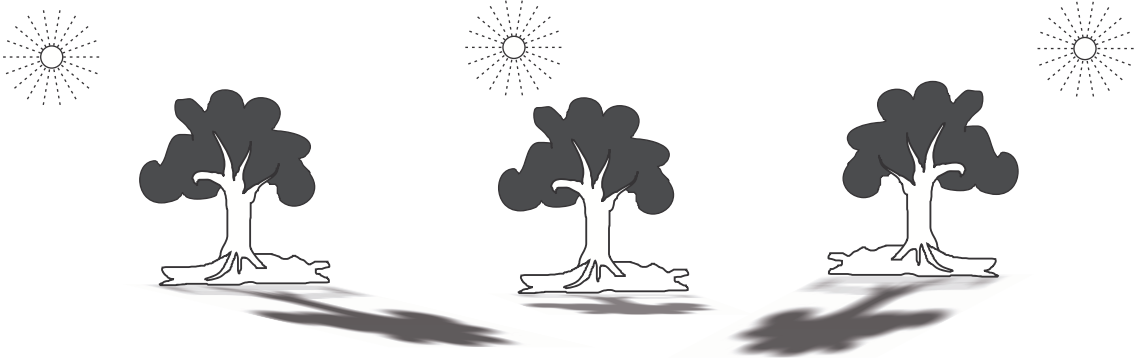
इसी प्रयोग को समझने के लिए एक ओवरहेड प्रोजेक्टर या टॉर्च व भिन्न-भिन्न आकारों की ठोस वस्तुओं की आवश्यकता होती है। चित्रानुसार ठोस को रखकर उस पर टॉर्च का प्रकाश डालिए।



पर्दे पर किस प्रकार का प्रतिबिम्ब दिखाई देता है ? यदि शंकु के स्थान पर घन रखा जाएगा तो परछाई कैसी प्राप्त होगी ?

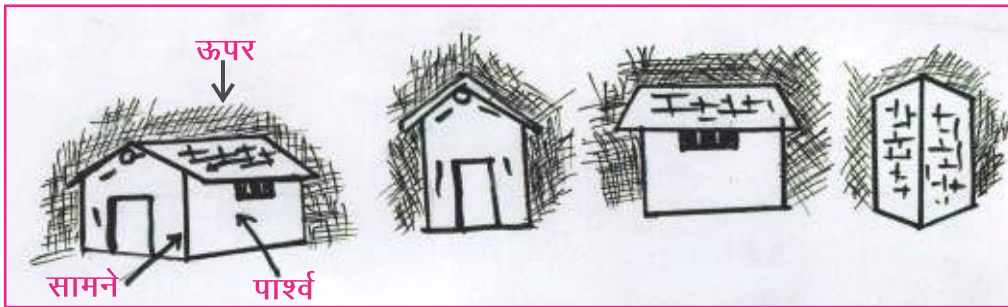


प्रकाश के स्रोत को विभिन्न स्थितियों में रखकर व ठोस वस्तु की स्थिति बदलकर प्रयोग को दोहराइए। प्राप्त परछाई की आकृति और आकार पर पड़ने वाले प्रभाव का अध्ययन कीजिए। आप भी परिवेश में उपलब्ध पेड़ों, भवनों आदि की प्रातःकाल, दोपहर (जब सूर्य ठीक उपर हो) तथा सायंकाल को बनने वाली परछाईयों का अवलोकन कर विभिन्न आकारों व आकृतियों का अध्ययन कीजिए।



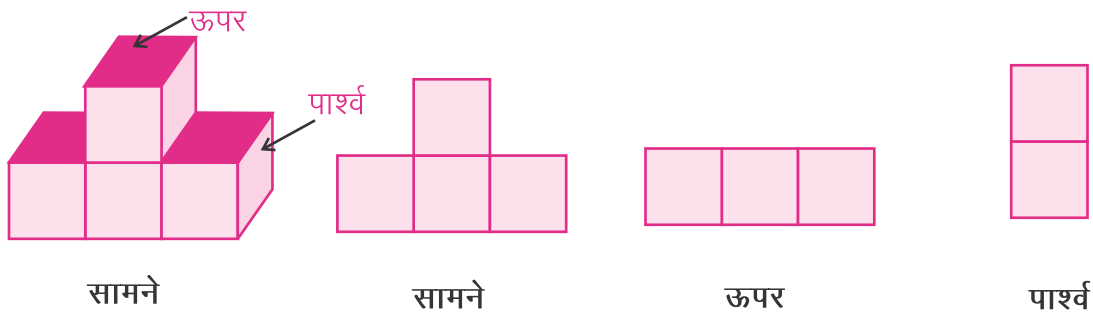
12.4 ठोस आकारों को विभिन्न कोणों से देखना (सामने, पार्श्व एवं उपर से दृश्य)

किसी वस्तु (ठोस आकार) को उसके सामने, दाईं ओर से या उसके ऊपर से देखने पर प्रत्येक बार एक भिन्न दृश्य दिखाई देता है।



सामने का दृश्य पार्श्व का दृश्य ऊपर का दृश्य

इसी प्रकार निम्न आकृति को देखकर उसके सामने के, ऊपर के तथा पार्श्व दृश्य पर विचार कीजिए।



प्रश्नावली 12.3

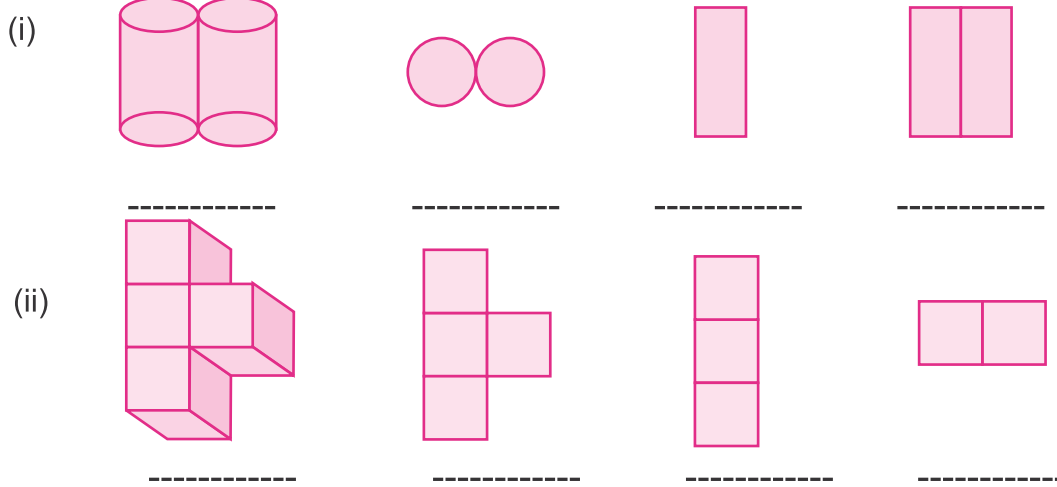
1. निम्न ठोसों को उर्ध्वाधर तथा क्षैतिज रूप से काटने पर किस प्रकार की अनुप्रस्थ काट प्राप्त होती है ?

- (i) एक पासा (ii) एक ईंट (iii) एक बेलनाकार लकड़ी का गट्टा
(iv) एक गोल सेब (v) एक आइसक्रीम शंकु।

2. किसी ओवरहेड प्रोजेक्टर के बल्ब के नीचे कुछ ठोस को रखकर निम्न प्रकार के छाया चित्र प्राप्त किए गए हैं। छाया चित्रों को देखकर संभावित ठोसों के नाम लिखिए।



3. नीचे दिए गए आकारों के सामने (फ्रंट), पार्श्व(साइड) तथा ऊपर (टॉप) के दृश्य दिए गए हैं, इन्हें पहचान कर उनके नीचे लिखिए।

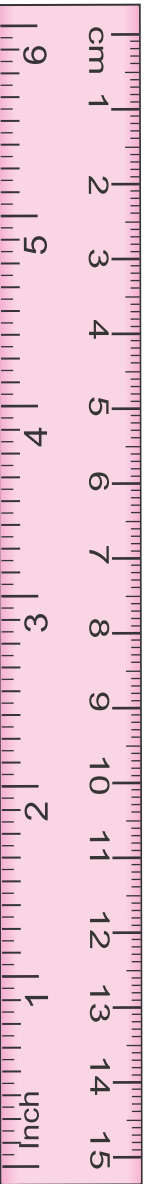


4. नीचे दिए गए ठोसों को सामने से, पार्श्व से तथा ऊपर से देखने पर बनने वाले दृश्यों को खींचिए।



5. दिए गए कथनों की जाँच कर सत्य/असत्य बताइए।

- (1) खीरा (ककड़ी) को उर्ध्वाधर काटने पर प्राप्त होने वाली अनुप्रस्थ काट लगभग वृताकार होती है।
(2) एक शंक्वाकार टेन्ट के ठीक ऊपर सूर्य के चमकने पर बनने वाली टेन्ट की छाया त्रिभुजाकार होती है।
(3) किसी घनाकार बॉक्स के सामने, पार्श्व तथा ऊपर से देखने पर समान दृश्य दिखाई देते हैं।



हमने सीखा

- समतल आकृतियों की दो विमाएँ (2D) होती हैं। तथा ठोस आकारों की तीन विमाएँ (3D) होती हैं।
- ठोस आकार के कोने उसके शीर्ष, उसके ढाँचों के रेखाखण्ड उसके किनारे (या कोर) तथा उसके सपाट पृष्ठ उसके फलक कहलाते हैं।
- ठोस का एक जाल दो विमाओं में एक ऐसा ढाँचा (या रूपरेखा) है, जिसे मोड़कर वह ठोस प्राप्त हो जाता है। एक ही ठोस के अनेक प्रकार के जाल हो सकते हैं।
- ठोस आकारों को समतल पृष्ठों (जैसे कागज, फर्श, ब्लेक बोर्ड) पर खींचा जा सकता है, इसे हम 3-D ठोस का 2-D निरूपण कहते हैं।
- एक ठोस के दो प्रकार से 2-D निरूपण सम्भव है –
 - ग्रिड पेपर पर
 - एक समदूरस्थ चित्र (आइसोमेट्रिक शीट पर)
- एक ठोस के विभिन्न भागों को अनेक विधियों से देखा जा सकता है।
 - एक विधि यह है कि दिए हुए आकार को काट लिया जाए। इससे हमें ठोस की एक अनुप्रस्थ काट प्राप्त हो जाती है।
 - एक अन्य विधि यह है कि 3-D आकार की एक 2-D छाया देखी जाए।
 - तीसरी विधि यह है कि ठोस आकार को विभिन्न कोणों से देखा जाए। देखे गए आकार के सामने का दृश्य, पार्श्व दृश्य और ऊपर का दृश्य हम उस आकार के बारे में बहुत अधिक जानकारी प्रदान कर सकते हैं।



अध्याय 13

बीजीय व्यंजक

13.1 हमने चरों और अचरों से युक्त पदों जैसे $x, x + 1, 2p-1, y-5, 3y+4$ के बारे में पिछली कक्षा में अध्ययन किया है। हमने यह देखा कि इन पदों के द्वारा समस्याओं को सरलता और व्यापकता से अभिव्यक्त किया जा सकता है।

बीजीय व्यंजकों (Algebraic expressions) को बीजगणित में व्यापक आवश्यकता के रूप में प्रस्तुत किया जाता है और इसी व्यापक अवधारणा को केन्द्र में मान कर बीजीय व्यंजकों के साथ संक्रियाएँ कर इनका अनुप्रयोग समस्याओं के समाधान में किया जाता है।

13.2 बीजीय व्यंजक

पिछली कक्षा में हमने तीलियों के खेल से पैटर्न बनाए।

उदाहरण 1 चित्रानुसार एक माचिस की तीली (I) के साथ  आकार की दो-दो तीलियों के तीन सेट रख दिए जाएँ।



इस आकृति में तीलियों की संख्या क्रमशः 3, 5, 7 हैं जिसे $2 \times 1 + 1, 2 \times 2 + 1, 2 \times 3 + 1$ आदि लिखा जा सकता है।

यदि तीलियों के सेट को "n" द्वारा व्यक्त किया जाए तो सामान्य रूप से तीलियों की संख्या को $2 \times n + 1$ अर्थात् $(2n + 1)$ द्वारा सरलता से व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार से चरों और अचरों का संयोजन ही "बीजीय पद" कहलाता है। आओ कुछ और बीजीय पदों को देखते हैं।

(1) किसी संख्या में 3 के जोड़ को $(x + 3)$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

(2) किसी संख्या के चौगुने में से 5 के घटाव को $(4x-5)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(3) किसी संख्या के आधे से एक कम को $(\frac{x}{2} - 1)$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

यहाँ अज्ञात संख्या को x द्वारा दर्शाया गया है।

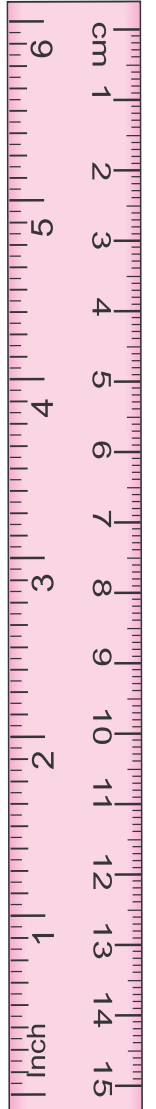
अतः बीजीय पदों का इस प्रकार संयोजन करने से $(x + 3), (4x - 5), (\frac{x}{2} - 1)$ आदि 'बीजीय व्यंजक' प्राप्त होते हैं। यहाँ हम उनके गुणधर्मों के बारे में अध्ययन करेंगे।

बीजीय व्यंजक में कम से कम एक चर राशि अवश्य होती है।

13.3 बीजीय व्यंजक के पद

किसी भी बीजीय व्यंजक के छोटे - छोटे भाग होते हैं जैसे $5x + 3$ पर विचार करते हैं। इसमें पहले हम 5 व x का गुणा करके $5x$ बनाते हैं और फिर इसमें 3 जोड़ते हैं। इसी प्रकार $2x^2 + 3y$ में हमने 2, x और x का गुणा करके $2x^2$ बनाया फिर अलग से 3 व y का गुणा करके $3y$ बनाया $2x^2$ व $3y$ बनाने के बाद हमने दोनों को जोड़ दिया।

इस प्रकार व्यंजक $2x^2 + 3y$ बनता है।

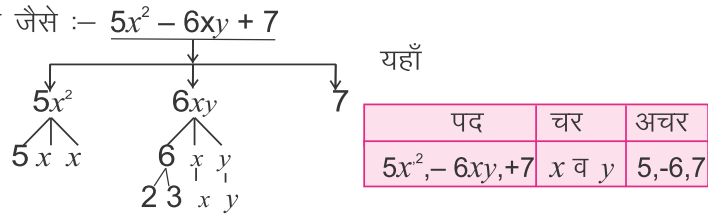


व्यंजक के ये छोटे-छोटे भाग जो पहले अलग से बनाए जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं व्यंजक के पद कहलाते हैं। व्यंजक $9y^2 - 4xy$ में दो पद हैं पहला पद $9y^2$ क्रमशः 9, y और y का गुणनफल है। दूसरा पद $-4xy$ क्रमशः -4, x, y का गुणनफल है।

फिर इन्हें $9y^2 + (-4xy)$ करते हैं और व्यंजक $9y^2 - 4xy$ प्राप्त होता है।

13.3.1 एक पद के गुणनखण्ड

बीजीय व्यंजक का एक पद कई चरों एवं अचरों का गुणनफल हो सकता है। हम एक व्यंजक के तथा पदों के गुणनखण्डों को एक सरल एवं आकर्षक प्रकार से पेड़ आरेख (Tree diagram) द्वारा निरूपित कर सकते हैं जैसे :- $5x^2 - 6xy + 7$



करो और सीखो नीचे दी गई सारणी को भरिए।

व्यंजक	पदों की संख्या	पद	पद के गुणनखण्ड	बीज (चर)	अचर
$3x^2 + 6xy + 7y^2$	3	$3x^2, 6xy, 7y^2$	$3x^2 = 3 \times x \times x$ $6xy = 2 \times 3 \times x \times y$ $7y^2 = 7 \times y \times y$	x, y	3, 6, 7
$a^2 - b^2$	2				
$8p^2 - 3p + 7$					

13.4 गुणांक

किसी पद के किन्हीं भी गुणनखण्डों के गुणांक उस पद के शेष गुणनखण्डों के गुणनफल के बराबर होता है। गुणांक बीजीय एवं संख्यात्मक दोनों ही प्रकार के हो सकते हैं।

- जैसे -
- $10xy$ में xy का गुणांक = 10
 - $10xy$ में y का गुणांक = 10x
 - $10xy$ में 10 का गुणांक = xy

जब किसी पद का गुणांक +1 होता है हम उसे नहीं लिखते हैं जैसे x^3y^2 में x^3y^2 का गुणांक +1 है, इसी प्रकार $-x^2y^2$ में x^2y^2 का गुणांक (-1) है।

उदाहरण 1 निम्नलिखित व्यंजकों में x का गुणांक क्या है ?

हल $8x - 3y, 5 - x + z, y^2x - z^2, 2z - 5xp$

	व्यंजक	गुणनखण्ड वाला पद	गुणांक
(i)	$8x - 3y$	8x	8
(ii)	$5 - x + z$	-x	-1
(iii)	$y^2x - z^2$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xp$	-5xp	-5p

करो और सीखो

निम्नलिखित बीजीय व्यंजक $4x^2y^2 - 3xy + 15$ में गुणांक का मिलान कीजिए।

x^2y^2 का गुणांक	x^2
xy का गुणांक	$-3y$
x^2 का गुणांक	$-y$
$4y^2$ का गुणांक	-3
x का गुणांक	$4y^2$
$3x$ का गुणांक	4

प्रश्नावली 13.1

- पेड़ आरेख बनाकर व्यंजक के पदों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
 - $9x^2 - 8$
 - $12x^2y + 8xy^2 - 15y^3$
 - $a^3 - b^3$
- दिए गए पदों में गुणांक बताइए।
 - $4x$ में x का
 - $9x^2y^2$ में y^2, x^2 एवं 9 का
 - $\frac{-8}{5} x^3y^3$ में x^3, y^3 एवं x^3y^3 का
 - $\frac{9a^2b^2}{13}$ में a^2 का एवं b^2 का

13.5 समान और असमान पद

जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे ही हों तो वे पद समान कहलाते हैं। जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड भिन्न-भिन्न हो तो वे असमान पद कहलाते हैं। जैसे $5xy - 6x + 3xy - 9$ में $5xy$ और $3xy$ को देखते हैं तो $5xy$ के गुणनखण्ड $5, x$ और y है तथा $3xy$ में $3, x$ और y है। इस प्रकार इनके बीजीय (अर्थात् वे जिनमें चर है) गुणनखण्ड एक ही है। इसलिए ये समान पद है।

$3xy, 5yx$ समान पदीय होते हैं इनमें चरों के गुणन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि $xy = yx$

इसके विपरीत पदों $5xy$ और $-6x$ में भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखण्ड है। वे असमान पद है इसी प्रकार पद $5xy$ और -9 असमान पद है। और $3xy$ और -9 भी असमान पद है।

करो और सीखो

निम्नलिखित में से समान पदों को छाँटिए।

$3pq, -5p, 6q + 5, -8pq, p^2 + q, qp$

उदाहरण 2 कारण सहित बताइए कि पदों के निम्नलिखित युग्मों के कौन-कौन से युग्म समान पदों के हैं तथा कौन कौन से युग्म असमान पदों के हैं ?

क्रम	पद युग्म	गुणनफल	बीजीय गुणनखण्ड	कारण
1.	3ab 3b	3 x a x b 3 x b	भिन्न-भिन्न	a चर दूसरे पद में नहीं है।
2.	17a -6a	17 x a -6 x a	समान	दोनों बीजीय गुणनखण्ड समान हैं।
3.	5a ² b 5ab ²	5 x a x a x b 5 x a x b x b	भिन्न-भिन्न	दोनों में चर एक समान है पर उनकी घातें असमान हैं।
4.	-4ab 7ab	-4 x a x b 7 x b x a	समान	दोनों बीजीय गुणनखण्ड समान हैं।

13.6 बहुपदी व्यंजक

एक पदीय	जिनमें केवल एक पद हो जैसे	$7xy, -3m, y^2, x^2y^2$
द्विपदीय	जिनमें केवल दो पद हों जैसे	$x+y, x-5, pq+5, m^2n^2+5m$
त्रिपदीय	जिनमें केवल तीन पद हों जैसे	$x+y+2, 3x^2-5x+7, ab+ab^2+b^2$

एक या एक से अधिक पदों वाले व्यंजक को बहुपदीय व्यंजक भी कहते हैं।

करो और सीखो

निम्नलिखित में से एक पदीय, द्विपदीय एवं त्रिपदीय व्यंजकों को छाँटकर उपयुक्त बॉक्स में लिखिए।

- $2a^2 + b$
- $4x^2y^3$
- $3m - 2n + 1$
- $2mn - 3$
- $\frac{7}{8}xy^2z$
- $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}xy + xy^2$
- $ab + bc + ca$
- $ax^2 + bx + c$
- $5xy - 7 + 3n$
- $3x + 1$
- $\frac{9}{17}a^2 + b^2 - \frac{1}{2}$
- $\frac{8}{19}p^2r^2q^2$



2. समान पदों का मिलान कीजिए।

(a) $4a^2b$

(i) $\frac{8}{13}x^2y^2z^2$

(b) $5nm$

(ii) $\frac{3p}{q}$

(c) $\frac{3}{4}x^2y^2z^2$

(iii) $\frac{5a^2}{7b^2}$

(d) $\frac{-1a^3b^3}{5c^3}$

(iv) ga^2b

(e) $\frac{-22p}{7q}$

(v) nm

(f) $\frac{a^2}{b^2}$

(vi) $\frac{a^3b^3}{c^3}$

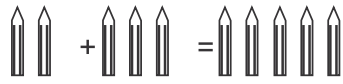
(g) xyz

(vii) $\frac{8}{x^2y^2z^2}$

(h) $\frac{3}{x^2y^2z^2}$

(viii) $19xyz$

13.7 समान पदों को जोड़ना और घटाना



2 पेन्सिल + 3 पेन्सिल = 5 पेन्सिल

$$2x + 3x = (2+3)x \\ = 5x$$



2 पेन्सिल + 3 चॉक

हम पेन्सिलों का योग कर सकते हैं परन्तु पेन्सिलों तथा चॉक को नहीं जोड़ सकते हैं। अर्थात् हम समान इकाई (समान चर वाली) राशियों को जोड़ घटा सकते हैं।

इसी प्रकार – $5x^2y + 3x^2y = 8x^2y$

$9a^2b^2 - 4a^2b^2 = 5a^2b^2$

समान पदों को जोड़ने पर प्राप्त पद का संख्यात्मक गुणांक उन सभी पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है। इसी प्रकार दो समान पदों के घटाने पर प्राप्त परिणाम इनके संख्यात्मक गुणांकों के अंतर के बराबर होता है। यह ध्यान रखना है कि असमान पदों को उस प्रकार जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता जिस प्रकार कि समान पदों को जोड़ या घटा लिया जाता है।

अर्थात् x में 5 जोड़ने पर परिणाम $x + 5$ आता है इसी प्रकार $3xy$ में 7 जोड़ने पर $3xy + 7$ व $3xy$ में से 7 घटाने पर $3xy - 7$ आता है।

बीजीय व्यंजकों को जोड़ने, घटाने के लिए चरण –

1. समान एवं असमान पदों की पहचान करते हैं।
2. समान पदों को उनके चिह्न के साथ लिखते हैं।
3. उन समान पदों का नियमों से जोड़ घटा करते हैं।
4. यदि एक या अधिक असमान पद शेष रहते हैं तो उन्हें उनके चिह्न के साथ संयोजित कर लिख देते हैं।

उदाहरण 3 $3x + 8y$ और $8x + 5y$ को जोड़िए।

हल

$$\begin{aligned} & (3x + 8y) + (8x + 5y) \\ &= 3x + 8x + 8y + 5y \quad (\text{समान बीजों वाले पदों को एक साथ रखने पर}) \\ &= 11x + 13y \end{aligned}$$

इनको हम सामान्य स्तम्भ जोड़ो की तरह भी जोड़ सकते हैं।

$$\begin{array}{r} 3x + 8y \\ 8x + 5y \\ \hline 11x + 13y \end{array}$$

उदाहरण 4 $7ab + 4a$ और $2a + 5ba$ को जोड़िए।

हल

$$\begin{aligned} & (7ab + 4a) + (2a + 5ba) \\ &= 7ab + 4a + 2a + 5ab \\ &= 7ab + 5ab + 4a + 2a \\ &= 12ab + 6a \end{aligned} \quad \begin{array}{r} 7ab + 4a \\ + 5ab + 2a \\ \hline 12ab + 6a \end{array}$$

उदाहरण 5 $11xy - 5m^2$ में से $3m^2 - 2xy$ को घटाइए।

हल

$$\begin{aligned} &= (11xy - 5m^2) - (3m^2 - 2xy) \\ &= 11xy - 5m^2 - 3m^2 + 2xy \\ &= 11xy + 2xy - 5m^2 - 3m^2 \\ &= 13xy - 8m^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 6 $(3m + 2n - 7) + (2m^2 + 5m + n^2)$ को हल कीजिए।

हल

$$\begin{aligned} & 3m + 2n - 7 + 2m^2 + 5m + n^2 \\ &= 3m + 5m + 2n - 7 + 2m^2 + n^2 \\ &= 8m + 2n - 7 + 2m^2 + n^2 \\ &= 2m^2 + n^2 + 8m + 2n - 7 \end{aligned}$$

करो और सीखो ◆

बीजीय व्यंजकों को जोड़िए और घटाइए।

(1) $m - n$ व $m + n$ को

(2) $mn - 5 + 2n$ व $nm + 2m - 3$

(3) $\frac{xy}{5} + \frac{x}{3}$ व $\frac{xy}{2} - \frac{x}{3}$

प्रश्नावली 13.2

- निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को जोड़िए।
 - $t - 4tz, 2t + 6tz$
 - $7xy, 5xy, 3xy, -2xy$
 - $5x - 7y, 3y - 4x + 2, 2x - 3xy - 5$
 - $m^2 - n^2 - 1, n^2 - 1 - m^2, 1 - m^2 - n^2$
 - $3x + 11 + 8z, 5x - 7$
 - $a^2b + ab + ab^2, -a^2b + 2ba + 2a^2b^2$
 - $x - y, y - z, z - x$
- निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को घटाइए।
 - x^2 में से $-5x^2$
 - $(a + b)$ में से $(a - b)$
 - $4x^2 - 3xy + 8$ में से $x^2 + 5x + 4$
 - $3xy - 2x^2 - 2y^2$ में से $5x^2 - 7xy + 5y^2$
 - $5p^2 + 2q^2 - pq^2$ में से $4pq - 5q^2 - 3p^2$
 - $5x - 10$ में से $x^2 + 10x - 5$
- $x + y + z$ प्राप्त करने के लिए $7x - 8y$ में से क्या घटाना चाहिए ?
- $2p + 6$ में क्या जोड़ें कि $3p - q + 6$ प्राप्त हो जाए ?

13.8 किसी बीजीय व्यंजक का मान ज्ञात करना

एक बीजीय व्यंजक का मान उस व्यंजक को बनाने वाले चरों के मानों पर निर्भर करता है। हम अनेक स्थितियों में किसी भी व्यंजक में चर का मान रखकर उससे बनने वाले समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं, यह जाँच करते हैं।

उदाहरण 7 निम्नलिखित व्यंजकों के मान $x = 3$ के लिए ज्ञात कीजिए।

(i) $x + 5$

(ii) $9x - 3$

(iii) $25 - 3x^2$

(iv) $4x^2 + 5x - 51$

हल

- $x + 5$ में x के स्थान पर 3 रखने पर
 $= 3 + 5$
 $= 8$
- $9x - 3$ में x के स्थान पर 3 रखने पर
 $= (9 \times 3) - 3$
 $= 27 - 3 = 24$
- $25 - 3x^2$
 $= 25 - 3 \times (3)^2$
 $= 25 - 3 \times 3 \times 3 = 25 - 27 = -2$
- $4x^2 + 5x - 51$
 $= 4 \times (3)^2 + 5(3) - 51$
 $= 4 \times 9 + 5 \times 3 - 51$
 $= 36 + 15 - 51 = 51 - 51 = 0$

उदाहरण 8 $a = 3$ और $b = 2$ के लिए निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $a + b$ (ii) $5a - 2b$ (iii) $a^2 - 2ab + b^2$ (iv) $a^3 - b^3$

हल $a = 3$ और $b = 2$, दिए गए व्यंजकों में रखने पर

(i) $a + b = 3 + 2 = 5$ (ii) $5a - 2b = 5 \times 3 - 2 \times 2 = 15 - 4 = 11$

(iii) $a^2 - 2ab + b^2$ (iv) $a^3 - b^3$
 $= (3)^2 - 2 \times 3 \times 2 + (2)^2$ $= (3)^3 - (2)^3$
 $= 9 - 12 + 4$ $= 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2$
 $= 13 - 12 = 1$ $= 27 - 8$
 $= 19$

प्रश्नावली 13.3

- यदि $x = 2$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
 (i) $x - 3$ (ii) $2x - 5$ (iii) $9 - 6x$ (iv) $3x^2 - 4x - 7$ (v) $\frac{5x}{2} - 4$
- यदि $p = -1$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
 (i) $4p + 5$ (ii) $-3p^2 + 4p + 8$ (iii) $3(p - 2) + 6$
- यदि $a = 2$ और $b = -2$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
 (i) $a^2 - b^2$ (ii) $a^2 - ab + b^2$ (iii) $a^2 + b^2$
- यदि $x = 1$ और $y = 0$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
 (i) $2x + 2y$ (ii) $2x^2 + y^2 + 1$ (iii) $2x^2y + 2x^2y^2 + y^2$ (iv) $x^2 + xy + 5$

हमने सीखा

- बीजीय व्यंजक चरों एवं अचरों से बनते हैं इनको बनाने के लिये चरों एवं अचरों पर $+$, $-$, \times , \div की संक्रियाएँ करते हैं।
- व्यंजक, पदों से मिलकर बनते हैं, पदों को जोड़कर व्यंजक बनाया जाता है।
- कोई भी पद उसके गुणनखण्ड का एक गुणनफल होता है, चरों के गुणनखण्ड को बीजीय गुणनखण्ड कहते हैं। पद का गुणांक उसका संख्यात्मक गुणनखण्ड होता है। पद का कोई भी एक गुणनखण्ड पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है।
- एक या अधिक पदों से बना व्यंजक एक बहुपद कहलाता है। ये एक पदीय (एक पद वाला), द्विपदी (दो पदों वाला) तथा त्रिपदीय (तीन पदों वाला) हो सकता है।
- जिनके बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे हो समान पद कहलाते हैं तथा भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखण्ड वाले पद असमान पद कहलाते हैं।
- दो समान पदों का योग या अंतर एक अन्य समान पद होता है। जिनका गुणांक उन समान पदों के गुणांकों का योग या अंतर के बराबर होता है।
- दो समान पदों वाले बीजीय व्यंजकों को जोड़ा या घटाया जा सकता है। जो पद समान नहीं है उन्हें छोड़ दिया जाता है।
- किसी भी बीजीय व्यंजक का मान चरों के मान पर निर्भर करता है।

अध्याय 14

सरल समीकरण

14.1 पिछली कक्षा में हमने बीजीय पद, बीजीय व्यंजक एवं समीकरण के बारे में पढ़ा। इसके कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं।

बीजीय पद $2x, 3y, 5p$ आदि।

बीजीय व्यंजक $3x + 5, 2y - 3, 5p - 7$ आदि।

समीकरण $x = 2, y = z + 1, p + 1 = 5$ आदि।

हमने गणितीय कथनों को समीकरण के रूप में लिखना अर्थात् एक चर राशि वाले समीकरणों का निरूपण और उनका हल ज्ञात करने की "प्रयास एवं भूल विधि" का अध्ययन किया और सीखा कि यदि समीकरण का हल (चर का मान) कथन के सभी प्रतिबंधों (शर्तों) को संतुष्ट नहीं करता है तो समीकरण बनाने या उसे हल करने में कहीं कोई त्रुटि है। अतः पुनः विचार कर संशोधन की आवश्यकता है। अर्थात् चर का कोई मान जिसके लिए यह कथन सत्य हो इस समीकरण का हल या मूल कहलाता है। अब अन्य विधियों का अध्ययन करेंगे।

14.2 समीकरण हल करना

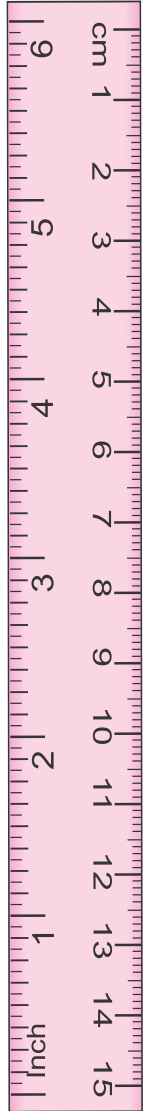
समीकरण में दो पक्ष होते हैं प्रथम पक्ष बाईं ओर है जिसे वाम पक्ष या L.H.S कहते हैं। दूसरा पक्ष दाईं ओर है दक्षिण पक्ष या R.H.S. कहते हैं। दोनों पक्षों के बीच समता '=' का चिह्न होता है। दोनों पक्षों का संख्यात्मक मान बराबर होता है। समीकरण के दोनों पक्ष तुला के दो संतुलित पलड़ों के समान है। यदि दोनों पक्षों में समान गणितीय संक्रियाएँ (किसी संख्या को जोड़ना, घटाना, गुणा करना या भाग लगाना) की जाए तो भी समीकरण संतुलित रहता है। हाँ ऐसा करने से उसका स्वरूप अवश्य बदल जाता है।



किसी समीकरण $3x - 7 = 5$ को हल करने के लिए उसका स्वरूप बदलकर $x = \frac{5+7}{3}$ करना होता है अर्थात् LHS में केवल चर राशि हो तथा RHS में संख्यात्मक राशि हो। इसके लिए नीचे लिखे चरणों में से एक या अधिक चरणों का प्रयोग करते हैं।

1. दोनों पक्षों में एक ही संख्या को जोड़ना।
2. दोनों पक्षों में से एक ही संख्या को घटाना।
3. दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा करना।
4. दोनों पक्षों में एक ही शून्येतर संख्या से भाग देना।

समीकरण हल करने की उपर्युक्त विधि को "तुला विधि" कहते हैं।



इसे निम्नलिखित उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण 1 समीकरण $3x - 7 = 5$ को हल कीजिए।

हल दोनों पक्षों में 7 जोड़ने पर

$$3x - 7 + 7 = 5 + 7$$

$$3x = 12$$

दोनों पक्षों में 3 का भाग देने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

उत्तर की जाँच

समीकरण $3x - 7 = 5$ का हल $x = 4$ प्राप्त हुआ तो x के स्थान पर 4 प्रतिस्थापित करके दोनों पक्षों का मान ज्ञात करें।

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 3x - 7 \\ &= 3 \times 4 - 7 \\ &= 12 - 7 \\ &= 5 = \text{RHS} \end{aligned}$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

एक पक्ष में से किसी पद को चिह्न बदल कर दूसरे पक्ष में ले जाने तथा चर के गुणांक को दूसरे पक्ष में ले जाकर गुणा करने अथवा भाग लगाने को **पक्षांतरण** कहते हैं।

उदाहरण 2 पक्षांतरण द्वारा समीकरण $5x + 2 = 17$ को हल कीजिए।

हल

$$5x + 2 = 17$$

$$5x = 17 - 2 \quad (2 \text{ के पक्षांतरण से})$$

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5} \quad (\text{गुणांक } 5 \text{ के पक्षांतरण से})$$

$$x = 3$$

उत्तर की जाँच

$$\text{LHS} = 5x + 2 = 5 \times 3 + 2 = 15 + 2 = 17 = \text{RHS}$$

अतः उत्तर $x = 3$ सही है।

करो और सीखो

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

तुला विधि

$$\begin{aligned} 7x + 6 &= 34 \\ 7x + 6 - \dots &= 34 - \dots \\ 7x &= \dots \\ x &= \dots \end{aligned}$$

पक्षांतरण विधि

$$\begin{aligned} 7x + 6 &= 34 \\ 7x &= 34 - \dots \\ x &= \frac{\dots}{7} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

उत्तर की जाँच LHS = $7x + 6$

$$\begin{aligned} &= 7x \dots + 6 \\ &= \dots + 6 \\ &= \text{RHS} \end{aligned}$$

2. सही/गलत बताइए।

- | | |
|-------------------------------------|---------|
| (i) $4x + x - 13 = 7$ में $x = 4$ | सही/गलत |
| (ii) $3x - 8 = 25$ में $x = 12$ | सही/गलत |
| (iii) $7x - 5 = 3x + 7$ में $x = 3$ | सही/गलत |
| (iv) $5x - 7 = 4x + 1$ में $x = 5$ | सही/गलत |

परिमेय गुणांक वाले समीकरण को हल करने के लिए समीकरण में आई भिन्नों के हरों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करते हैं। और समीकरण के दोनों पक्षों को उस ल.स. से गुणा करते हैं।

उदाहरण 3 समीकरण $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$ में x का मान ज्ञात कीजिए एवं उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हल

(यहाँ हर 3 और 4 का ल.स. 12 है)

$$\text{या } \frac{x}{3} \times 12 - \frac{x}{4} \times 12 = 1 \times 12$$

$$\text{या } 4x - 3x = 12$$

$$\text{या } x = 12$$

उत्तर की जाँच

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{x}{3} - \frac{x}{4} \\ &= \frac{12}{3} - \frac{12}{4} = 4 - 3 = 1 = \text{RHS} \end{aligned}$$

अतः उत्तर $x = 12$ सही है।

उदाहरण 4 $2(x + 4) = 12$ को हल कीजिए।

हल

$$2x + 8 = 12$$

$$2x + 8 - 8 = 12 - 8 \quad (\text{दोनों पक्षों में से 8 घटाने पर})$$

$$2x = 4$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \quad (\text{दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर})$$

$$x = 2$$

(पक्षांतरण विधि)

$$2(x + 4) = 12$$

$$2x + 8 = 12$$

$$2x = 12 - 8$$

$$2x = 4$$

$$2x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$



प्रश्नावली 14.1

नीचे दिए गए समीकरण हल कीजिए एवं उत्तर की जाँच कीजिए।

1. $2x + 1 = 9$

9. $\frac{7x + 1}{2} = 11$

2. $5x - 4 = 26$

10. $\frac{3l}{2} = \frac{2}{3}$

3. $5x - 2x + 7 = 31$

11. $7m + \frac{19}{2} = 13$

4. $5x + 8 = 12 + 6$

12. $6z + 10 = -2$

5. $12x + 3x = 60$

13. $\frac{9}{4} + 7 = 5$

6. $\frac{7x}{9} = 21$

14. $4(2-x) = 8$

7. $\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = 3$

15. $3(n - 5) = 21$

8. $\frac{3x}{4} - \frac{2x}{5} = 7$

16. $4 = 5(t - 2)$

17. $0 = 16 + 4(m - 6)$

14.3 इबारती प्रश्नों (समस्याओं) का हल करना

सरल समस्याओं को हल करने में हम सरल समीकरण का प्रयोग करते हैं। इसके लिए निम्नलिखित चरणों के क्रम में काम किया जाता है।

1. दी गई समस्या को ध्यान से पढ़ें और "क्या दिया है" एवं क्या ज्ञात करना है लिखें।
2. अज्ञात राशि को किसी चर राशि से व्यक्त करें।
3. समस्या में दिए गए कथनों को गणितीय कथनों अर्थात् पद या व्यंजक में बदलें।
4. प्रश्न की शर्त के अनुसार जो राशियाँ (पद या व्यंजक) समान हो उन्हें समीकरण के रूप में लिखें।
5. समीकरण हल करके चर राशि का मान निकालें और समस्या का समाधान प्रस्तुत करें।
6. अपने उत्तर की जाँच करें।

उदाहरण 5 किसी संख्या के 4 गुने से सात अधिक 43 होता है वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल

माना कि अज्ञात संख्या x है।

संख्या का चार गुना = $4x$

संख्या के 4 गुने से 7 अधिक = $4x + 7$

प्रश्न की शर्त के अनुसार -

$$4x + 7 = 43$$

$$4x = 43 - 7$$

$$4x = 36$$

$$x = 9$$

उत्तर की जाँच :-

संख्या के 4 गुने से 7 अधिक

$$= 4 \times 9 + 7$$

$$= 36 + 7$$

$$= 43 \text{ अतः उत्तर सही है।}$$

उदाहरण 6 किसी त्रिभुज का एक कोण दूसरे कोण से 20° बड़ा है तथा तीसरे से 20° छोटा है। तीनों कोणों का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना कि पहला कोण $= x$

$$\text{दूसरा कोण} = x - 20^\circ$$

$$\text{तीसरा कोण} = x + 20^\circ$$

शर्त के अनुसार –

$$x + x - 20 + x + 20 = 180^\circ \quad (\text{त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण होता है})$$

$$x + x + x = 180^\circ$$

$$3x = 180^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

$$\text{पहला कोण } x = 60^\circ$$

$$\text{दूसरा कोण } x - 20 = 60 - 20 = 40^\circ$$

$$\text{तीसरा कोण } x + 20 = 60 + 20 = 80^\circ$$

$$\text{अतः तीनों कोण} = 60^\circ, 40^\circ, 80^\circ$$

$$\text{उत्तर की जाँच} = 60^\circ + 40^\circ + 80^\circ = 180^\circ \quad \text{अतः उत्तर सही है।}$$

प्रश्नावली 14.2

1. किसी संख्या में 12 जोड़ने पर 43 प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
2. किसी संख्या के 4 गुने में से 5 घटाने पर 27 प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
3. किसी संख्या के 5 गुने में संख्या का दुगुना जोड़ने पर 42 आता है। वह संख्या बताइए।
4. तीन क्रमागत संख्याओं का योग 27 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योग 39 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 48 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
7. रामू की आयु 37 वर्ष है जो इसके पुत्र की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है। पुत्र की आयु ज्ञात कीजिए।
8. इशु के पिता की आयु इशु की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। इशु की आयु ज्ञात कीजिए यदि पिता की आयु 44 वर्ष हो।
9. रियाज एक संख्या के बारे में इस प्रकार सोचता है कि वह उसका $2\frac{1}{2}$ गुना करके 7 घटा देता है परिणाम 23 आता है रियाज ने क्या संख्या सोची ?
10. रमनजीत के पिता की आयु 49 वर्ष है उनकी आयु रमनजीत की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है रमनजीत की आयु ज्ञात कीजिए।
11. जोधपुर में जयपुर के मुकाबले प्रतिमाह सड़क दुर्घटनाएँ 3 गुने से 50 कम है। जयपुर में प्रतिमाह 400 सड़क दुर्घटनाएँ होती है तो जोधपुर में कितनी हुई ?

हमने सीखा

1. समीकरण में चर पर ऐसा प्रतिबंध होता है जिसमें दोनों पक्षों में व्यंजकों का मान बराबर होना चाहिए।
2. चर का वह मान जिसके लिए समीकरण संतुष्ट होता है, वह उस समीकरण का हल कहलाता है।
3. किसी समीकरण में बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष परस्पर बदलने पर समीकरण नहीं बदलता है।
4. समीकरण में हम दोनों पक्षों में एक साथ किसी संख्या को जोड़, घटा, गुणा या भाग कर सकते हैं।
5. समीकरण का हल चरणबद्ध होता है, दोनों पक्षों में एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ती है, जिससे कि दोनों में से एक पक्ष में हमें केवल चर प्राप्त होता है और समीकरण का हल प्राप्त होता है।
6. पक्षान्तरण अर्थात् समीकरण के अचर या बीजीय पदों का एक पक्ष से दूसरे पक्ष में स्थानान्तरण है। पक्ष में परिवर्तन पर जोड़ व घटा की स्थिति में क्रमशः चिह्न बदल जाते हैं। गुणा की स्थिति में भाग एवं भाग की स्थिति में गुणा हो जाता है।



अध्याय 15

राशियों की तुलना

15.1 अनुपात-समानुपात

भगत एवं प्रताप राजस्थान का नक्शा बनाने लगे भगत ने कहा बड़े नक्शे को कागज पर बनाने के लिए उचित आनुपातिक नाप (पैमाने) लेना तय करते हैं। उन्होंने 100 किमी = 1 सेमी लिया तथा सड़क मार्ग से उदयपुर से अजमेर की दूरी 2.25 सेमी से दर्शाया। तभी उनके सहपाठी केशव तथा कलाम वहाँ आए और उदयपुर से अजमेर की वास्तविक दूरी ज्ञात करने लगे।

केशव का तरीका

माना दूरी = D किमी तब
100 : D :: 1 : 2.25

$$\text{या } \frac{100}{D} = \frac{1}{2.25}$$

$$100 \times 2.25 = 1 \times D$$

$$225 = D$$

वास्तविक दूरी = 225 किमी

कलाम का तरीका

1 सेमी दर्शाता है 100 किमी
2.25 सेमी दर्शाएगा

$$= 100 \times 2.25$$

$$= 225 \text{ किमी}$$

अतः वास्तविक दूरी

$$= 225 \text{ किमी}$$

वास्तविक जीवन में समानुपातों के व्यापक उपयोग ऐकिक नियम, नक्शे का चित्रांकन, समानुपातिक चित्रांकन आदि में किया जाता है।

करो और सीखो

1. कक्षा VII की गणित की पुस्तक की वास्तविक लम्बाई एवं चौड़ाई में अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. अपने शिक्षक से पूछकर राष्ट्रीय झण्डे की लम्बाई एवं चौड़ाई में अनुपात ज्ञात कीजिए।
3. अपने कक्षा कक्ष की लम्बाई एवं चौड़ाई को नाप कर अनुपात ज्ञात कीजिए।
4. स्वयं की ऊँचाई को नापिए तथा अपने दोनों हाथों को पूरा फैलाकर लम्बाई नापिए। अब दोनों राशियों के मध्य अनुपात ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 1 6 किमी का 400 मीटर के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ दोनों राशियाँ दूरी को दर्शाती हैं तथा इन्हें एक ही इकाई में लिखते हैं।

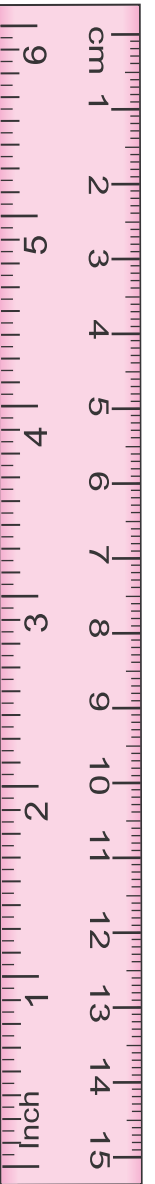
$$6 \text{ किमी} = 6 \times 1000 \text{ मीटर}$$

$$= 6000 \text{ मीटर}$$

अतः अभीष्ट अनुपात 6 किमी : 400 मीटर

$$\text{अर्थात् } 6000 \text{ मीटर} : 400 \text{ मीटर}$$

$$\text{या } 15 : 1$$



उदाहरण 2 निम्नलिखित में x का मान ज्ञात कीजिए।

$$3 : 25 :: x : 15$$

हल

$$\frac{3}{25} = \frac{x}{15} \text{ अनुपातिक रूप को भिन्न में लिखते हैं।}$$

$$x \times 25 = 3 \times 15$$

$$x = \frac{3 \times 15}{25} \text{ या } x = 1.8 \text{ अतः } x \text{ का मान } 1.8 \text{ है।}$$

उदाहरण 3 बालू किसान को पम्प सेट को 15 घण्टे चलाने में 25 लीटर डीजल की आवश्यकता होती है। यदि उसके पास 45 लीटर डीजल और है तो वह पम्प सेट को कितने घण्टे और चलाएगा?

हल

उपलब्ध डीजल की मात्रा = 45 लीटर

25 लीटर डीजल से पम्प सेट चलता है = 15 घण्टे

1 लीटर डीजल से पम्प सेट चलेगा = $\frac{15}{25}$ घण्टे

45 लीटर डीजल से पम्प सेट चलेगा = $\frac{15}{25} \times 45$ घण्टे = 27 घण्टे

45 लीटर डीजल से पम्प सेट चलेगा = 27 घण्टे

प्रश्नावली 15.1

- अनुपात ज्ञात कीजिए।
 - 60 पैसे का 3 रुपये से
 - 340 सेमी का 4 मीटर से
- सरलतम अनुपात में लिखिए।
 - 65 : 25
 - 72 : 64
- निम्नलिखित अनुपातों के दो तुल्य अनुपात ज्ञात कीजिए।
 - 3 : 5
 - 7 : 11
- एक दरी पट्टी की लम्बाई 7 मीटर एवं इसकी चौड़ाई 35 सेमी है तो निम्न अनुपात ज्ञात कीजिए।
 - चौड़ाई का लम्बाई से
 - लम्बाई का चौड़ाई से
- यदि $12 : x :: 14 : 21$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
- हलवा बनाने के लिए भीमा हलवाई 25 किग्रा दाल में 20 किग्रा शक्कर मिलाता है। जबकि भीखा हलवाई 12 किग्रा दाल में 15 किग्रा शक्कर मिलाता है। ज्ञात कीजिए :-
 - दोनों हलवाई प्रति किग्रा दाल में कितनी शक्कर मिलाते हैं ?
 - किस हलवाई का बना हलवा ज्यादा मीठा होता है ?

7. 10.2 किमी लम्बी सड़क की सफाई करने में 34 मजदूर लगते हैं तो 7.5 किमी लम्बी सड़क की सफाई में कितने मजदूर लगेंगे ?
8. 7.5 मीटर ऊँचे खम्भे की परछाई 5 मीटर है तो उसके पास खड़े पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, यदि उसी समय पेड़ की परछाई 10 मी लम्बी हो।
9. रमेश अपनी मोटर साईकिल से 10 किमी की दूरी 15 मिनट में तय करता है। अगर चाल समान हो तो रमेश को 26 किमी की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा ?
10. मध्यान्ह भोजन में 60 विद्यार्थियों के लिए 3 किग्रा दाल की आवश्यकता होती है। शनिवार को विद्यालय में मध्यान्ह भोजन के समय 46 विद्यार्थी उपस्थित थे तो उनके लिए कितनी दाल की मात्रा पर्याप्त होगी ?

15.2 प्रतिशत

पूजा तथा माधव अपना परीक्षा परिणाम लेकर खुशी-खुशी घर में प्रवेश करते हुए माँ से कहते हैं।

पूजा – माँ, देखो मैंने 1200 में से 960 अंक प्राप्त किए तथा कक्षा में प्रथम स्थान प्राप्त किया है।

माधव – माँ, मैंने 1300 में से 975 अंक प्राप्त कर कक्षा में प्रथम स्थान प्राप्त किया तथा पूजा से ज्यादा अंक प्राप्त किए अतः मैं ज्यादा होशियार हूँ।

पूजा – माँ यह कैसे हो सकता है ? माधव के विद्यालय में वार्षिक पूर्णांक भी तो ज्यादा है ? सोचो क्या पूजा ठीक कह रही है ? क्या आप दोनों के विवाद का निपटारा कर सकते हैं? तभी पापा घर आते हैं दोनों पापा से फैसला कराने पहुँच जाते हैं।

पापा ने इस तरीके से समझाया –

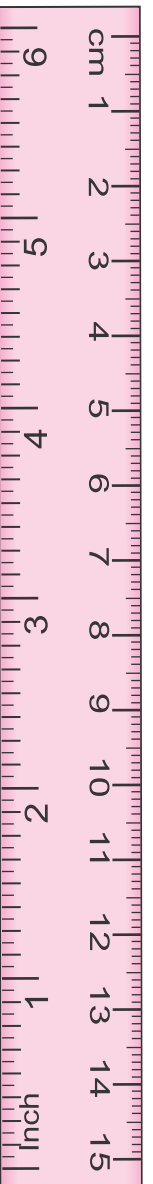
$$\text{पूजा के लिए} \quad \frac{\text{प्राप्तांक}}{\text{पूर्णांक}} = \frac{960}{1200} = \frac{96}{120} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{माधव के लिए} \quad \frac{\text{प्राप्तांक}}{\text{पूर्णांक}} = \frac{975}{1300} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

	पूजा		माधव
	$\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$		$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$
तुल्यानुपात से	$\frac{16 \times 5}{20 \times 5}$	तुल्यानुपात से	$\frac{15 \times 5}{20 \times 5}$
	$= \frac{80}{100}$		$= \frac{75}{100}$

$$\frac{80}{100} > \frac{75}{100}$$

माँ ने दोनों को समझाया कि यदि आप दोनों के कुल पूर्णांक 100-100 होते तो पूजा को 100 में 80 तथा माधव को 100 में से 75 अंक मिलते। भिन्न को 100 के हर के आधार पर व्यक्त करना अर्थात् प्रत्येक 100 पर कितना प्रतिशत या प्रति सैंकड़ा कहलाता है। प्रतिशत को '%' से प्रदर्शित किया जाता है, जिसका अर्थ है सौवाँ। प्रतिशत वह भिन्न है जिसका हर 100 हो ($\% = \frac{1}{100}$) और इस भिन्न का अंश ही प्रतिशत की दर को व्यक्त करता है।



करो और सीखो

1. कक्षा के 25 विद्यार्थी अपनी खेल के बारे में रुचि बताते हैं।

कबड्डी में	– 4 विद्यार्थी
क्रिकेट में	– 11 विद्यार्थी
शतरंज में	– 6 विद्यार्थी
टेनिस में	– 3 विद्यार्थी
अन्य खेल में	– 1 विद्यार्थी

प्रत्येक खेल में रुचि के अनुसार विद्यार्थी संख्या को प्रतिशत में व्यक्त कीजिए।

2. जालोर पंचायत के चुनिंदा विद्यालयों में से कुल 250 विद्यार्थियों को दिए जा रहे मिड डे मील के मीनू की पसंद पर राय ली गई तो परिणाम निम्न प्रकार प्राप्त हुए –

मीनू	विद्यार्थी	प्रतिशत
सब्जी रोटी	80	-- %
दाल चावल	75	-- %
खिचड़ी	35	-- %
दाल रोटी	60	-- %

उपर्युक्त परिणामों से प्रत्येक प्रकार के पसन्द को प्रतिशत में व्यक्त कीजिए।

अब्दुल चाचा अपने दो पोतों के साथ प्रातः घूमने गए। रास्ते में देवा किसान के दो बेटे खेमा तथा पेमा मिले अब्दुल चाचा ने खेती का हाल चाल पूछा।

पेमा – मैंने अपने खेत के $\frac{3}{4}$ भाग में गोहूँ तथा शेष में सरसों बोई है।

खेमा – चाचा मैंने अपने खेत के $\frac{7}{10}$ भाग में गोहूँ तथा शेष भाग में सरसों बोई है।

अब्दुल चाचा खेती बाड़ी का हाल-चाल जानने के बाद घर लौट रहे हैं। अब्दुल चाचा का पोता करीम बोला।

करीम – दादा खेमा ताऊ तथा पेमा ताऊ दोनों में से किसने ज्यादा भाग में गोहूँ बोया है ?

दोनों द्वारा बोए गए भाग की तुलना हम प्रतिशत से करते हैं।

इसके लिए $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{7}{10}$ की ऐसी तुल्य भिन्न बनाते हैं, जिनका हर 100 हो।

किसी भिन्न का हर 100 हो तो अंश वाली संख्या उतने ही प्रतिशत कहलाती है।

$$\text{पेमा ताऊ द्वारा बोया गया भाग } \frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 75 \times \frac{1}{100} = 75\%$$

$$\text{खेमा ताऊ द्वारा बोया गया भाग } \frac{7}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{70}{100} = 70 \times \frac{1}{100} = 70\%$$

अतः पेमा ताऊ द्वारा बोया गया भाग अधिक है।

दूसरा तरीका –

हम दी गई भिन्न को $\frac{100}{100}$ से सीधे गुणा कर भी प्रतिशत में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\frac{3}{4} \times \frac{100}{100} = \frac{300}{4} \times \frac{1}{100} = 75 \times \frac{1}{100} = 75\%$$

$$\frac{7}{10} \times \frac{100}{100} = \frac{700}{10} \times \frac{1}{100} = 70 \times \frac{1}{100} = 70\%$$

15.2.1 प्रतिशत को दशमलव भिन्न में बदलना

इसके लिए % हटाकर $\frac{1}{100}$ का गुणा करते हैं।

$$\text{जैसे} - 25\% = 25 \times \frac{1}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0.25$$

15.2.2 दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलना

इसके लिए दशमलव भिन्न को 100% से गुणा करते हैं।

जैसे 0.6, 0.03, 0.75 को प्रतिशत में इस प्रकार बदलेंगे।

$$\begin{aligned} (1) \text{ 0.6 को } 100\% \text{ से गुणा किया तो} &= 0.6 \times 100\% \\ &= \frac{6}{10} \times 100\% = 60\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 0.03 को } 100\% \text{ से गुणा करे तो} &= 0.03 \times 100\% \\ &= \frac{3}{100} \times 100\% = 3\% \end{aligned}$$

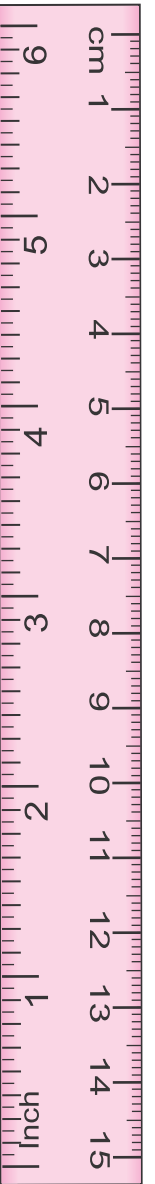
$$\begin{aligned} (3) \text{ 0.75 को } 100\% \text{ से गुणा करे तो} &= 0.75 \times 100\% \\ &= \frac{75}{100} \times 100\% = 75\% \end{aligned}$$

करो और सीखो

- निम्न भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।
 - $\frac{5}{8}$
 - $\frac{5}{3}$
- दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलिए।
 - 0.5
 - 0.08
 - 0.225
 - 6.5
- प्रतिशत को साधारण भिन्न एवं दशमलव भिन्न में बदलिए।
 - 36%
 - $12\frac{1}{2}\%$
 - 3.6%

उदाहरण 4 भिन्न $\frac{3}{25}$ को प्रतिशत रूप में लिखिए।

$$\begin{aligned} \text{हल} \quad \text{दी गई संख्या} &= \frac{3}{25} \times 100\% \\ &= 12\% \end{aligned}$$



उदाहरण 5 55 विद्यार्थियों की कक्षा में 44 छात्र है तो छात्रों का प्रतिशत क्या है ?

हल 55 विद्यार्थियों में 44 छात्र है

$$= \frac{44}{55} \times 100\%$$

$$\text{अतः छात्रों का प्रतिशत} = 80\%$$

उदाहरण 6 निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को प्रतिशत में बदलिए।

(i) 0.9

(ii) 0.015

हल

(i) $0.9 \times 100\%$

(ii) $0.015 \times 100\%$

$$= \frac{9}{10} \times 100\%$$

$$= \frac{15}{1000} \times 100\%$$

$$= 90\%$$

$$= \frac{15}{10} \% = 1.5\%$$

उदाहरण 7 कक्षा में 50 छात्रों में 22% छात्रों को रंगोली बनाना पसंद है। तो रंगोली बनाने वाली छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल रंगोली बनाने वाली छात्रों की संख्या = 50 का 22%

$$= 50 \times \frac{22}{100} = 11 \text{ छात्रों}$$

उदाहरण 8 दिए गए प्रतिशत को साधारण दशमलव भिन्न में बदलिए।

(i) $33\frac{1}{3} \%$

(ii) 150%

हल

(i) $\frac{100}{3} \%$

(ii) 150%

$$= \frac{100}{3} \times \frac{1}{100}$$

$$= 150 \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{150}{100}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3}{2} = 1.5$$

$$= 0.33$$

प्रश्नावली 15.2

1. दी गई भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलिए।

(i) $\frac{3}{4}$

(ii) $\frac{7}{9}$

(iii) $\frac{14}{15}$

(iv) $3\frac{1}{3}$

2. दी गई दशमलव भिन्नो को प्रतिशत में बदलिए।

(i) 0.84

(ii) 1.25

(iii) 0.875

(iv) 0.001

3. दिए गए प्रतिशतों को साधारण भिन्न में बदलिए।

(i) 52%

(ii) 125%

(iii) $6\frac{1}{4}\%$

(iv) $33\frac{1}{3}\%$

4. ज्ञात कीजिए।

(i) 320 का 15%

(ii) 875 का 35%

(iii) 1250 ग्राम का 20%

(iv) 32.5 मीटर का 16%

5. ज्ञात कीजिए।

(i) किसका 42%, 63 है।

(ii) किसका 70%, 35 है।

(iii) किसका 13%, 1170 है।

6. दिए गए प्रतिशतों को दशमलव में बदलिए।
 (i) 7% (ii) $1\frac{2}{5}\%$ (iii) 0.03% (iv) 16.7%
7. एक विद्यालय में 500 विद्यार्थियों में 85% लड़कियाँ हैं। विद्यालय में लड़कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. आकोला गाँव में हरित राजस्थान के तहत पेड़ लगाए गए जिसमें 10% पेड़ सूख गए। यदि अब यहाँ 1800 पेड़ बचे तो प्रारम्भ में कुल कितने पेड़ लगाए?
9. एक मतदान केन्द्र पर 950 मत डाले गए जिनमें से 57 मत पत्र खारिज किए गए। यदि मतदाता सूची में 1045 मतदाताओं के नाम अंकित थे तो मतदान कितने प्रतिशत हुआ ?
10. शहीद दिवस के उपलक्ष में सुभाष क्लब के 35 व्यक्तियों में से 28 व्यक्तियों ने रक्तदान किया। इसी प्रकार तिलक क्लब के 40 व्यक्तियों में से 38 व्यक्तियों ने रक्तदान किया तो ज्ञात कीजिए कि किस क्लब के व्यक्तियों ने अधिक प्रतिशत रक्तदान किया ?

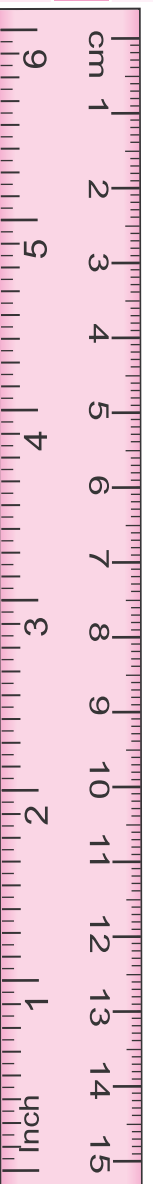
15.3 प्रतिशत वृद्धि-प्रतिशत ह्रास

किसी कस्बे में रोहित ट्रेडर्स के यहाँ दो वर्षों में वस्तुओं के भाव इस प्रकार रहे।

भाव प्रति किग्रा वस्तुएँ	1.4.2014 को	1.4.2015 को
चीनी	30	27
मूँगफली तेल	90	81
गेहूँ	13	15
परमल चावल	28	32

उपर्युक्त तालिका को ध्यान से देखकर वस्तुओं के भाव में हुए बदलाव पर चर्चा कीजिए। आप पाएँगे कि चीनी तथा मूँगफली तेल के भाव क्रमशः 3 रुपये तथा 9 रुपये घटे हुए हैं जबकि गेहूँ तथा परमल चावल के भाव में क्रमशः 2 रुपये तथा 4 रुपये की बढ़ोतरी हुई है। इन आँकड़ों से आपको लगेगा कि मूँगफली के तेल में ज्यादा कमी हुई तथा परमल चावल के भाव में ज्यादा वृद्धि हुई है। इस प्रकार के परिवर्तन को यदि प्रतिशत में व्यक्त करें तो ज्यादा सटीक तरीके से परिवर्तन को दर्शा सकते हैं।

वस्तु	भाव में परिवर्तन		परिवर्तन	प्रतिशत में
	बाद का मान	पहले का मान		
चीनी	27	30	-3	- 10%
मूँगफली तेल	81	90	-9	- 10%
गेहूँ	15	13	2	$15\frac{5}{13}\%$
परमल चावल	32	28	4	$14\frac{2}{7}\%$



$$\text{भाव में परिवर्तन प्रतिशत में} = \frac{\text{परिवर्तन}}{\text{पहले का मान}} \times 100$$

$$\text{चीनी के लिए - } \frac{-3}{30} \times 100 = -10\%$$

$$\text{मूँगफली तेल के लिए - } \frac{-9}{90} \times 100 = -10\%$$

$$\text{गेहूँ के लिए - } \frac{2}{13} \times 100 = 15 \frac{5}{13} \%$$

$$\text{परमल चावल के लिए - } \frac{4}{28} \times 100 = 14 \frac{2}{7} \%$$

स्पष्ट है कि चीनी तथा मूँगफली तेल के भावों में हास/घटाव प्रतिशत में समान है। इसी प्रकार गेहूँ के भाव में प्रतिशत वृद्धि परमल चावल से ज्यादा है।

करो और सीखो

1. किसी गाँव की जनसंख्या पिछले 10 वर्षों में 12000 से बढ़कर 15000 हो गई है। तो जनसंख्या बढ़ने का प्रतिशत कितना रहा ?
2. निम्नलिखित में वृद्धि अथवा ह्रासदर को प्रतिशत में व्यक्त कीजिए।
 - (1) बिजली के प्रति युनिट का मूल्य 3.50 रुपये से बढ़कर 6 रुपये हो गया।
 - (2) 100 लिफाफे का मूल्य 100 रुपये से घटकर 80 रुपये हो गया।

15.4 लाभ – हानि

सुमित्रा ने मंडी से तथा सावित्री ने दुकानदार से क्रमशः 20 रुपये तथा 25 रुपये के भाव से 20–20 किलो केले खरीदे तथा दोनों ने 22 रुपये के भाव से केले बेचे। बताइए, किसको लाभ तथा किसको हानि होगी।

सुमित्रा ने 20 रुपये प्रति किग्रा के भाव से 20 किलो केले 400 रुपये में खरीदे
अर्थात् सुमित्रा द्वारा खरीदे गए केलों का क्र.मू. = $20 \times 20 = 400$ रुपये

सावित्री द्वारा खरीदे गये केलों का मूल्य = $25 \times 20 = 500$ रुपये

दोनों ने 22 रुपये प्रति किग्रा के भाव से केले बेचे

अतः विक्रय मूल्य या बेचने का मूल्य = $22 \times 20 = 440$ रुपये

सुमित्रा ने कम मूल्य में खरीद कर ज्यादा में बेचा तो लाभ हुआ अर्थात् क्र.मू. < वि.मू. तो लाभ।

सावित्री ने ज्यादा मूल्य में खरीद कर कम में बेचा तो हानि अर्थात् क्र.मू. > वि.मू. तो हानि।

सुमित्रा ने इस सौदे में $440 - 400 = 40$ रुपये कमाए

$$\begin{aligned} \text{अर्थात् सुमित्रा का लाभ} &= \text{वि.मू.} - \text{क्र.मू.} \\ &= 440 - 400 = 40 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा सावित्री को हानि} &= \text{क्र.मू.} - \text{वि.मू.} \\ &= 500 - 440 = 60 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

आओ इनके लाभ/हानि को प्रति सैंकड़ा अर्थात् प्रतिशतों में व्यक्त करके देखते हैं।

सुमित्रा ने 400 रुपये पर लाभ कमाया 40 रुपये

$$\text{अतः 1 रुपये पर लाभ} = \frac{40}{400}$$

$$\text{या 100 रुपये पर लाभ} = \frac{40}{400} \times 100$$

$$\text{अतः लाभ} = 10\%$$

$$\text{अर्थात् लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

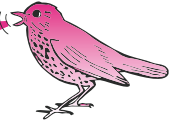
सावित्री को 500 रुपये पर हानि होती है 60 रुपये की

$$\text{अतः 1 रुपये पर हानि} = \frac{60}{500}$$

$$\text{या 100 रुपये पर हानि} = \frac{60}{500} \times 100 \quad \text{अतः हानि} = 12\%$$

$$\text{अर्थात् हानि प्रतिशत} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

लाभ अथवा हानि प्रतिशत
सदैव क्रय मूल्य पर ही ज्ञात करते हैं।



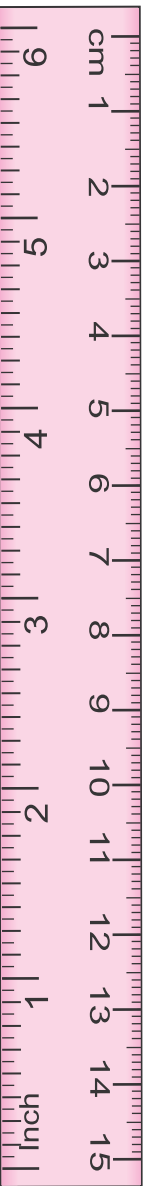
ग्राहक – टेबल एवं स्टूल सेट की कीमत कितनी है ?

छगन – बिल देखकर – 750 रुपये ।

ग्राहक के जाने के बाद दुकानदार कर्मा आता है। जब उसे इस बात का पता लगता है तो

कर्मा – अरे ! तुमने यह माल घाटे में बेचा है।

छगन – नहीं पापा यह कैसे हो सकता है ? मैंने बिल देखा था एक सेट का मूल्य 700 रुपये था।



कर्मा—देखो, मैं यह सामान खरीदने गया तब ऐसे 10 सेट लाने में 200 रुपये आने जाने का बस व टैक्सी किराया, 100 रुपये माल ढुलाई की हमाली तथा 250 रुपये ट्रक भाड़ा के देने पड़े थे।

छगन — हाँ, पापा इसका मतलब $200+100+250 = 550$ रुपये इस पर अपना खर्चा भी लगा

कर्मा — तभी तो कह रहा हूँ इस सामान का मूल्य हमारे लिए —

$$700 \text{ रुपये के भाव से } 10 \text{ सेट के } = 7000 \text{ रुपये}$$

$$\text{तथा अन्य ऊपरी व्यय} = 550 \text{ रुपये}$$

$$\text{तो कुल क्रय मूल्य} = \text{क्र.मू.} + \text{ऊपरी व्यय}$$

$$= 7000 + 550 \text{ रुपये}$$

$$= 7550 \text{ रुपये}$$

छगन — यानी एक सेट का कुल मूल्य 755 रुपये जबकि मैंने 750 रुपये में सेट बेचा तो 5 रुपये का घाटा होगा।

कर्मा — यदि एक सेट पर 50 रुपये लाभ कमाना चाहे तो कितने में बेचेंगे ?

छगन — कुल क्र.मू. 755 रुपये + लाभ 50 रुपये = 805 रुपये विक्रय मूल्य होना था।

अतः किसी वस्तु का वि. मू. निर्धारित करने के लिए सबसे पहले क्र.मू. में अतिरिक्त खर्च जैसे किराया, माल ढुलाई, हमाली आदि जोड़कर कुल क्र.मू. ज्ञात किया जाता है।

करो और सीखो

- महावीर ने 5 बोरी शक्कर 16000 रुपये में खरीदी। उसने 200 रुपये टैक्सी किराया, 120 रुपये हमाली, 200 रुपये ट्रक भाड़ा के चुकाए। वह शक्कर किस भाव से बेचे कि उसे प्रति किलोग्राम 3 रुपये का लाभ हो जाए ?
- मनोज ने एक पुरानी कार 1,50,000 रुपये में खरीदी। इस पर 60,000 रु ईंजन पर खर्च किए तथा 15,000 रुपये के नये टायर ट्यूब लगवाए। मनोज ने अब यह कार 2,10,000 रुपये में जीतेन्द्र को बेच दी। इस व्यापार में मनोज को हुए लाभ/हानि की गणना कीजिए।

उदाहरण 9 प्रेम ने एक सिलाई मशीन 4800 रुपये में खरीद कर 5400 रुपये में बेच दी तो प्रेम का लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल सिलाई मशीन का क्रय मूल्य = 4800 रुपये

सिलाई मशीन का वि.मू. = 5400 रुपये

$$\text{लाभ} = 5400 - 4800 \text{ रुपये}$$

$$= 600 \text{ रुपये}$$

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$\text{प्रेम का लाभ प्रतिशत} = \frac{600}{4800} \times 100 = \frac{25}{2}$$

$$\text{अतः लाभ} = \frac{25}{2} \% = 12\frac{1}{2} \%$$

उदाहरण 10 रहीम ने एक मकान 1,40,000 रुपये में खरीदा। मकान के रजिस्ट्रेशन दलाली आदि पर 14,000 रुपये, नल लगवाने के 7,000 रुपये बिजली ठीक करवाने के 1700 रुपये एवं अन्य मरम्मत में 8300 रुपये खर्च हुए। अब यदि वह मकान को 2,03,490 रुपये में बेच देता है तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल रहीम ने मकान खरीदा = 1,40,000 रुपये
 मकान के रजिस्ट्रेशन = 14,000 रुपये
 नल लगवाने के = 7000 रुपये
 बिजली ठीक करवाने के = 1700 रुपये
 अन्य मरम्मत = 8300 रुपये
 कुल ऊपरी व्यय = 14000+7000+1700+8300 = 31,000 रुपये
 मकान का वास्तविक क्र. मू. = 140000 + 31000 = 171000 रुपये
 मकान का विक्रय मूल्य = 2,03,490 रुपये
 लाभ = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य
 = 203490 - 171000 रुपये
 = 32,490 रुपये
 लाभ प्रतिशत = $\frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{32490}{171000} \times 100 = \frac{3249}{171} = 19\%$$

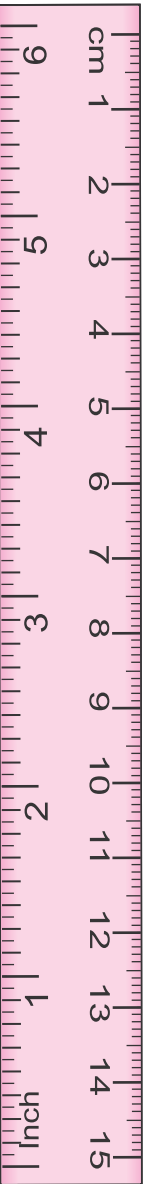
अतः लाभ प्रतिशत = 19%

उदाहरण 11 एक फुटबॉल क्लब ने इस वर्ष 12 मैचों में जीत प्राप्त की जबकि पिछले वर्ष 15 मैचों में जीती थी। पिछले वर्ष की तुलना में जीत में कितने प्रतिशत वृद्धि या कमी हुई ?

हल जीत की संख्या में कमी = 15 - 12 = 3
 प्रतिशत कमी = $\frac{\text{कमी}}{\text{आधार वर्ष में जीत}} \times 100$
 = $\frac{3}{15} \times 100$
 = 20 % जीत में 20 % की कमी हुई।

प्रश्नावली 15.3

- किशोर ने एक कुर्सी 450 रुपये में खरीद कर उसे 500 रुपये में बेच दी किशोर का लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
- क्रय-विक्रय के निम्न सौदों में हानि या लाभ ज्ञात कीजिए। प्रत्येक दशा में प्रतिशत हानि या प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिए।
 - एक साईकिल 3500 रुपये में खरीदी गई तथा 3000 रुपये में बेची गई।
 - एक वाशिंग मशीन 15000 रुपये में खरीद गई तथा 15500 रुपये में बेची गई।
 - एक खिलौना कार 450 रुपये में खरीद कर 540 रुपये में बेची गई।



(iv) अरविंद ने एक टी. वी. 12000 रुपये में खरीद कर 15 प्रतिशत लाभ पर बेच दिया तो अरविंद को टी. वी. बेचने पर कितना धन प्राप्त हुआ ?

3. एक नगर की जनसंख्या 25000 से बढ़कर 26500 हो जाती है तो जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए।
4. एक व्यापारी ने 50 किलो ग्राम धान 2000 रुपये में खरीदा। उसे साफ करने में 400 रुपये का खर्चा हुआ। बाजार में धान की अधिक आवक होने से दाम कम हो गया। वह उसे 41 रुपये प्रति किग्रा के भाव से बेचता है, तो उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।
5. श्रवण मिस्त्री ने एक पुराना स्कूटर 5500 रुपये में खरीदा उसे अपने कारखाने में लाने में 150 रुपये किराया भाड़ा दिया तथा 550 रुपये का नया सामान डाला। यदि वह इस पर 15 प्रतिशत लाभ कमाना चाहता है तो वह स्कूटर कितने में बेचेगा ?

15.5 सरल ब्याज

अशोक अपना मकान बनाने हेतु किसी संस्था से 50,000 रुपये उधार लेता है। यह उधार ली गई राशि **मूलधन** कहलाती है। वह 1 वर्ष पश्चात् 55,000 रुपये संस्था को चुकाता है।

अशोक ने 50,000 रुपये पर अतिरिक्त 5000 रुपये चुकाए। यह अतिरिक्त राशि **ब्याज** कहलाती है।

यह ब्याज राशि निम्न बातों पर निर्भर करती है –

1. उधार ली गई राशि (मूलधन)
2. समय (जिस अवधि के लिए राशि उधार ली गई)
3. दर (प्रति सैकड़ा पर दी गई अतिरिक्त धन राशि) जो कि प्रतिमाह/प्रतिवर्ष आदि पर निर्धारित होती है)

निर्धारित अवधि के बाद मूलधन तथा ब्याज दोनों को मिलाकर जो राशि चुकाई जाती है, उसे **मिश्रधन** कहते हैं।

$$\text{अर्थात् मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज}$$

करो और सीखो

1. अशोक एक वर्ष बाद संस्था को धन नहीं लौटा पाता तो 2 वर्ष बाद उसे कितना ब्याज चुकाना पड़ता ?
.....
2. ब्याज सहित कुल कितना धन लौटाना पड़ता ?
.....

मूलधन, समय तथा ब्याज की दर बढ़ाने से सरल ब्याज का मान बढ़ेगा तथा कम होने पर ब्याज कम होगा।



सरल ब्याज को निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$\text{सरल ब्याज} = \text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर प्रति सैंकड़ा}$$

$$\text{सरल ब्याज} = \text{मूलधन} \times \text{समय} \times \frac{\text{दर}}{100}$$

मूल, वर अरु काल का कंचन गुणा कराय।
एक सौ से भाग दिए ब्याज तुरन्त बतलाय।।
(यह श्लोक सरल ब्याज की गणना हेतु भारतीय
गणितज्ञ कंचन द्वारा दिया गया था।)



उदाहरण 12 अशोक ने राष्ट्रीयकृत बैंक से 20,000 रुपये 10% सरल ब्याज की दर से 3 वर्ष के लिए धन उधार लिया तो उसे कितने रुपये ब्याज के देने पड़ेंगे एवं कुल कितना धन वापस लौटाना पड़ेगा ?

हल

उधार लिया गया धन (मूलधन) = 20,000 रुपये

ब्याज दर = 10%

समय = 3 वर्ष

100 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = 10 रुपये

तो 1 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{10}{100}$ रुपये

तो 20,000 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{10}{100} \times 20,000$

तो 20,000 रुपये का 3 वर्ष का ब्याज = $\frac{10}{100} \times 20,000 \times 3$

$$\begin{aligned} \text{सरल ब्याज} &= \frac{10}{100} \times 20,000 \times 3 \\ &= 6,000 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

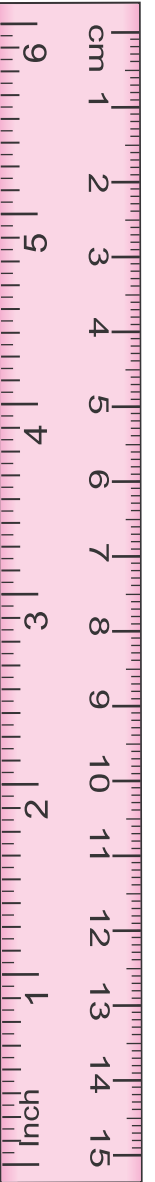
ब्याज सहित लौटाया गया धन

मिश्रधन = लिया गया धन या मूलधन + ब्याज

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

$$= [20000 + 6000] \text{ रुपये}$$

$$= 26,000 \text{ रुपये}$$



उदाहरण 13 छोटा 8,000 रुपये का ऋण 12 प्रतिशत वार्षिक दर से सरल ब्याज पर लेता है। ज्ञात कीजिए कि एक वर्ष बाद उसे कुल कितना धन वापस करना होगा ?

हल

$$\text{उधार में ली गई राशि} = 8000 \text{ रुपये}$$

$$\text{ब्याज की दर} = 12 \text{ प्रतिशत प्रति वर्ष}$$

$$\text{यदि 100 रुपये उधार लेता है तो एक वर्ष का ब्याज} = 12 \text{ रुपये}$$

$$\text{यदि 1 रुपये उधार लेता है तब एक वर्ष का ब्याज} = \frac{12}{100}$$

$$\begin{aligned} \text{यदि 8000 रुपये उधार लेता है तो 1 वर्ष का ब्याज} &= \frac{12}{100} \times 8000 \\ &= 960 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अर्थात् एक वर्ष बाद उसे ब्याज मिलाकर मिश्रधन} &= \text{मूलधन} + \text{ब्याज} \\ &= 8000 + 960 \\ &= 8960 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अथवा} \quad \text{सरल ब्याज} &= \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100} \\ &= \frac{8000 \times 1 \times 12}{100} \\ &= 960 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{मिश्रधन} &= \text{मूलधन} + \text{ब्याज} \\ &= 8000 + 960 = 8960 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

उदाहरण 14 यदि किसी धन का 10% की दर से 3 वर्ष में साधारण ब्याज 450 रुपये हो तो मूलधन ज्ञात कीजिए।

हल

दिया हुआ है दर = 10%, समय = 3 वर्ष, ब्याज = 450 रुपये, मूलधन = ?

$$\text{सरल ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$$

$$450 = \frac{\text{मूलधन} \times 3 \times 10}{100}$$

$$450 = \frac{\text{मूलधन} \times 3}{10}$$

$$\text{मूलधन} \times 3 = 450 \times 10$$

$$\text{मूलधन} = \frac{450 \times 10}{3}$$

$$\text{मूलधन} = 1500 \text{ रुपये}$$

प्रश्नावली 15.4

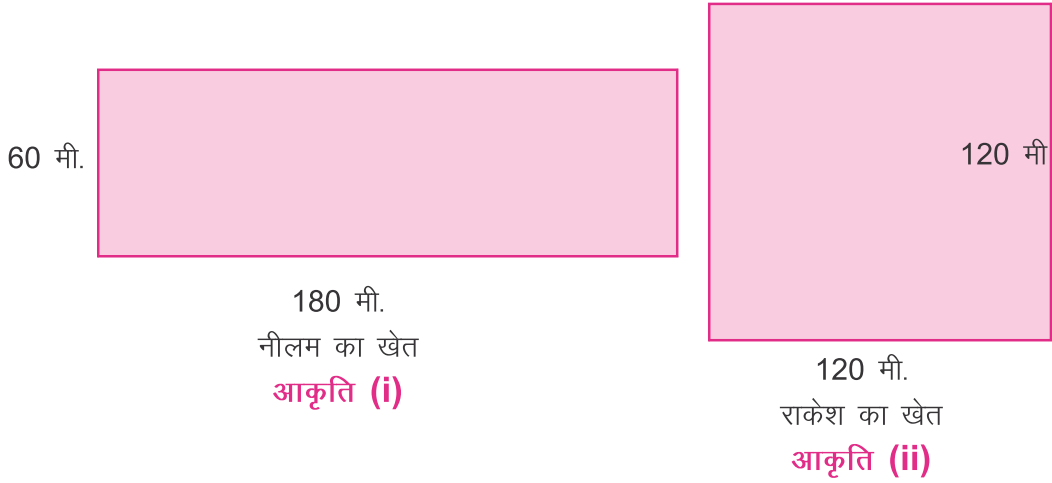
1. लालजी ने एक गाय खरीदने के लिए बैंक से 1500 रुपये ऋण लिया और 1 वर्ष बाद 120 रुपये ब्याज सहित ऋण चुका दिया। बताइए लालजी ने कितने रुपये चुकाए ?
2. रानी सिलाई मशीन खरीदने हेतु महिला कॉपरेटिव बैंक से 4000 रुपये का ऋण 12% वार्षिक ब्याज की दर से लेती है। ज्ञात कीजिए कि 1 वर्ष में रानी को कितना धन वापस करना होगा।
3. 3500 रुपये 8 प्रतिशत वार्षिक सरल ब्याज की दर से उधार दिए गए हैं। दो वर्ष बाद कितना ब्याज तथा मिश्रधन देय होगा ?
4. 4500 रुपये पर 2 वर्ष पश्चात् किस दर से 360 रुपये साधारण ब्याज देय होगा ?
5. रविन्द्र ने 8% वार्षिक दर से 1 वर्ष पश्चात् 320 रुपये ब्याज के रूप में दिए। उसने कितना धन उधार लिया था ?

हमने सीखा

1. अपने दैनिक जीवन में हमें प्राप्त दो राशियों के बीच तुलना करनी पड़ती है ये राशियाँ ऊँचाई, भार, दूरी, प्राप्तांक आदि हो सकती हैं।
2. तुलना करने की एक विधि प्रतिशत भी है। भिन्न जिनके हर 100 होते हैं उनके अंश प्रतिशत प्रकट करते हैं। प्रतिशत का अर्थ होता है प्रत्येक सौ पर।
3. भिन्नों को प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत भिन्नों में।
4. प्रतिशत का हमारे दैनिक जीवन में व्यापक उपयोग है।
 - (i) जब हमें किसी राशि का भाग ज्ञात हो, हम वह सम्पूर्ण राशि ज्ञात कर सकते हैं।
 - (ii) यदि हमें किसी राशि के भागों में अनुपात दिया हो तब हम उन्हें प्रतिशत में भी व्यक्त कर सकते हैं।
 - (iii) किसी राशि का घटना या बढ़ना भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।
 - (iv) किसी वस्तु के लिए क्रय विक्रय में हुए लाभ या हानि को प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।
 - (v) उधार दिए गए धन पर ब्याज परिकलन के लिए उसकी दर प्रतिशत में ही दी जाती है।



16.1 नीलम तथा राकेश ने अपने अपने खेत के चारों तरफ कंटीले तार की बाड़ बनाई।



यदि बाड़ बनाने का खर्चा 12 रुपये प्रति मीटर हो तो किसके खेत पर बाड़ बनवाने का खर्चा ज्यादा आएगा ?

100 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से खेत जुतवाने पर किस खेत में खर्चा अधिक होगा ?

बाड़ बनवाने के लिए कुल किया गया खर्च ज्ञात करने के लिए परिमाण ज्ञात करके बाड़ बनाने की दर से गुणा करते हैं।

इसी प्रकार खेत जोतने का खर्च ज्ञात करने के लिए क्षेत्रफल वर्गमीटर में ज्ञात करके खेत जोतने की दर से गुणा करते हैं।

चूंकि नीलम का खेत आयताकार है।

$$\begin{aligned} \text{अतः नीलम के खेत का परिमाण} &= 2 \times (\text{ल.} + \text{चौ.}) = 2 \times (180 + 60) \\ &= 2 \times (240) = 480 \text{ मी.} \end{aligned}$$

जबकि राकेश का खेत वर्गाकार है।

$$\begin{aligned} \text{अतः राकेश के खेत का परिमाण} &= 4 \times \text{भुजा} \\ &= 4 \times 120 = 480 \text{ मी.} \end{aligned}$$

चूंकि दोनों का परिमाण समान है अतः बाड़ लगाने का खर्चा समान आएगा।

$$\begin{aligned} \text{पुनः नीलम के खेत का क्षेत्रफल} &= \text{ल.} \times \text{चौ.} \\ &= 180 \times 60 \\ &= 10,800 \text{ वर्गमीटर} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{राकेश के खेत का क्षेत्रफल} &= \text{भुजा}^2 \\ &= (120)^2 \\ &= 120 \times 120 \\ &= 14,400 \text{ वर्गमीटर} \end{aligned}$$

चूंकि राकेश के खेत का क्षेत्रफल अधिक है। अतः जुताई का खर्च भी अधिक होगा।

करो और सीखो

1. नीचे पंजीकरण संख्या दर्शाती पट्टियों के चित्र दिए गए हैं। अपने आसपास बस, टैक्सी एवं निजी वाहनों के आगे लगी पट्टियों की लम्बाई तथा चौड़ाई नापकर परिमाप की गणना कीजिए।

बस	टैक्सी	निजी वाहन
RJ19 PA 3807	RJ51 TA 1051	RJ271CO706

2. निम्नलिखित परिस्थितियों में बताइए कि कब परिमाप तथा कब क्षेत्रफल ज्ञात करना पड़ेगा ?
- दुपट्टे के किनारों पर लेस (कोर/गोटा) लगाना हो।
 - हॉकी के मैदान में काली मिट्टी डलवानी हो।
 - कमरे की छत भरवानी हो।
 - खेत के चारों ओर मेड़ लगवानी हो।

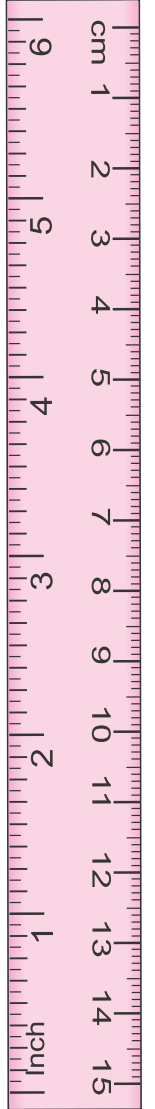
प्रश्नावली 16.1

- राधा प्रतिदिन सुबह 60 मीटर भुजा वाले वर्गाकार पार्क के चारों ओर किनारे किनारे 2 चक्कर लगाती है तो प्रतिदिन वह कितनी दूरी तय करती है ज्ञात कीजिए।
- सुरेश के पास 78 सेमी लम्बा रिबन है वह 26 सेमी लम्बाई की आयताकार फोटो फ्रेम के किनारे पर लगाना चाहता है तो फ्रेम की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
- रानू अपने बैठक के हाल में कालीन बिछाना चाहता है जिसकी लम्बाई 50 मी. है। यदि चौड़ाई लम्बाई की आधी है तो कालीन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- गुरमीत ने अपने खेत के 4200 वर्गमीटर भाग में मूंग की फसल बोई। इस हेतु खेत के चारों ओर तार बंदी करवाना चाहता है। यदि खेत की चौड़ाई 30 मीटर हो तो कितना लम्बा तार लगाना पड़ेगा ?
- विद्यालय के खेल के मैदान का क्षेत्रफल 38400 वर्गमीटर है। यदि मैदान की लम्बाई व चौड़ाई का अनुपात 3 : 2 है, तो मैदान का परिमाप ज्ञात कीजिए।
- एक आयत व वर्ग का परिमाप समान है, आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 25 सेमी और 15 सेमी है। किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है।
- निम्न आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए।
 - त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 2 सेमी, 3 सेमी और 4 सेमी हो।
 - समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा 8 सेमी हो।
 - समद्विबाहु त्रिभुज, समान भुजाएँ 10 सेमी. और तीसरी भुजा 7 सेमी हो।

16.2 समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

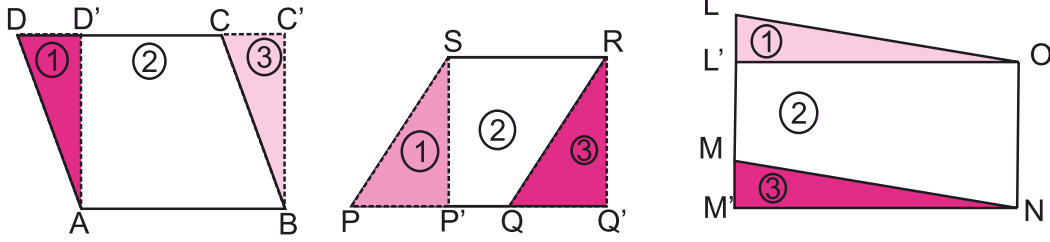
हमें आस-पास के परिवेश में वर्ग व आयत के अतिरिक्त दूसरे आकार भी देखने को मिलते हैं। आप ऐसे भूखण्ड का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे जो समान्तर चतुर्भुज जैसे आकार का है ?

समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर एवं समान्तर होती हैं।



आओ प्रयास करते हैं

अलग अलग नाप के तीन समान्तर चतुर्भुज बनाते हैं।



समान्तर चतुर्भुज की आधार भुजा के सामने की भुजा के एक शीर्ष से आधार पर लम्ब डाला। शीर्ष लम्ब से काटकर एक त्रिभुज (1) अलग करके सम्मुख समान्तर भुजा के साथ जोड़ देते हैं जो त्रिभुज (3) के रूप में दिखाया है। $\Delta (1)$ तथा $\Delta (3)$ में समकोण त्रिभुज के कर्ण भुजा नियम से दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

अतः $\Delta (1)$ का क्षेत्रफल = $\Delta (3)$ का क्षेत्रफल

समान्तर चतुर्भुज	आधार भुजा	आधार के सामने की भुजा के शीर्ष से आधार पर लम्ब	काटकर अलग किया त्रिभुज आकृति (1)	सम्मुख भुजा पर जोड़ा गया त्रिभुज आकृति (3)	नई स्थिति में बनी आकृति (2) + (3)	समान्तर चतुर्भुज एवं आयत के क्षेत्रफल में सम्बन्ध (1) + (2) = (2) + (3)
ABCD	CD	AD'	$\Delta AD'D$	$\Delta BC'C$	ABC'D'	ABCD = ABC'D'
PQRS	PQ	SP'	$\Delta SP'P$	$\Delta RQ'Q$	P'Q'RS	PQRS = P'Q'RS
LMNO	LM	OL'	$\Delta OL'L$	$\Delta NM'M$	L'M'NO	LMNO = L'M'NO

तालिका से स्पष्ट है कि:

{ (आकृति (1) + आकृति (2)) का क्षेत्रफल = { (आकृति (2) + आकृति (3)) का क्षेत्रफल
(क्योंकि आकृति (1) तथा आकृति (3) का क्षेत्रफल समकोण त्रिभुज के कर्ण भुजा नियम से बराबर है)

अतः समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

$$= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}$$

या

$$= \text{आधार} \times \text{सम्मुख भुजा के शीर्ष से आधार पर लम्ब}$$

या समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधार \times ऊँचाई) वर्ग इकाई

गतिविधि –

- पारदर्शी कागज/शीट लें।
- इस पर अलग-अलग नाप के समान्तर चतुर्भुज काटें।
- वर्गाकार खानों वाली शीट या ग्राफ पेपर पर रखकर इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- समान्तर चतुर्भुज के आधार के सामने की भुजा के शीर्ष से लम्बवत काटकर एक त्रिभुजाकार आकृति अलग करें।
- अलग की गई आकृति को दूसरी तरफ रखकर एक आयत बनाएँ।
- इस प्रकार बने आयत का क्षेत्रफल ग्राफ पेपर/वर्गाकार खाने वाली शीट से ज्ञात करें।
- समान्तर चतुर्भुज एवं आयत के क्षेत्रफलों की तुलना करें।
- यहाँ दोनों के क्षेत्रफल समान प्राप्त होते हैं।

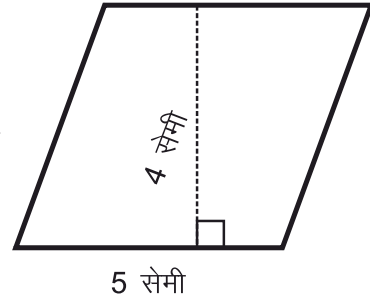
उदाहरण 1 एक समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा और संगत ऊँचाई क्रमशः 5 सेमी और 4 सेमी है। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल

आधार की लम्बाई = 5 सेमी

ऊँचाई = 4 सेमी

$$\begin{aligned} \text{समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल} &= \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\ &= b \times h \\ &= 5 \times 4 \text{ वर्ग सेमी} \\ &= 20 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$



उदाहरण 2 यदि एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 56 वर्ग सेमी और उसका आधार 7 सेमी हो तो ऊँचाई (x) ज्ञात कीजिए ?

हल

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= आधार \times ऊँचाई

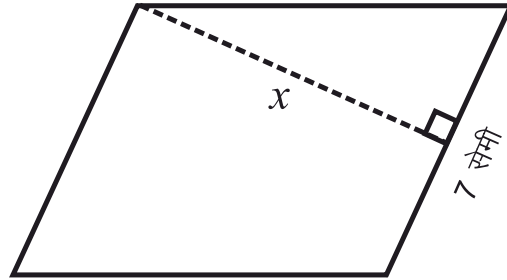
$$56 = 7 \times x$$

या $7 \times x = 56$

या $x = \frac{56}{7}$

$x = 8$ सेमी

या इस प्रकार समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई 8 सेमी है।



उदाहरण 3 समान्तर चतुर्भुज PQRS की दो भुजाओं की लंबाईयाँ 8 सेमी और 5 सेमी है। आधार QR की संगत ऊँचाई 4 सेमी है ज्ञात कीजिए।

हल

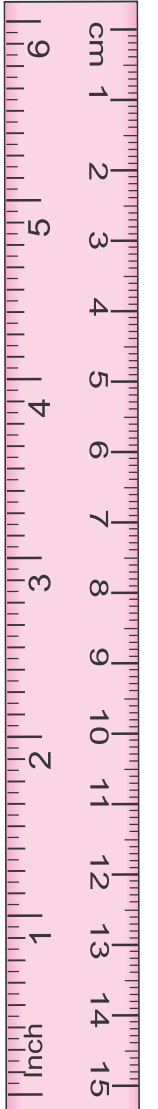
(i) समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल (ii) आधार PQ की संगत ऊँचाई

$$\begin{aligned} \text{(i) समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल} &= \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\ &= 8 \text{ सेमी} \times 4 \text{ सेमी} \\ &= 32 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

(ii) आधार = 5 सेमी

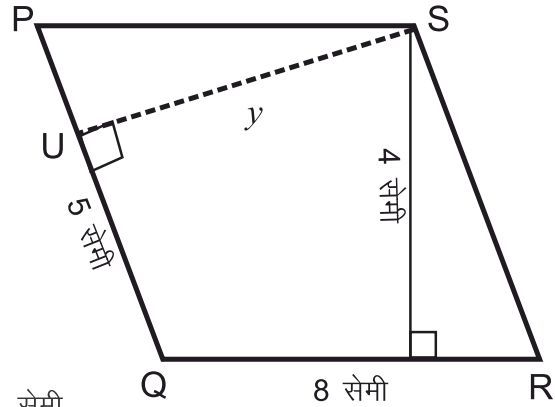
ऊँचाई (SU) = y सेमी

क्षेत्रफल = 32 वर्ग सेमी



समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्र. = आधार x ऊँचाई
 या $32 = 5 \times y$
 या $5 \times y = 32$

$$y = \frac{32}{5} = 6.4 \text{ सेमी}$$



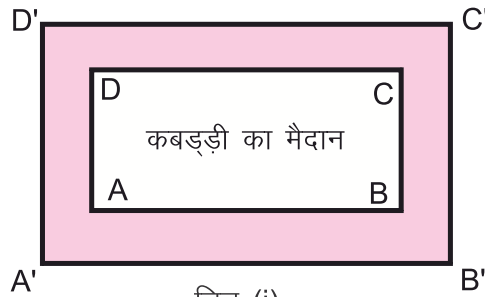
इस प्रकार आधार PQ की संगत ऊँचाई = 6.4 सेमी

6.2.1 पथमार्ग

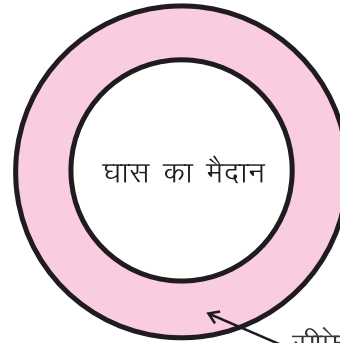
अपने दैनिक जीवन में कई बार ऐसी स्थितियाँ भी देखने में आती हैं, जिसमें आयताकार, वर्गाकार या वृत्ताकार पार्क, मैदान के चारों तरफ अन्दर या बाहर मार्ग बना होता है लम्बाई तथा चौड़ाई के समान्तर मार्ग बना होता है।

पथ का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करे

1. दिए गए आयताकार, वर्गाकार अथवा वृत्ताकार भाग के चारों तरफ बने मार्ग का क्षेत्रफल।
 = (मार्ग सहित दिए गए भाग का क्षेत्रफल) – (मार्ग रहित दिए गए भाग का क्षेत्रफल)

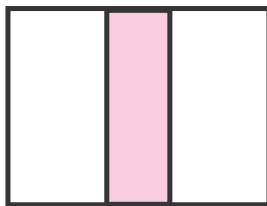


चित्र (i)

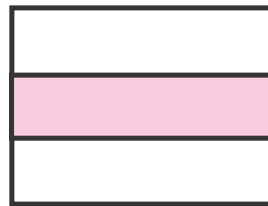


चित्र (ii)

2. लम्बाई / चौड़ाई के समान्तर बीचों-बीच अथवा किनारे पर बने मार्ग का क्षेत्रफल
 = (समान्तर भुजा की लम्बाई x मार्ग की चौड़ाई)

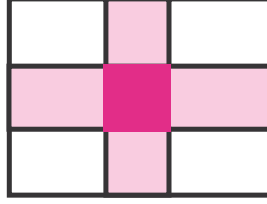


चौड़ाई के समान्तर मार्ग



लम्बाई के समान्तर मार्ग

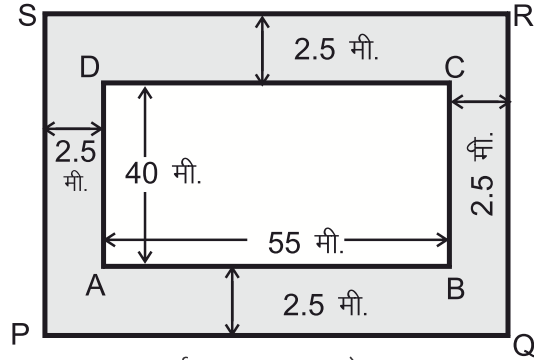
3. लम्बाई एवं चौड़ाई के समान्तर परस्पर काटने वाले मार्गों का क्षेत्रफल
= मार्गों का क्षेत्रफल – उभयनिष्ठ भाग का क्षेत्रफल



लम्बाई व चौड़ाई के समान्तर मार्ग

- उदाहरण 4** एक आयताकार पार्क 55 मीटर लम्बा और 40 मीटर चौड़ा है। पार्क के बाहर चारों ओर 2.5 मीटर चौड़ा मार्ग बनाया गया है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल आकृति में ABCD एक आयताकार पार्क है, और छायांकित क्षेत्र 2.5 मी. चौड़े मार्ग को दर्शाता है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें



मार्ग सहित आयताकार क्षेत्र PQRS का क्षेत्रफल – आयताकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा।

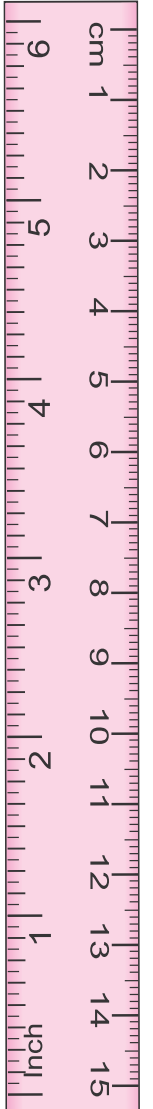
$$\begin{aligned} \text{मार्ग सहित पार्क की लम्बाई (PQ)} &= \text{पार्क की लम्बाई (AB)} + 2 \times \text{मार्ग की चौड़ाई} \\ &= 55 \text{ मी.} + 2 \times 2.5 \text{ मी.} \\ &= 55 \text{ मी.} + 5.0 \text{ मी.} = 60 \text{ मी.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{मार्ग सहित पार्क की चौड़ाई (PS)} &= \text{पार्क की चौड़ाई (AD)} + 2 \times \text{मार्ग की चौड़ाई} \\ &= 40 \text{ मी.} + 2 \times 2.5 \text{ मी.} \\ &= 40 + 5.0 \text{ मी.} \\ &= 45 \text{ मी.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{मार्ग सहित आयताकार पार्क (PQRS) का क्षेत्रफल} &= \text{ल.} \times \text{चौ.} \\ &= 60 \text{ मी.} \times 45 \text{ मी.} \\ &= 2700 \text{ वर्ग मी.} \end{aligned}$$

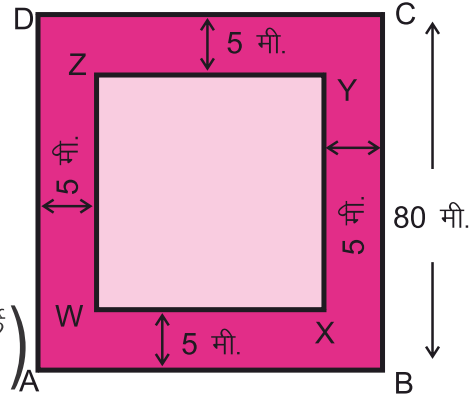
$$\begin{aligned} \text{आयताकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल} &= \text{ल.} \times \text{चौ.} \\ &= 55 \text{ मी.} \times 40 \text{ मी.} \\ &= 2200 \text{ वर्ग मी.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः मार्ग का क्षेत्रफल} &= \text{मार्ग सहित आयताकार पार्क PQRS का क्षेत्रफल} - \text{आयताकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल} \\ &= 2700 \text{ वर्ग मी.} - 2200 \text{ वर्ग मी.} = 500 \text{ वर्ग मी.} \end{aligned}$$



उदाहरण 5 80 मी. भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क की परिसीमा के साथ लगा हुआ भीतर की 5 मीटर चौड़ा मार्ग बना हुआ है। इस मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 180 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा ज्ञात कीजिए।

हल आकृति में ABCD एक 80 मी. भुजा वाले वर्गाकार पार्क को दर्शाता है तथा पार्क के अन्दर की तरफ छायांकित भाग 5 मी. चौड़े मार्ग को दर्शाता है।



मार्ग का क्षेत्रफल

$$= \left(\text{वर्गाकार पार्क } ABCD \text{ का क्षे.} \right) - \left(\text{मार्ग रहित वर्गाकार पार्क } WXYZ \text{ का क्षेत्रफल} \right)$$

मार्ग रहित पार्क की भुजा $WX = \text{पार्क की भुजा } AB - 2 \times \text{मार्ग की चौड़ाई}$

$$= 80 \text{ मी.} - 2 \times 5 \text{ मी.}$$

$$= 80 \text{ मी.} - 10 \text{ मी.}$$

$$= 70 \text{ मी.}$$

वर्गाकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल = (भुजा)² = (80 मी.)² = 6400 वर्ग मीटर

वर्गाकार पार्क WXYZ का क्षेत्रफल = (भुजा)² = (70 मी.)² = 4900 वर्ग मीटर

मार्ग का क्षेत्रफल = वर्गाकार पार्क ABCD का क्षे. - वर्गाकार पार्क WXYZ का क्षेत्रफल
= 6400 वर्ग मी. - 4900 वर्ग मी. = 1500 वर्ग मी.

यदि 1 वर्ग मी. में लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा = 180 रु. है

1500 वर्ग मी. में लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा = 180 x 1500 रु.

$$= 2,70,000 \text{ रु.}$$

उदाहरण 6 एक आयताकार घास के मैदान की लम्बाई 75 मीटर और चौड़ाई 55 मीटर है। मैदान के मध्य लम्बाई व चौड़ाई के समान्तर 3 मीटर चौड़े दो मार्ग इस प्रकार स्थित है कि प्रत्येक एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं। सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल लम्बाई के समान्तर मार्ग (WXYZ) का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

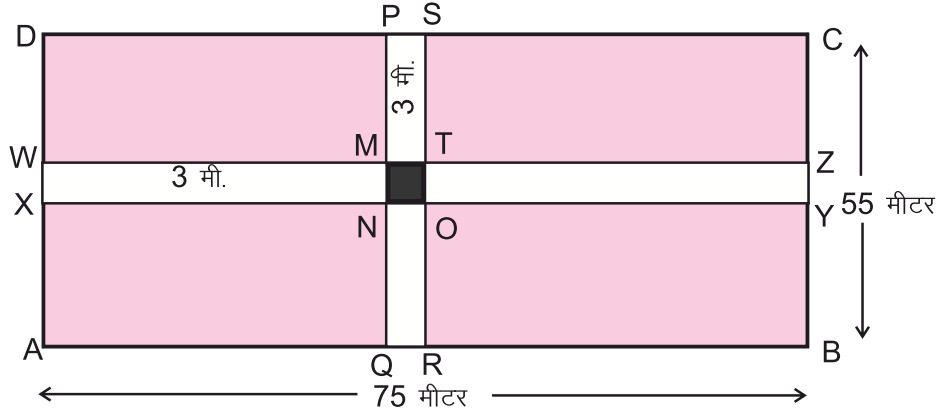
$$= 75 \text{ मी.} \times 3 \text{ मी.}$$

$$= 225 \text{ वर्ग मीटर}$$

चौड़ाई के समान्तर (PQRS) का क्षेत्रफल = ल. x चौ.

$$= 55 \text{ मी.} \times 3 \text{ मी.}$$

$$= 165 \text{ वर्ग मी.}$$



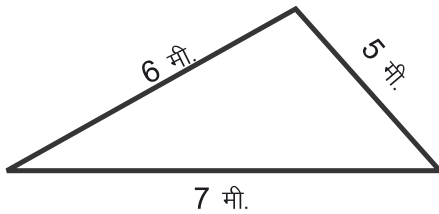
उभयनिष्ठ मार्ग वर्ग MNOT (दोनों मार्गों पर स्थित) का क्षेत्रफल = भुजा \times भुजा
 $= 3 \text{ मी.} \times 3 \text{ मी.}$
 $= 9 \text{ वर्ग मी.}$

वर्ग MNOT का क्षेत्रफल 9 वर्ग मी. दोनों भागों में सम्मिलित है।
 अतः सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल = WXYZ का क्षे. + PQRS का क्षे. - वर्ग MNOT का क्षे.
 $= (225 + 165 - 9) \text{ वर्ग मी.}$
 $= (390 - 9) \text{ वर्ग मी.}$
 $= 381 \text{ वर्ग मी.}$

उपर्युक्त उदाहरण के चित्र में हमने देखा कि छायांकित भाग दोनों मार्गों पर स्थित है। अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल घटाते हैं।

16.3 त्रिभुज का क्षेत्रफल

किसी त्रिभुजाकार पार्क पर घास लगवाने का खर्चा ज्ञात करना है। त्रिभुजाकार पार्क का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करें ?

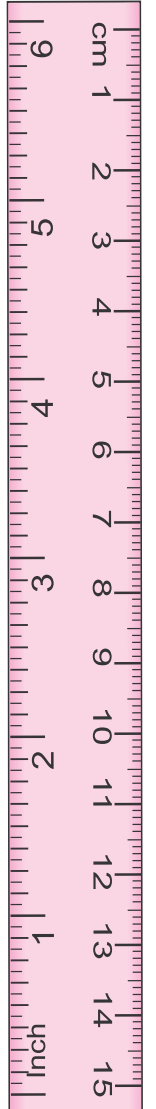


समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसे दो त्रिभुजों में बाँटता है।



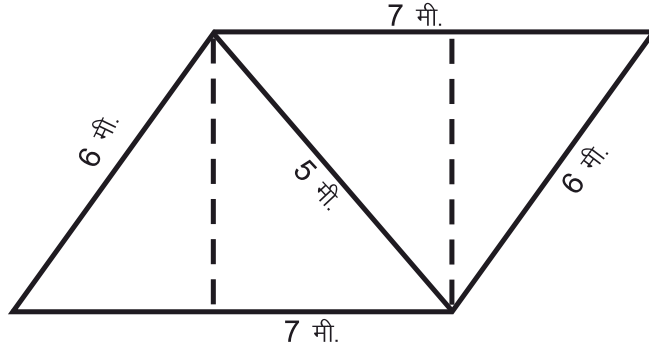
• आओ सोचे

त्रिभुजाकार पार्क की नाप मीटर में दी गई है इसे पैमाना 1 मीटर = 1 सेमी लेकर कार्ड शीट पर दो सर्वांगसम त्रिभुज 6 सेमी, 7 सेमी तथा 5 सेमी भुजा वाले बनावे।
 दोनों त्रिभुजों को एक साथ इस प्रकार जोड़ें की दोनों के समान नाप वाली भुजा परस्पर पास आ जावें तथा समांतर चतुर्भुज बना ले।



∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार x ऊँचाई) वर्ग इकाई



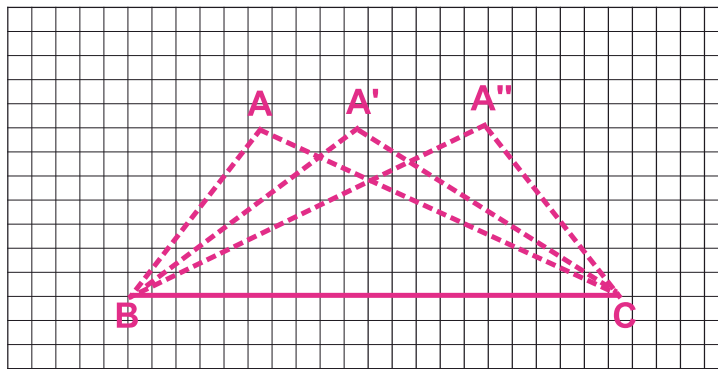
करो और सीखो

अलग अलग नाप के समान्तर चतुर्भुज बनाओ किसी एक विकर्ण के अनुदिश काटकर दो त्रिभुज बनाइए।

- क्या प्रत्येक स्थिति में दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं ?
- क्या दो सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल सदैव समान होता है ?
- क्या इसका विलोम भी सदैव सत्य होगा ?

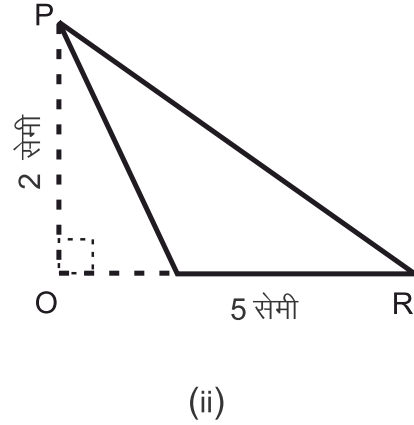
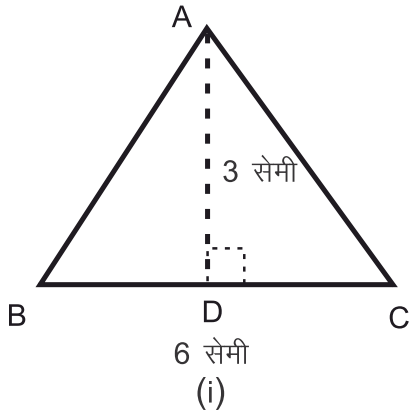
आओं करके देखें –

एक ग्राफ पेपर पर एक ही नाप का आधार तथा ऊँचाई लेकर अलग-अलग त्रिभुज बनाओं जैसे –



- $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$ तथा $\triangle A''BC$ नाप के तीन त्रिभुज लेकर देखिए –
- तीनों त्रिभुजों द्वारा घेरे गये खानों की संख्या समान है, अर्थात् तीनों का क्षेत्रफल समान है।
- क्या वे एक दूसरे को कभी पूरा-पूरा ढक सकते हैं ? काट करके देखिए ?

उदाहरण 7 चित्र में दर्शाए गए त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल आकृति (i) त्रिभुज (ABC) का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार \times ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \text{ सेमी} \times 3 \text{ सेमी} = 9 \text{ वर्ग सेमी}$$

आकृति (ii) त्रिभुज (PQR) का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार \times ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times QR \times PO$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \text{ सेमी} \times 2 \text{ सेमी} = 5 \text{ वर्ग सेमी}$$

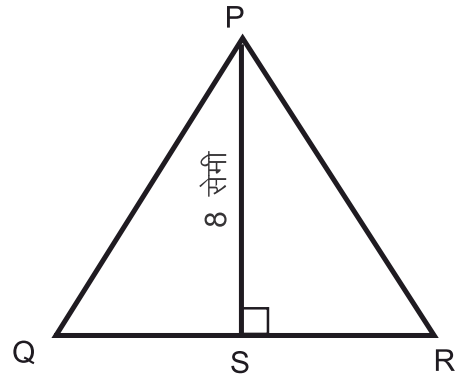
उदाहरण 8 यदि त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल 52 वर्ग सेमी और ऊँचाई PS = 8 सेमी है तो आधार QR की ज्ञात कीजिए ?

हल दी गई आकृति में ऊँचाई PS = 8 सेमी
त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल = 52 वर्ग सेमी
त्रिभुज PQR का आधार QR = ?

त्रिभुज (PQR) का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार \times ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times QR \times PS$$

$$52 \text{ वर्ग सेमी.} = \frac{1}{2} \times QR \times 8 \text{ सेमी}$$



$$\begin{aligned} QR &= \frac{52 \times 2 \text{ सेमी}^2}{8 \text{ सेमी}} \\ &= 13 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$

$$\text{आधार QR} = 13 \text{ सेमी.}$$

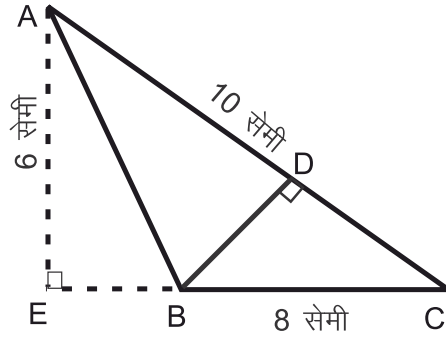
उदाहरण 9 त्रिभुज ABC में AC = 10 सेमी, BC = 8 सेमी और AE = 6 सेमी है तो ज्ञात कीजिए।

(i) त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल (ii) BD की लम्बाई

हल (i) त्रिभुज ABC में आधार BC = 8 सेमी

$$\text{ऊँचाई AE} = 6 \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\ &= \frac{1}{2} \times BC \times AE \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \text{ सेमी} \times 6 \text{ सेमी} \\ &= 24 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$



(ii) आधार AC = 10 सेमी. ऊँचाई (BD) = ? क्षेत्रफल = 24 वर्ग सेमी

$$\begin{aligned} \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\ &= \frac{1}{2} \times AC \times BD \\ 24 \text{ वर्ग सेमी} &= \frac{1}{2} \times 10 \times BD \\ BD &= \frac{24 \times 2 \text{ सेमी}}{10} = 4.8 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

उदाहरण 10 त्रिभुज PQR के आधार और ऊँचाई का अनुपात 3 : 2 है यदि उसका क्षेत्रफल 108 वर्ग सेमी तो आधार व ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल चित्रानुसार त्रिभुज PQR में आधार QR व ऊँचाई PQ का अनुपात 3 : 2

$$\text{माना कि त्रिभुज का आधार QR} = 3 \times x$$

$$\text{त्रिभुज की ऊँचाई PQ} = 2 \times x$$

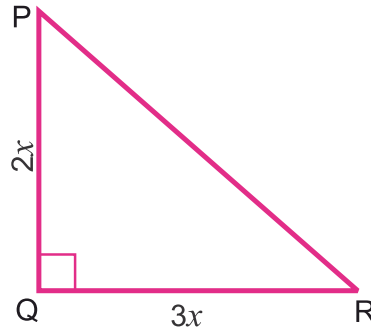
$$\text{क्षेत्रफल} = 108 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आ.} \times \text{ऊ.} = \frac{1}{2} \times QR \times PQ$$

$$108 \text{ वर्ग सेमी.} = \frac{1}{2} \times 3x \times 2x$$

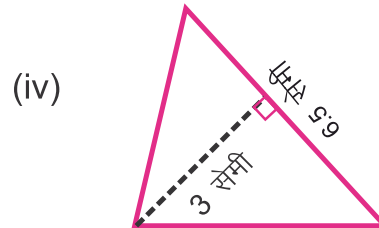
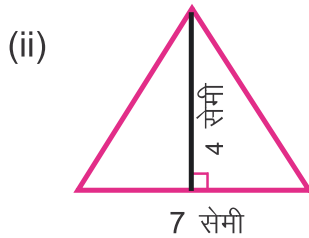
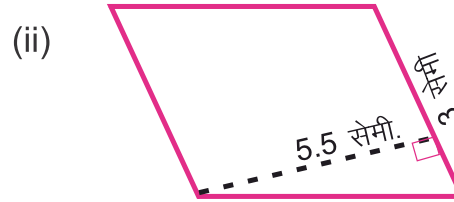
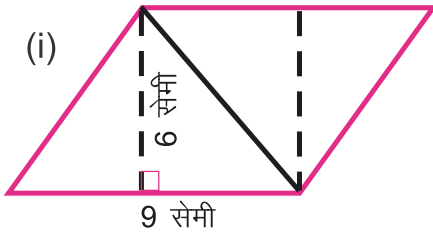
$$108 \text{ वर्ग सेमी.} = 3x^2$$

या $3x^2 = 108$
 या $x^2 = 36$
 या $x = 6$ सेमी
 त्रिभुज का आधार $QR = 3 \times x$
 $= 3 \times 6$
 $= 18$ सेमी
 त्रिभुज की ऊँचाई $PQ = 2 \times x$
 $= 2 \times 6$
 $= 12$ सेमी

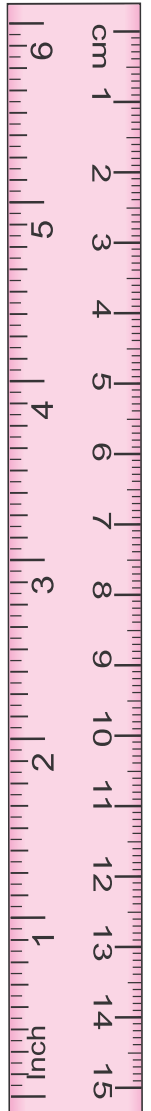


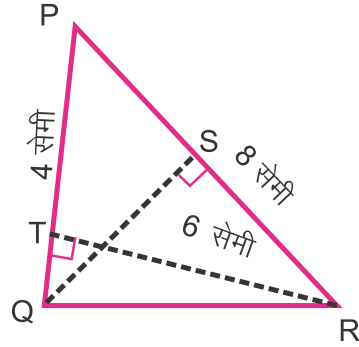
प्रश्नावली 16.2

1. निम्न आकृतियों को देख कर समान्तर चतुर्भुज व त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

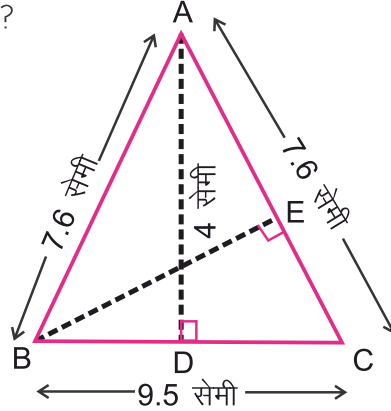


- एक समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई उसके आधार की एक चौथाई है यदि उसका क्षेत्रफल 144 वर्ग सेमी हो उसका आधार और ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
- काली के त्रिभुजाकार खेत व हमीदा के आयताकार खेत के क्षेत्रफल समान है। हमीदा के खेत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 20 सेमी और 15 सेमी है। काली के खेत के आधार की लम्बाई 25 सेमी है तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
- त्रिभुज PQR में (संलग्न चित्र) $PQ = 4$ सेमी, $PR = 8$ सेमी, $RT = 6$ सेमी है तो ज्ञात कीजिए।
 - त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल
 - QS की लम्बाई





5. एक त्रिभुज का आधार 8 सेमी है। यदि त्रिभुज की ऊँचाई, आधार से दुगुनी है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. ABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC = 7.6$ सेमी और $BC = 9.5$ सेमी (संलग्न चित्र) A से भुजा BC पर लम्ब AD, 4 सेमी है त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा B से AC पर लम्ब अर्थात् BE ज्ञात कीजिए ?



7. एक समान्तर चतुर्भुज के आधार और ऊँचाई का अनुपात 5 : 2 है उसका क्षेत्रफल 640 वर्ग सेमी हो तो आधार और ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. श्याम अपने आयताकार उपवन जिसकी लम्बाई 95 मीटर और चौड़ाई 80 मी. है। वह बाहर की ओर चारों तरफ 5 मीटर चौड़े क्षेत्र की मिट्टी खुदवाकर पौधे लगाना चाहता है। ज्ञात कीजिए कि कितने क्षेत्रफल में पौधे लगाएगा ?
9. 60 मीटर भुजा वाले वर्गाकार मैदान के चारों तरफ भीतर की ओर 2 मीटर चौड़ा पथ बना हुआ है ज्ञात कीजिए।
(1) पथ का क्षेत्रफल (2) 270 रु. प्रति वर्गमीटर की दर से पथ पर सीमेंट कराने का व्यय।
10. 125 मीटर लम्बाई और 95 मीटर चौड़ाई वाले एक आयताकार पार्क के मध्य में लम्बाई व चौड़ाई के समान्तर मध्य में दो मार्ग बनाए गए हैं प्रत्येक मार्ग की चौड़ाई 10 मीटर हो तो ज्ञात कीजिए।
(1) मार्ग में 80 रु. प्रति वर्गमीटर की दर से लाल मिट्टी डलवाने पर व्यय।
(2) पार्क में मार्ग को छोड़कर शेष भाग में घास लगाने का क्षेत्रफल।

16.4.1 वृत्त की परिधि

ममता अपनी बैठक में रखी टी टेबल जो दोनों किनारों पर अर्द्धवृत्ताकार हैं, के किनारे पर प्लास्टिक की मॉल्डिंग फ्रेम लगवाना चाहती है।



ममता ने अपनी बहिन मीना से इस हेतु फ्रेम लाने को कहा मीना टेबल के किनारे की लम्बाई नापना चाहती है, परन्तु किनारे वाले भाग को मापने में दिक्कत आ रही है। ममता उसे समझाती है कि वक्र किनारे वाले भाग को मापने के लिए हम वृत्ताकार भाग के किनारे को मापने की विधि ज्ञात करते हैं। आओ वक्राकार / मुड़ी हुई आकृति की लम्बाई मापना सीखें। “ममता ने वृत्ताकार चूड़ी लेकर उसके चारों तरफ किनारे – किनारे धागा लपेटकर दूरी को मापा। यही वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी ‘परिधि’ है।

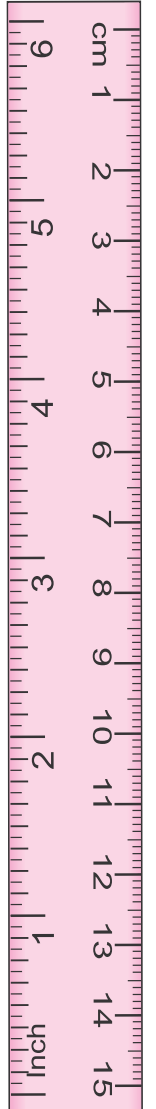
वृत्ताकार चकती, पहिए, चूड़ी इत्यादि की परिधि पर एक निशान लगाकर उसे समतल धरातल पर घुमाकर पूरे एक चक्कर में तय की गई दूरी से भी परिधि ज्ञात कर सकते हैं।



मीना इन सभी स्थितियों में वृत्ताकार भाग की परिधि को सही-सही मापने में समस्या है। चलो हम इसके लिए एक सूत्र का पता करते हैं।

ममता-हाँ, मैंने देखा था कि गड़रिया लोहार लकड़ी के पहिएँ पर लोहे का पट्टा चढ़ाने के लिए वह व्यास की लम्बाई के आधार पर लोहे के पट्टे की लम्बाई का ठीक से अनुमान लगाकर पट्टा चढ़ाता है। आओ, व्यास तथा परिधि के मध्य सम्बन्ध का पता लगाते हैं। ममता एवं मीना ने अलग-अलग त्रिज्या की 7 वृत्ताकार वस्तुएँ ली तथा धागे की सहायता, से मापकर निम्न तालिका में मापों को भरकर परिधि तथा व्यास के अनुपात का पता लगाया है।

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि ÷ व्यास
1	3.5 सेमी	7.0 सेमी	22.0 सेमी	$\frac{22}{7} = 3.14$
2	7.0 सेमी	14.0 सेमी	44.0 सेमी	$\frac{44}{14} = 3.14$
3	10.5 सेमी	21.0 सेमी	66.0 सेमी	$\frac{66}{21} = 3.14$
4	14.0 सेमी	28.0 सेमी	88.0 सेमी	$\frac{88}{28} = 3.14$
5	17.5 सेमी	35.0 सेमी	110.0 सेमी	$\frac{110}{35} = 3.14$



उपर बनी तालिका से स्पष्ट होता है कि अलग अलग त्रिज्या वाली आकृतियों में परिधि/व्यास का मान लगभग समान रहता है। यह मान लगभग 3.14 रहता है। इस स्थिरांक को “ π ” पाई से प्रदर्शित करते हैं।

$$\text{अतः } \frac{\text{परिधि (c)}}{\text{व्यास (d)}} = \pi \text{ या } \frac{\text{परिधि (c)}}{2 \times \text{त्रिज्या}} = \frac{c}{2r}$$

$$\text{या } c = \pi d$$

$$c = 2\pi r$$

$$\text{परिधि } c = 2\pi r \quad \text{अतः वृत्ताकार वस्तुओं की परिधि} = \pi d = 2\pi r$$

उदाहरण 11 मोहन अपनी माँ की चूड़ियों पर सोने की पत्तियाँ चढवाना चाहता है वह कितनी लम्बी पत्ती चढाएगा जबकि चूड़ी की त्रिज्या 3.5 सेमी है। (बिना अतिव्यापन किए हुए)

हल वृत्ताकार चूड़ी की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी

$$\text{वृत्त की परिधि} = 2\pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \text{ सेमी} \quad \left| \pi = \frac{22}{7} \right.$$

$$= 22 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 12 एक वृत्ताकार पहिए का व्यास 11.2 सेमी है तो पहिए की परिधि ज्ञात कीजिए।

हल पहिए का व्यास (d) = 11.2 सेमी

$$\text{अतः त्रिज्या (r)} = 11.2 \div 2 \text{ सेमी} = 5.6 \text{ सेमी}$$

$$\text{वृत्ताकार पहिए की परिधि} = 2\pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.6 \text{ सेमी}$$

$$= 35.2 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 13 बनवारी 42 मीटर त्रिज्या वाले पहिए को 2 चक्कर घुमाने में कितनी दूरी तय करेगा ?

हल वृत्ताकार पहिए की त्रिज्या (r) = 42 मीटर

$$\text{वृत्त की परिधि} = 2\pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 42 \text{ मीटर}$$

$$= 264 \text{ मीटर}$$

$$\therefore 1 \text{ चक्कर लगाने में पहिया दूरी तय करता है} = 264 \text{ मीटर}$$

$$\therefore 2 \text{ चक्कर लगाने में पहिया दूरी तय करेगा} = 264 \times 2 \text{ मीटर}$$

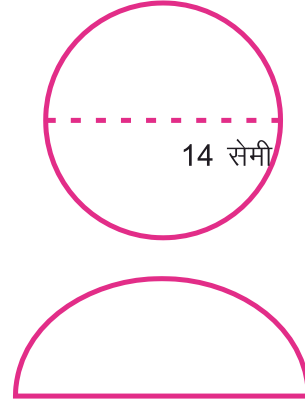
$$= 528 \text{ मीटर}$$

उदाहरण 14 खुशबू 14 सेमी त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार कागज की तश्तरी को दो बराबर भागों में विभाजित करती है। प्रत्येक अर्ध वृत्ताकार तश्तरी का परिमाप ज्ञात कीजिए।

($\pi = \frac{22}{7}$ प्रयोग कीजिए।)



हल तश्तरी की त्रिज्या (r) = 14 सेमी
 वृत्त की परिधि = $2\pi r$
 अतः अर्धवृत्त की परिधि = $\frac{1}{2} \times 2\pi r$
 = πr
 = $\frac{22}{7} \times 14$ सेमी
 = 44 सेमी
 वृत्त का व्यास (d) = $2 \times$ त्रिज्या
 = 2×14 सेमी
 = 28 सेमी

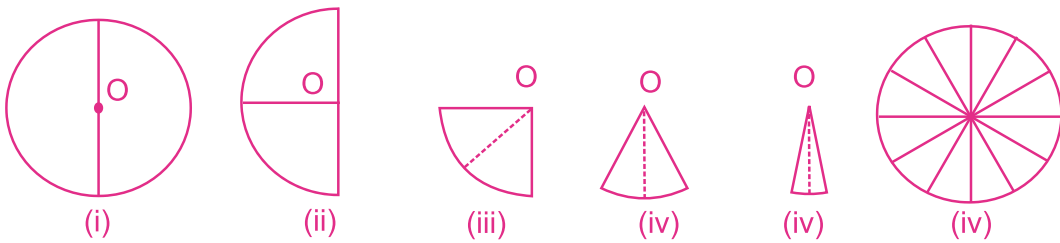


अतः प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी का परिमाप = अर्धवृत्त की परिधि + व्यास
 = 44 सेमी + 28 सेमी
 = 72 सेमी

16.4.2 वृत्त का क्षेत्रफल

मीना 28 मीटर त्रिज्या वाले वृत्ताकार मैदान पर लाल मिट्टी डलवाना चाहती है। यदि 1 वर्ग मीटर क्षेत्रफल पर मिट्टी डलवाने का खर्चा 10 रुपये है तो इस मैदान पर लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा कितना होगा इसका हिसाब लगा रही है। मीना की बहिन ममता ने बताया इसमें हमें परिधि (परिमाप) नहीं बल्कि वृत्ताकार भाग द्वारा घेरे गये क्षेत्र का क्षेत्रफल पता लगाना है।

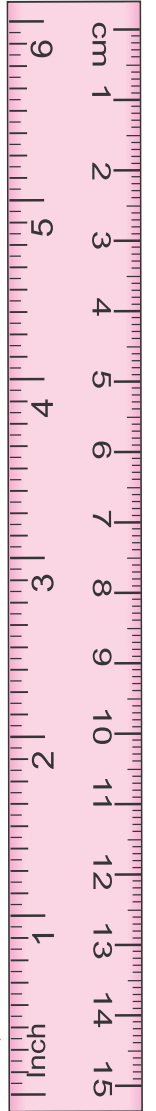
दोनों ने पारदर्शी कागज पर वृत्ताकार भाग के दर्शाने हेतु 10 मीटर = 1 सेमी पैमाना लेकर 2.8 सेमी त्रिज्या की वृत्ताकार शीट काटी तथा ग्राफ पेपर पर रखकर, वर्गों को गिनते हुए क्षेत्रफल का पता लगाने लगी। किनारे सीधे नहीं होने से वृत्त के क्षेत्रफल का एक कच्चा सतही अनुमान ही प्राप्त हुआ। अब एक अन्य विधि से वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने की सोची – मीना वृत्त को लगातार चित्रानुसार मोड़ती गई तथा उसे सलवटो से काटा



ममता – हमने एक वृत्त के दो, दो से चार, चार से आठ, आठ से सोलह टुकड़े प्राप्त किए हैं।

मीना – यदि इस प्रकार आगे से आगे मोड़ते जाएँ तो लगातार दुगुने टुकड़े प्राप्त होंगे।

ममता – एक स्थिति ऐसी होगी कि प्राप्त टुकड़ा लगभग एक त्रिभुजाकार होगा जिसकी ऊँचाई त्रिज्या के बराबर तथा आधार बहुत छोटा होगा।



मीना – यदि हमें n टुकड़े प्राप्त हों तो सभी n टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के समान होगा।

ममता – हाँ, इस स्थिति में।

वृत्त का क्षेत्रफल = {त्रिभुज 1 + त्रिभुज 2 + त्रिभुज 3 + त्रिभुज 4 +++ त्रिभुज n }

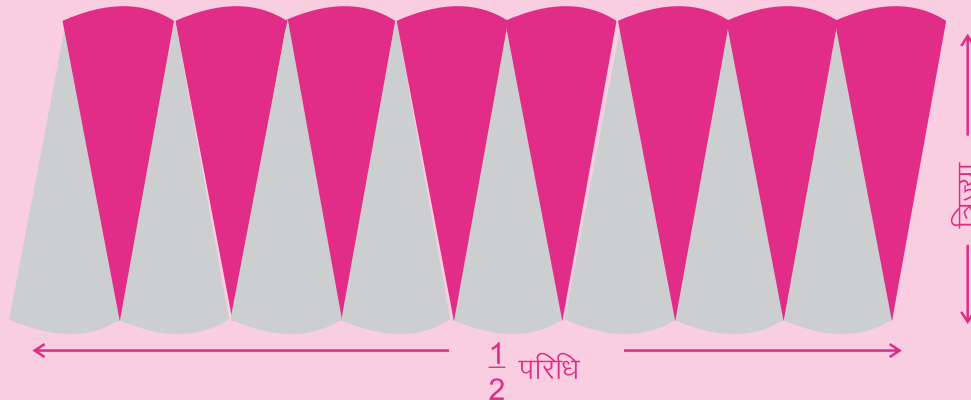
$$\text{का क्षेत्रफल} \\ = \left[\frac{1}{2} b_1 r + \frac{1}{2} b_2 r + \frac{1}{2} b_3 r + \frac{1}{2} b_4 r + \dots + \dots + \frac{1}{2} b_n r \right]$$

$$= \frac{1}{2} r [b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n] \quad (b_1, b_2, \dots, b_n = \text{सभी त्रिभुज के आधार})$$

$$= \frac{1}{2} r [b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n] = \frac{1}{2} r [2\pi r] \text{ वर्ग इकाई } \because (\text{परिधि} = 2\pi r)$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi r^2) \text{ वर्ग इकाई} = \pi r^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

गतिविधि— एक वृत्त के अर्द्धभाग को छायांकित कीजिए तथा इसे लगातार 6 बार उतरोत्तर मोड़िए तथा सलवटों के अनुदिश काटकर 64 खण्ड प्राप्त करें, इन खण्डों को चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए।



क्या आप इससे वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र बतला सकते हैं ? आप देखेंगे कि यह आयत के समान आकृति बन रही है इसकी लम्बाई परिधि तथा चौड़ाई त्रिज्या के बराबर है, यदि वृत्त की त्रिज्या ' r ' है तो—

$$\begin{aligned} \text{आयत का क्षेत्रफल} &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2 \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

उदाहरण 15 25 सेमी त्रिज्या वाले वृत्ताकार डिस्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल डिस्क की त्रिज्या (r) = 25 सेमी

$$\begin{aligned} \text{वृत्ताकार डिस्क का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\ &= 3.14 \times (25)^2 \\ &= 3.14 \times 25 \times 25 \\ &= 1962.50 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

उदाहरण 16 एक वृत्ताकार बगीचे का व्यास 11.2 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
हल व्यास $d = 11.2$ मीटर, अतः त्रिज्या (r) = $11.2 \div 2$ मीटर
 $= 5.6$ मीटर

$$\begin{aligned}\text{वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\ &= \frac{22}{7} \times (5.6)^2 \text{ वर्ग मीटर} \\ &= \frac{22}{7} \times 5.6 \times 5.6 \text{ वर्ग मीटर} \\ &= 98.56 \text{ वर्गमीटर}\end{aligned}$$

उदाहरण 17 एक वृत्ताकार तश्तरी का क्षेत्रफल 2826 वर्ग सेमी. है तो वृत्ताकार तश्तरी की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल वृत्त का (तश्तरी) क्षेत्रफल = 2826 वर्ग सेमी
 $\pi r^2 = 2826$ वर्ग सेमी
 $3.14 \times r^2 = 2826$ वर्ग सेमी
 $r^2 = \frac{2826}{3.14}$ वर्ग सेमी
 $r^2 = 900$ वर्ग सेमी
 $r = 30$ सेमी

उदाहरण 18 संलग्न आकृति दो वृत्तों को दर्शाती है जिनका केन्द्र समान है। बड़े वृत्त की त्रिज्या 12 सेमी और छोटे वृत्त की त्रिज्या 8 सेमी है। निम्न ज्ञात कीजिए। यदि $\pi = 3.14$ है।

- (1) बड़े वृत्त का क्षेत्रफल
- (2) छोटे वृत्त का क्षेत्रफल
- (3) दोनों वृत्तों के बीच

छायांकित भाग का क्षेत्रफल ($\pi = 3.14$)

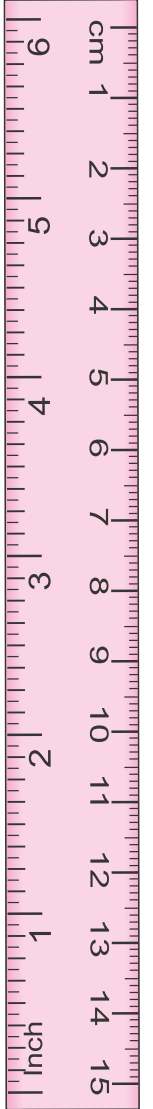
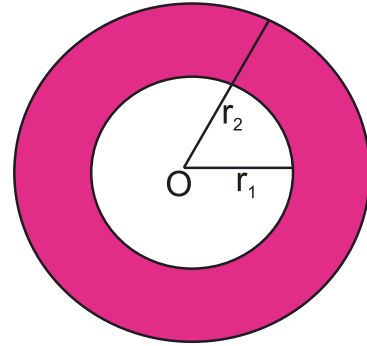
हल (1) बड़े वृत्त की त्रिज्या $r_2 = 12$ सेमी

$$\begin{aligned}\text{अतः बड़े वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r_2^2 \\ &= 3.14 \times (12)^2 \text{ वर्ग सेमी} \\ &= 3.14 \times 12 \times 12 \text{ वर्ग सेमी} \\ &= 452.16 \text{ वर्ग सेमी}\end{aligned}$$

(2) छोटे वृत्त की त्रिज्या $r_1 = 8$ सेमी

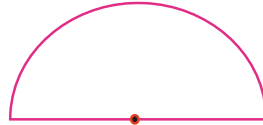
$$\begin{aligned}\text{अतः छोटे वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r_1^2 \\ &= 3.14 \times (8)^2 \text{ वर्ग सेमी} \\ &= 3.14 \times 8 \times 8 \text{ वर्ग सेमी} \\ &= 200.96 \text{ वर्ग सेमी}\end{aligned}$$

(3) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल
 $= 452.16$ वर्ग सेमी – 200.96 वर्ग सेमी
 $= 251.20$ वर्ग सेमी



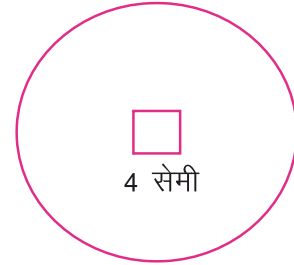
प्रश्नावली 16.3

- निम्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
 - 21 सेमी
 - 28 मिमी
 - 10.5 सेमी
- निम्न वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दिया गया है –
 - त्रिज्या = 5 सेमी
 - व्यास = 42 मीटर
 - त्रिज्या = 5.6 सेमी
- यदि एक वृत्ताकार शीट की परिधि 132 मीटर हो तो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। शीट का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
- एक वृत्त की परिधि 44 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
- दी गई आकृति, 12 सेमी व्यास के साथ एक अर्धवृत्त है। उसका परिमाण ज्ञात कीजिए।



12 सेमी

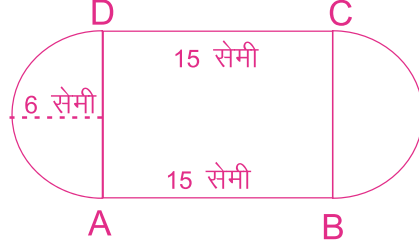
- एक वृत्ताकार तालाब की त्रिज्या 28 मीटर है। इसके बाहर चारों ओर 1.4 मीटर चौड़ाई का तट (मार्ग) बना हुआ है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी है। इस वृत्त के बाहर 2 मीटर चौड़ाई का मार्ग है। उस मार्ग का क्षेत्रफल कितना होगा ?
- 5 सेमी त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार शीट में से 4 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त को निकाल दिया जाता है। शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)
- 14 सेमी. त्रिज्या वाली एक गत्ते की शीट में से 4 सेमी भुजा वाले एक वर्ग को निकाल दिया जाता है। (जैसा कि आकृति में दिखाया गया है) शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



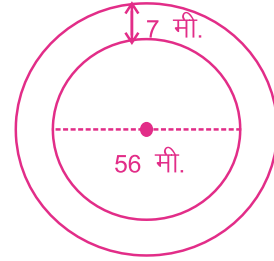
4 सेमी

- यदि दो वृत्तों के व्यास का अनुपात 4 : 5 है तो दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
- दुर्गा अपनी वृत्ताकार टेबल की सतह पर पॉलिश कराना चाहती है जबकि टेबल का व्यास 2.8 मीटर है तथा 25 रु. प्रति वर्गमीटर की दर से खर्चा ज्ञात कीजिए।
- गोपी अपने घोड़े को 12 मीटर लम्बी रस्सी से एक खूंटे द्वारा बांध देता है तो घोड़ा कितने क्षेत्रफल की घास खा पाता है ?

13. दी गई आकृति में ABCD एक आयताकार भाग के दोनों सिरों पर अर्धवृत्ताकार भाग जोड़े गए जिसका व्यास 12 सेमी है लम्बाई 15 सेमी है तो क्षेत्रफल ज्ञात करें।



14. 35 मीटर त्रिज्या वाले एक पहिए को 880 मीटर दूरी तय करने के लिए पहिए को कितनी बार घूमना पड़ेगा ? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
15. पर्वत अपने वृत्ताकार उपवन के चारों ओर 7 मीटर चौड़े मार्ग में 11 रु. प्रति वर्गमीटर की दर से मिट्टी डलवाने में कितना व्यय करता है, ज्ञात कीजिए ? जबकि उपवन का व्यास 56 मीटर है। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



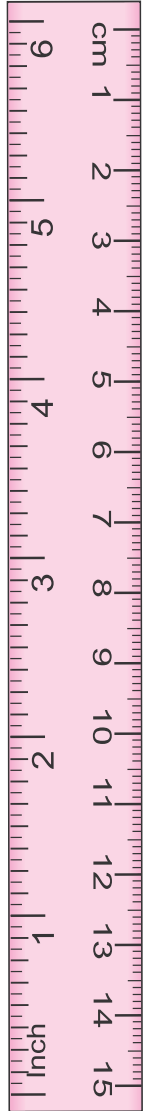
16. वृत्ताकार घड़ी के मिनट की सुई की लम्बाई 20 सेमी. है। मिनट की सुई की नोक 1 घण्टे में कितनी दूरी तय करती है। $\pi = 3.14$ लीजिए।

करो और सीखो

यातायात चिन्हों को दर्शाने हेतु लोहे की चद्दर काटकर निम्नलिखित 5 वृत्ताकार चकती तैयार की गई सभी की त्रिज्या 21 सेमी है।



इन सभी चिन्हों का अर्थ अपने अध्यापक जी की सहायता से पता कीजिए तथा चकतियों की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हमने सीखा

1. परिमाप एक बन्द आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल एक बन्द आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग या क्षेत्र को दर्शाता है।
2. एक वर्ग और आयत का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र जैसे –
 - (1) एक वर्ग का परिमाप = $4 \times$ भुजा
 - (2) एक आयत का परिमाप = $2 \times$ (लम्बाई + चौड़ाई)
 - (3) एक वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा \times भुजा
 - (4) एक आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई \times चौड़ाई
3. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार \times ऊँचाई
4. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (इससे प्राप्त समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$
5. एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है। एक वृत्त की परिधि = $2\pi r$ या परिधि = πd जहाँ d वृत्त का व्यास और $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 (लगभग) है।
6. एक वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2 , जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।



अध्याय 17

आँकड़ों का प्रबन्धन

17.1 पिछली कक्षा में हमने पढ़ा कि निश्चित उद्देश्य से जो संख्यात्मक तथ्य एकत्र किए जाते हैं वे आँकड़े कहलाते हैं।

पिछली कक्षा में हमने आँकड़ों के प्रकार, आँकड़ों का संग्रह करना, आँकड़ों को व्यवस्थित करना, मिलान चिह्न की सहायता से सारणीबद्ध करना सीखा था साथ ही चित्रालेख, दण्डालेख पढ़ना एवं बनाना सीखा। आँकड़ों का संग्रहण, आलेखन और प्रस्तुतीकरण हमारे अनुभवों को संग्रहित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं।

इस अध्याय में हम आगे दोहरे दण्ड आलेख पढ़ना एवं बनाना तथा केन्द्रीय प्रवृत्तियाँ अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक आदि का अध्ययन करेंगे।

दैनिक जीवन में हमारे सामने विभिन्न प्रकार के आँकड़े आते रहते हैं। जिन्हें हम समाचार पत्र पत्रिकाओं, टेलीविजन या अन्य माध्यमों से देखते हैं। आइए आँकड़ों के कुछ सामान्य रूपों को देखें जो हमारे सम्मुख आते रहते हैं।

अमर की दिनचर्या	
प्रवृत्ति	व्यतीत समय
भोजन एवं नित्यकर्म	2 घण्टा
विद्यालय	6 घण्टा
खेलकूद एवं मनोरंजन	3 घण्टा
गृह कार्यों में सहयोग	2 घण्टा
पढ़ाई	3 घण्टा
निद्रा	8 घण्टा

तालिका 17.1

प्राथमिक स्वास्थ्य केन्द्र में सोमवार को आए मरीज	
बीमारी का नाम	मरीज संख्या
बुखार	22
सर्दी-जुकाम	26
आँख का रोग	08
त्वचा के रोग	12
दुर्घटना से चोट	07
दांत के रोग	05

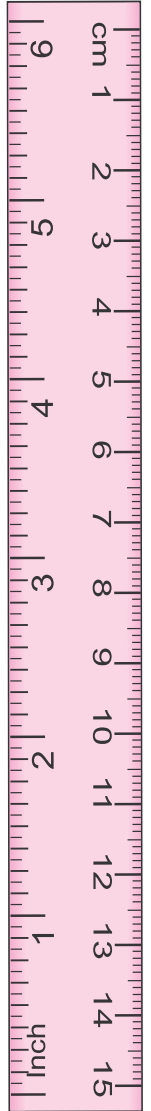
तालिका 17.2

आरती का प्रथम दो परख में प्रदर्शन		
विषय	प्रथम परख	द्वितीय परख
हिन्दी	5	8
अंग्रेजी	6	8
गणित	3	9
विज्ञान	6	9
सामा. विज्ञान	5	8
संस्कृत	8	7

तालिका 17.3

आँकड़ों के ये संग्रह हमें क्या बताते हैं ? उदाहरणार्थ हम कह सकते हैं कि अमर अपनी दिनचर्या में विद्यालय में 6 घण्टे तथा 3 घण्टा घर पर पढ़ाई में व्यतीत करता है। (तालिका 17.1)

इसी प्रकार आरती ने लगभग सभी विषयों में प्रथम परख के मुकाबले द्वितीय परख में बेहतर प्रदर्शन किया और सर्वाधिक सुधार गणित विषय में हुआ है।



क्या इन आँकड़ों को और बेहतर एवं संगठित तरीके से प्रस्तुत किया जा सकता है, ताकि उनका विश्लेषण और व्याख्या करना आसान व बेहतर हो जाए ? इस अध्याय में हम इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करेंगे।

गत सत्र में हम देख चुके हैं कि किस प्रकार संग्रहित सूचनाओं को एक बारम्बारता बंटन सारणी (Frequency distribution table) के रूप में पहले व्यवस्थित करके फिर सूचनाओं को चित्रालेख (pictographs) या दण्ड आलेखों (bargraphs) के रूप में निरूपित किया जाता है। हम कह सकते हैं कि सबसे लम्बा दण्ड ही बहुलक है यदि दण्ड बारम्बारता निरूपित करता है।

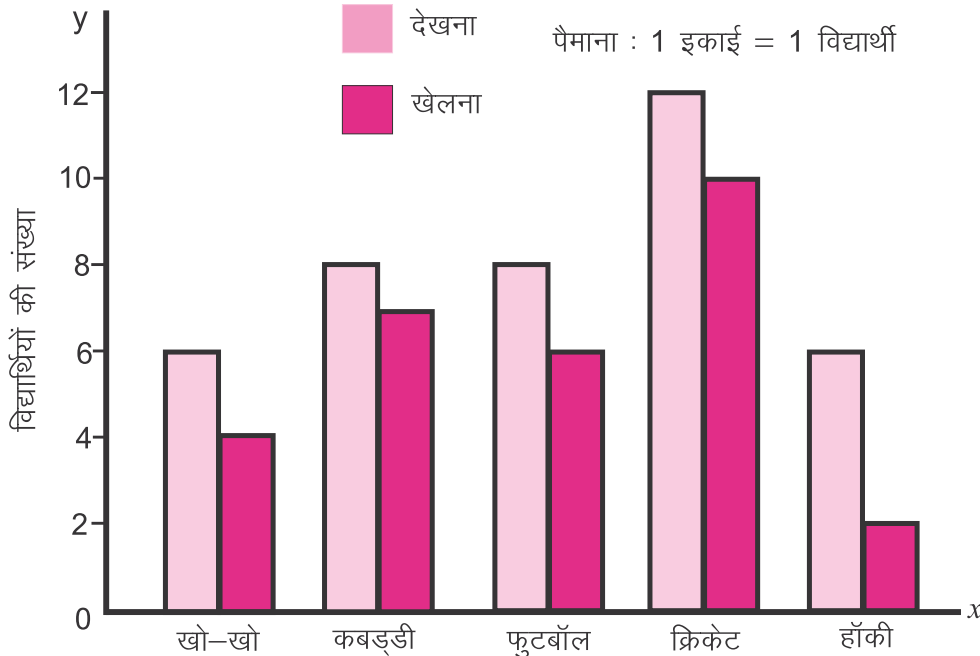
17.2 दोहरे दण्ड आलेख खींचना

एक कक्षा में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नांकित आँकड़ों पर विचार कीजिए :-

पसंदीदा खेल	खो-खो	कबड्डी	फुटबॉल	क्रिकेट	हॉकी
देखना	6	8	8	12	6
खेलना	4	7	6	10	2

उपर्युक्त आँकड़े कक्षा के विभिन्न विद्यार्थियों की संबंधित खेल को देखने एवं खेलने की रुचि को दर्शाते हैं। इन आँकड़ों को देखकर हम बता सकते हैं कि किस खेल को सर्वाधिक विद्यार्थी खेलते हैं, किस खेल को विद्यार्थी सबसे कम देखना पसंद करते हैं।

परन्तु एक विशेष खेल को देखने एवं खेलने वाले विद्यार्थियों में अंतर पता करने के लिए हमें देखने व खेलने वाले विद्यार्थियों की संख्या में तुलना करनी पड़ेगी। इसके लिए हम उन आलेखों को खींचना सीखेंगे, जिन्हें दोहरे दण्ड आलेख (double bar graphs) कहा जाता है। इसमें दोनों रुचियों की तुलना दण्ड आलेखों द्वारा साथ-साथ दी हुई होती है।



उदाहरण 1 एक बिजली सामग्री विक्रेता द्वारा वर्ष 2011 से 2015 तक प्रतिवर्ष बेचे गए सी.एफ.एल. ट्यूब एवं एल.ई.डी. बल्ब की संख्या नीचे दी गई है।

वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015
CFL ट्यूब	1200	1400	1100	900	600
LED बल्ब	100	400	700	1000	1400

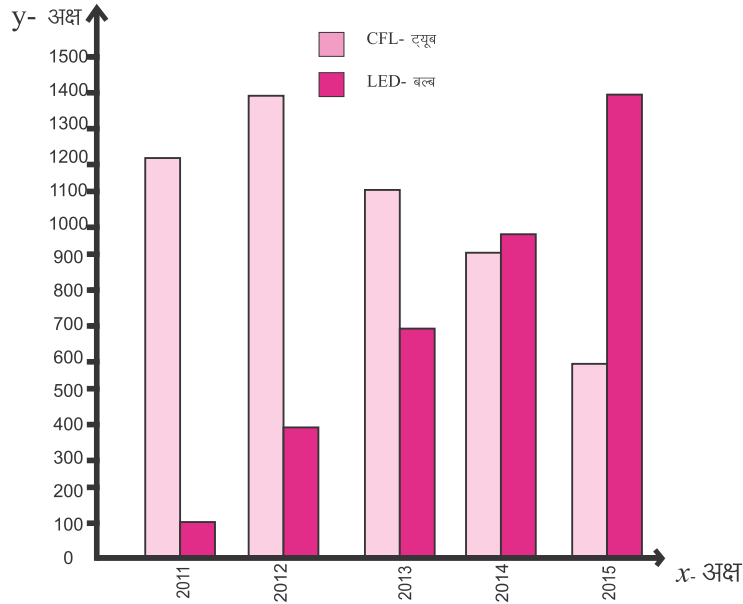
एक दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. किस प्रकार के प्रकाश उपकरण की बिक्री लगातार बढ़ी है?
2. 2011 की तुलना में 2015 में प्रकाश उपकरणों में वृद्धि हुई या कमी ?
3. दोनों प्रकार के प्रकाश उपकरणों की बिक्री में अंतर किस वर्ष सर्वाधिक रहा ?

हल

दोहरा दण्ड आलेख की रचना के पद –

1. ग्राफ पेपर पर x अक्ष (क्षैतिज) और y अक्ष (उर्ध्वाधर) बनाइए। वे आपस में $(0,0)$ मूल बिन्दु पर मिलते हैं।
2. x अक्ष पर वर्ष 2011 से 2015 तक लिखिए।
3. सी.एफ.एल. ट्यूब और एल.ई.डी. बल्ब की संख्या y अक्ष पर लिखें।
4. y अक्ष पर उचित पैमाना लीजिए ताकि दोनों प्रकाश उपकरणों की संख्या आसानी से लिखी जा सके। y अक्ष पर 1 सेमी = 100 ले सकते हैं।
5. संख्या को 100 से भाग देकर प्रत्येक स्तम्भ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
6. सी.एफ.एल. ट्यूब और एल.ई.डी. बल्ब को साथ-साथ स्तम्भों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।



- (1) दोहरे दण्ड आलेख को देखने से स्पष्ट है कि LED बल्ब की बिक्री लगातार बढ़ी है।
- (2) 2011 की तुलना में 2015 में कुल प्रकाश उपकरणों में वृद्धि स्पष्ट नजर आती है।
- (3) दोहरे दण्ड आलेख को देखने से स्पष्ट है कि 2011 में दोनों प्रकाश उपकरणों की बिक्री में अंतर सर्वाधिक रहा।

करो और सीखो

1. कक्षा 7 की पाँच छात्राओं के गणित और विज्ञान विषय के अंक तालिका में दिए गए हैं। इन आँकड़ों को उर्ध्वाधर दोहरे दण्ड आलेख द्वारा दर्शाए।

छात्र का नाम	गणित	विज्ञान
आरती	65	75
वर्षा	70	75
सिमरन	55	70
राधा	75	80
ज्योति	50	60

2. दो परिवारों के एक महीने में होने वाले विभिन्न खर्च का विवरण निम्न तालिका में दर्शाया गया है। इस तालिका के आधार पर दोहरा दण्ड आलेख बनाइए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

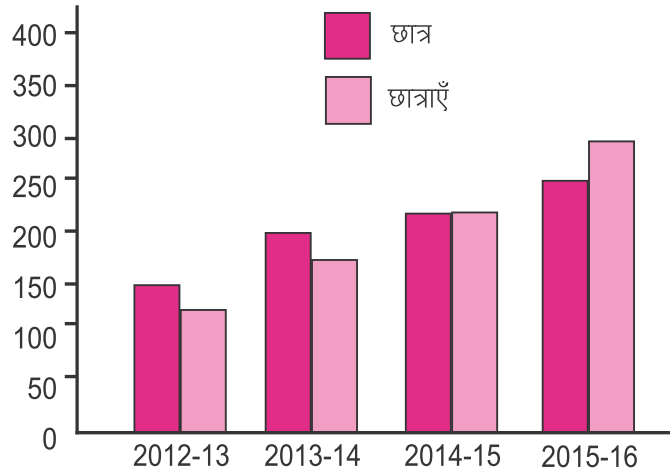
खर्च मद	परिवार 1	परिवार 2
मकान किराया	2000	2500
बिजली, पानी टेलीफोन	800	600
खाद्य सामग्री	8000	7000
बच्चों की शिक्षा	2000	3000
बचत	2200	1900

- (i) किस मद पर खर्च अधिकतम है ?
(ii) किस मद पर खर्च न्यूनतम है ?
(ii) दोनों परिवारों की मासिक आय 15000 रु. हो तो दोनों परिवारों में बच्चों की शिक्षा पर खर्च का प्रतिशत क्या होगा ?

प्रश्नावली 17.1

1. निम्न आलेख में एक विद्यालय को सत्र के अनुसार विद्यार्थी संख्या को दर्शाया गया है। इस आलेख पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

- (i) किस सत्र में विद्यालय में छात्राओं की संख्या छात्रों से अधिक रही?
(ii) किस सत्र में विद्यालय में छात्र एवं छात्राओं की संख्या समान रही ?
(iii) 2015-16 में विद्यालय में कुल विद्यार्थियों की संख्या क्या थी ?



2. वर्ष 2011 से 2015 तक निःशुल्क पाठ्यपुस्तक वितरण के तहत एक जिले में कक्षा 7 को गणित तथा हिन्दी की पुस्तकों का वितरण निम्न तालिकानुसार हुआ।

विषय/वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015
गणित	8000	8500	9500	11000	13000
हिन्दी	9000	10000	10500	11500	14000

एक दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

- किस विषय की पुस्तक की माँग हमेशा अधिक रही है ?
 - किस वर्ष में दोनों पुस्तकों की माँग में अंतर न्यूनतम रहा है ?
 - किस वर्ष में दोनों पुस्तकों की माँग में अंतर अधिकतम रहा ?
3. उदयपुर से राजस्थान के निम्नांकित शहरों की सड़क एवं रेलमार्ग से अनुमानित दूरी निम्नांकित तालिका में दी गई है। तालिका के आधार पर दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

भाहर उदयपुर से दूरी	सड़क मार्ग (किमी में)	रेल मार्ग (किमी में)
अजमेर	290	310
जयपुर	410	440
बीकानेर	530	580
जोधपुर	270	300
कोटा	360	570

- सड़क मार्ग से उदयपुर से सर्वाधिक दूरी पर कौन सा शहर है ?
- कौन से शहर की दूरी में सड़क और रेलमार्ग में अंतर न्यूनतम है ?
- कौन से शहर की दूरी में सड़क और रेलमार्ग में अंतर सर्वाधिक है ?

17.3 आँकड़ों का संग्रह

हमारे दैनिक जीवन में किसी तथ्य को आँकड़ों के माध्यम से व्यक्त करने का बहुत महत्व है। जैसे यह कहा जाता है कि भारत की जनसंख्या काफी है के स्थान पर यह कहना कि भारत की जनसंख्या 2011 की जनगणना के अनुसार एक अरब इक्कीस करोड़ आठ लाख है ज्यादा उपयुक्त है। इसी प्रकार हमारे स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या काफी है, के स्थान पर यह कहना उचित होगा कि हमारे स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या 867 है। अतः हम कह सकते हैं कि आँकड़ों के माध्यम से हम हमारे विचारों को अधिक स्पष्ट रूप से व्यक्त कर सकते हैं। जिस प्रकार हमें भवन निर्माण से पूर्व पत्थर, चूना, सीमेंट, ईंटे आदि एकत्रित करना होता है, उसी प्रकार आँकड़ों के विश्लेषण एवं निष्कर्ष निकालने हेतु प्रारम्भ में आँकड़े एकत्रित करना अति आवश्यक है। आँकड़ों के उचित उपयोग से हम जटिल से जटिल समस्याओं को समझ कर इनका समाधान तार्किक रूप से ज्ञात करने में सक्षम हो सकते हैं। परन्तु इसके लिए यह अति आवश्यक है कि लिए गए आँकड़े शुद्ध, व्यापक एवं प्रमाणिक हो।

आँकड़ों को एकत्रित करने के स्रोतों के आधार पर इन्हें दो भागों में विभाजित किया जा सकता है।

(क) प्राथमिक आँकड़े (Primary Data) (ख) द्वितीयक आँकड़े (Secondary data)

(क) प्राथमिक आँकड़े – जिन आँकड़ों को स्वयं या कार्यकर्ताओं के सहयोग से नए सिरे से पहली बार संग्रहित करते हैं उन्हें हम प्राथमिक आँकड़े कहते हैं। उदाहरणार्थ यदि आपको अपनी कक्षा के विद्यार्थियों का पारिवारिक स्थिति का अध्ययन करना है तो कुछ आँकड़े यथा उनके घर की मासिक आय-व्यय, भाई-बहनों की संख्या, आय के स्रोत आदि के बारे में जानकारी एकत्र करनी होगी। ये आँकड़े प्राथमिक आँकड़े कहलाएँगे।

(ख) द्वितीयक आँकड़े – ये वे आँकड़े होते हैं जिनका पूर्व में किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा संकलन किया जा चुका है। जो प्रकशित अथवा अप्रकशित स्थिति में हो सकते हैं जैसे जनगणना या साक्षरता संबंधी आँकड़ों को भारत सरकार की अधिकृत संस्था भारत के जनगणना विभाग से प्राप्त किए जा सकता है।

17.4 आँकड़ों का संगठन

जब हम आँकड़ों को एकत्रित करते हैं तो हमें उन्हें व्यवस्थित करना होता है। हमें इसकी आवश्यकता क्यों पड़ती है ?

निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए –

विद्यालय में स्वास्थ्य परीक्षण के अंतर्गत 8 विद्यार्थियों की ऊँचाई निम्नांकित पाई गई –

विजय – 140 सेमी	किशोर – 138 सेमी	विद्या – 130 सेमी
तब्बसुम – 135 सेमी	रमेश – 145 सेमी	सारिका – 125 सेमी
दिव्यांशी – 131 सेमी	मोहित – 144 सेमी	

इस रूप में इन आँकड़ों से कोई निष्कर्ष निकाल पाना आसान नहीं था। सारिका ने उन ऊँचाईयों को आरोही क्रम में लिखकर उन्हें तालिका के रूप में लिखा।

विद्यार्थी का नाम	ऊँचाई (सेमी में)	विद्यार्थी का नाम	ऊँचाई (सेमी में)
सारिका	125	किशोर	138
विद्या	130	विजय	140
दिव्यांशी	131	मोहित	144
तब्बसुम	135	रमेश	145

निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

1. सबसे लम्बे विद्यार्थी का नाम क्या है ?
2. सबसे छोटे विद्यार्थी का नाम क्या है ?
3. किशोर और तब्बसुम की ऊँचाई में अंतर कितना है ?

इस प्रकार हम समझ सकते हैं कि आँकड़े यदि व्यवस्थित रूप में संगठित किए जाए तो उनका अध्ययन एवं निष्कर्ष निकालना आसान हो जाएगा। हमारे सामने आने वाले अनेक आँकड़े सारणीबद्ध रूप में होते हैं। हमारे स्कूल के रजिस्टर, प्रगति पत्र, तापमान के रिकॉर्ड, प्रतिदिन की उपस्थिति तथा अन्य आँकड़े सारणीबद्ध रूप में होते हैं।

क्या आप कुछ और आँकड़ों के बारे में सोच सकते हैं जो सारणीबद्ध रूप में हों ?

करो और सीखो

भार ज्ञात करने वाली मशीन द्वारा अपनी कक्षा के विद्यार्थियों का वजन ज्ञात करें। इन आँकड़ों को व्यवस्थित कर तालिका बनाइए। इन आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखिए। फिर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. कक्षा में किस विद्यार्थी का भार सबसे अधिक है ?
2. कक्षा में कितने विद्यार्थियों का भार 25 किग्रा से अधिक है ?
3. कक्षा में कितने विद्यार्थियों का भार 20 से 30 किग्रा है ?

17.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

अपने दैनिक जीवन में आपने निम्न कथन अवश्य ही पढ़े या सुने होंगे।

1. कक्षा 7 के विद्यार्थियों की औसत आयु 13 वर्ष है।
2. मध्याह्न भोजन में प्रति विद्यार्थी ग्रहण किया भोजन 150 ग्राम है।
3. पिछले 10 दिनों का औसत तापमान 30 डिग्री (सेल्सियस) है।
4. लक्ष्य प्रतिदिन 5 घण्टे पढ़ाई करता है।

उपर्युक्त कथनों पर विचार कीजिए।

क्या आप कह सकते हैं कि पहले कथन के अनुसार कक्षा 7 के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 13 वर्ष है या द्वितीय कथन के अनुसार प्रत्येक विद्यार्थी प्रतिदिन पूरा-पूरा 150 ग्राम भोजन ही ग्रहण करता है।

स्पष्टतः इन प्रश्नों का उत्तर है “नहीं”।

तो इन कथनों का क्या आशय है ?

“औसत” से हम समझते हैं कि कक्षा 7 के अधिकतम विद्यार्थियों की आयु 13 वर्ष के आसपास है। कुछ विद्यार्थियों की आयु 13 वर्ष से कुछ कम या कुछ अधिक हो सकती है।

इसी प्रकार पिछले दिनों का औसत तापमान 32 डिग्री से आशय है कि तापमान लगभग 32 डिग्री के आसपास रहा। कभी वह 32 डिग्री से कम भी हुआ हो सकता है कभी 32 डिग्री से अधिक भी रहा होगा।

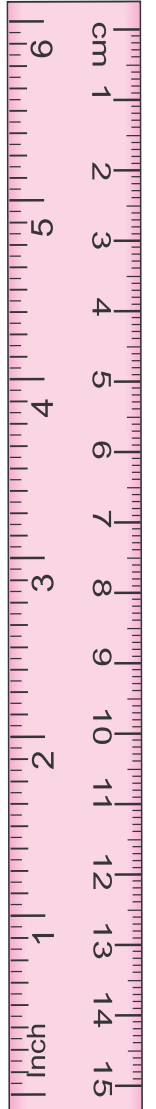
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि “औसत” एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षकों या आँकड़ों के एक समूह को केन्द्रीय प्रवृत्ति को निरूपित करती या दर्शाती है क्योंकि औसत सबसे अधिक और सबसे कम आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है। विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने वाले विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि या केन्द्रीय मानों की आवश्यकता होती है।

इनमें से एक प्रतिनिधि मान अंकगणितीय या समान्तर माध्य है।

17.6 समान्तर माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किया जाने वाला प्रतिनिधि मान समान्तर माध्य है, संक्षेप में इसे माध्य (mean) भी कहते हैं। निम्न उदाहरण को देखें –

उदाहरण 2 एक फल बेचने वाले को एक सप्ताह की शुद्ध कमाई क्रमशः 500 रु, 650 रु, 400 रु, 425 रु, 450 रु, 600 रु, तथा 475 रु है। फल बेचने वाले की औसत कमाई ज्ञात कीजिए ?



हल

$$\begin{aligned} \text{फल बेचने वाले की औसत कमाई} &= \frac{\text{सप्ताह की कुल कमाई}}{\text{सप्ताह में दिनों की संख्या}} \\ &= \frac{500 + 650 + 400 + 425 + 450 + 600 + 475}{7} \\ &= \frac{3500}{7} = 500 \text{ रु} \end{aligned}$$

फल बेचने वाले की औसत कमाई होगी = 500 रु प्रतिदिन

उदाहरण 3 प्रथम 6 सम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए ।

हल

हम जानते हैं कि प्रथम छः सम संख्याएँ हैं 2, 4, 6, 8, 10, 12

समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए हम सभी प्रेक्षणों का योग ज्ञात करके उसमें प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देते हैं। अतः इस स्थिति में

$$\begin{aligned} \text{समान्तर माध्य} &= \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}} \\ &= \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12}{6} \\ &= \frac{42}{6} = 7 \end{aligned}$$

इस प्रकार प्रथम छः सम संख्याओं का समान्तर माध्य 7 होगा।

17.7 प्रसार या परिसर

निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए –

उदाहरण 4 एक विद्यालय में कार्यरत पाँच शिक्षकों का वेतन क्रमशः 25000, 18000, 20000, 22000, तथा 23000 रुपये मासिक है।

1. सबसे अधिक वेतन पाने वाले शिक्षक का वेतन कितना है ?
2. सबसे अधिक और सबसे कम वेतन पाने वाले शिक्षकों के वेतन का अंतर कितना है ?
3. इन शिक्षकों के वेतन का माध्य ज्ञात कीजिए ?

हल

शिक्षकों के वेतन को आरोही क्रम में लिखने पर हमें प्राप्त होता है –

18000, 20000, 22000, 23000, 25000

इससे हम पता लगा सकते हैं कि

1. सबसे अधिक वेतन पाने वाले शिक्षक का वेतन 25000 रुपये है।
2. सबसे अधिक वेतन 25000 है तथा सबसे कम वेतन 18000 है। दोनों के मध्य अंतर $25000 - 18000 = 7000$ रु है।
3. शिक्षकों के वेतन का माध्य = $\frac{18000 + 20000 + 22000 + 23000 + 25000}{5}$

$$= \frac{108000}{5} = 21600 \text{ रुपये}$$

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अंतर में हमें प्रेक्षणों के प्रसार का एक अनुमान लग जाता है। हम इस परिणाम को आँकड़ों या प्रेक्षणों का **प्रसार** या **परिसर** कहते हैं।

करो और सीखो

1. अपने परिवार के सदस्यों की ऊँचाइयों का माध्य ज्ञात कीजिए।
2. अपने परिवार के सदस्यों की आयु का माध्य ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 17.2

1. एक विद्यालय की कक्षा 6 से 12 में विद्यार्थियों की संख्या क्रमशः निम्नलिखित है 78, 72, 67, 59, 54, 49, 48 तो बताइए –
 - (i) सबसे अधिक विद्यार्थी किस कक्षा में है ?
 - (ii) सबसे कम विद्यार्थी किस कक्षा में है ?
 - (iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है ?
 - (iv) इन आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए
2. प्रथम 10 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए ।
3. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 6 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए—
68, 03, 17, 78, 12, 104 रनों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।
4. बीकानेर से उदयपुर चलने वाली बस में सोमवार से शुक्रवार तक निम्नांकित संख्या में यात्रियों ने सफर किया— 45, 48, 32, 40, 30 प्रत्येक दिवस में यात्रियों का माध्य क्या होगा ?
5. एक गाँव में पाँच वर्षों तक निम्न फसलें उगाई गई फसल पर प्रति एकड़ लाभ (रुपये में) निम्नानुसार रहा।

फसल	2011	2012	2013	2014	2015
बाजरा	6000	8000	5000	6500	8500
ग्वार	7000	8000	12000	9000	8500
मूंगफली	9000	7000	10000	8000	13000

ऊपर दी गई तालिका के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- (i) प्रत्येक फसल का पाँच वर्ष में माध्य लाभ ज्ञात कीजिए।
 - (ii) उपर्युक्त उत्तर के आधार पर अगले वर्ष कौन सी फसल उगानी चाहिए ?
6. यदि 3, 4, 8, 5, x , 3 अंको का समान्तर माध्य 4 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
 7. एक पुस्तकालय से 10 दिन में छात्रों को दी गई पुस्तकों की संख्या निम्नलिखित है –
40, 57, 32, 59, 72, 66, 40, 62, 72, 60
प्रतिदिन दी गई पुस्तकों का माध्य ज्ञात कीजिए।
 8. पाँच संख्याओं का औसत 18 है यदि चार संख्याएँ क्रमशः 22, 20, 14, 13 हो तो पाँचवी संख्या ज्ञात कीजिए।

9. एक शहर में किसी सप्ताह विशेष का तापमान निम्नानुसार अंकित किया गया ।

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
तापमान (डिग्री C° में)	37	37.5	40	36.5	37.5	35	35.5

- उपर्युक्त आँकड़ों से तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए।
- इस सप्ताह का माध्य तापमान ज्ञात कीजिए।
- कितने दिन तापमान औसत से अधिक रहा ?

10. एक विद्यालय में आयोजित गायन प्रतियोगिता में तीन निर्णायकों द्वारा चार गायक प्रतिभागियों को निम्नानुसार 100 में से अंक दिए गए –

प्रतिभागी का नाम	निर्णायक I	निर्णायक II	निर्णायक III
राशि	78	75	72
सुमन	82	75	83
पूनम	68	64	69
खुशबु	49	56	51

- निर्णायकों द्वारा दिए गए अंकों का परिसर क्या होगा ?
- कुल अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए ?
- विजेता प्रतिभागी का नाम बताइए।
- विजेता प्रतिभागी और चतुर्थ स्थान प्राप्त प्रतिभागी के माध्यों के मध्य कितना अंतर है ?

17.7 बहुलक

प्रतिनिधित्व मान का दूसरा प्रकार बहुलक है, आइए उदाहरण देखें।

उदाहरण 5 एक जूतों की दुकान पर विभिन्न नाप के जूते उपलब्ध हैं। दुकानदार ने जूतों की साप्ताहिक मांग को ज्ञात करने के लिए निम्न तालिकानुसार जूतों की बिक्री को रिकॉर्ड किया।

जूते का नम्बर	5	6	7	8	9	10
बिक्री	12	27	40	45	26	18

अगर दुकानदार के बेचे गए जूतों का माध्य ज्ञात करें तो –

हल

$$\text{माध्य} = \frac{\text{बेचे गए जूतों की कुल संख्या}}{\text{जूतों के नम्बर के कुल प्रकार}} = \frac{168}{6} = 28$$

तो क्या दुकानदार को प्रत्येक साइज के 28 जोड़ी जूते प्रति सप्ताह मंगवाने होंगे। निश्चित ही उपर्युक्त रिकॉर्ड के आधार पर दुकानदार अन्य नाप के मुकाबले 7, 8 नम्बर के जूते अधिक मंगवाएगा क्योंकि 7, 8 नम्बर नाप के जूतों की बिक्री अधिकतम हुई है।

इसमें से भी 8 नम्बर साइज के जूतों की बिक्री सबसे अधिक हुई है। यह आँकड़ों का एक अन्य प्रतिनिधि मान है। यह प्रतिनिधि मान आँकड़ों का बहुलक कहलाता है।

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं अर्थात् जिस पद की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वह पद बहुलक कहलाता है।

उदाहरण 6 निम्नांकित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5, 4, 4, 2, 5, 7, 5, 6, 5, 4, 3, 5

हल संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 7

प्रेक्षणों के निरीक्षण से स्पष्ट है अंक 5 सबसे अधिक बार आया है।

अतः बहुलक 5 होगा।

17.7.1 बड़े व अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

यदि आँकड़ों की संख्या अधिक हो तो उसको आरोही या अवरोही क्रम में लिखकर फिर गिनना इतना आसान नहीं होता है। ऐसी स्थिति में हम आँकड़ों को मिलान चिह्न की सहायता से सारणीबद्ध करते हैं। आँकड़ों को सारणीबद्ध करना हम पिछली कक्षा में सीख चुके हैं।

उदाहरण 7 100 मीटर की दौड़ प्रतियोगिता में 30 धावकों ने भाग लिया। दौड़ पूरी करने में उनके द्वारा लिया गया समय (सैकण्ड में) निम्नानुसार है –

14, 12, 13, 12, 10, 12, 14, 13, 12, 11, 12, 13, 14, 12, 14, 12, 13, 14, 14,
11, 10, 11, 12, 14, 13, 12, 12, 11, 12, 14 इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल आँकड़ों को सारणीबद्ध करने पर

समय सैकण्ड में	मिलान चिह्न	धावकों की संख्या
10		2
11		4
12		11
13		6
14		7
	योग	30

इस सारणी को देखकर हम तुरंत कह सकते हैं कि इन आँकड़ों का बहुलक 12 है क्योंकि सबसे अधिक धावकों ने दौड़ 12 सैकण्ड में पूरी की।

सोचे एवं चर्चा करें

- क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं ?
- क्या बहुलक प्रेक्षण मात्र से ज्ञात किया जा सकता है ?

करो और सीखो

1. कक्षा 7 के 40 विद्यार्थियों ने अपने अपने परिवार के सदस्यों की संख्या को एक साथ लिखा। यह संख्या नीचे दर्शाई गई है।
4, 3, 5, 4, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 4, 7, 6, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 4, 5, 3, 4, 6, 4, 5, 5, 4,
3, 4, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 5 इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।
2. निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए।
21, 22, 25, 24, 22, 23, 23, 24, 25, 24, 22, 24, 23, 24, 23, 24, 22, 21, 25, 23

हमने देखा कि जहाँ माध्य हमें आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों का औसत प्रदान करता है वहीं बहुलक आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षणों को दर्शाता है।

निम्नांकित उदाहरणों पर विचार करें।

1. आपको अपने घर में प्रतिदिन बिजली की खपत के बारे में पता करना है।
2. रेडीमेड वस्त्र विक्रेता को अपने स्टॉल की आपूर्ति करनी है।
3. हमें अपने घर के लिए दरवाजे की ऊँचाई ज्ञात करनी है।
4. कक्षा के विद्यार्थियों के लिए पसंद की मिठाई के रूप में एक मिठाई का चयन करना है। तब किस मिठाई का चयन किया जाएगा।

पहले कथन पर विचार करें तो प्रतिदिन बिजली की खपत ज्ञात करने के लिए बिजली के मीटर से एक सप्ताह की खपत युनिट ज्ञात कर उसके माध्य से प्रतिदिन की खपत ज्ञात कर सकते हैं।

क्या दूसरे कथन के लिए भी हम इस विधि का उपयोग कर सकते हैं ?

हम जूतों के उदाहरण से देख सकते हैं कि वस्त्रों की आपूर्ति के लिए माध्य एक उपर्युक्त प्रतिनिधि मान नहीं होगा। बहुलक इसके लिए उपर्युक्त मान होगा।

इसी प्रकार तीसरे कथन के लिए माध्य और बहुलक दोनों से प्रतिनिधि मान नहीं होंगे। यहाँ परिवार के सबसे लम्बे सदस्यों के हिसाब से दरवाजे की ऊँचाई तय करनी होगी। इसी प्रकार शेष चौथे कथन पर विचार कर विश्लेषण करें तथा इसके लिए उपयुक्त प्रतिनिधि मान ज्ञात करें।

17.8 माध्यिका

हम देख चुके हैं कि कुछ स्थितियों में समांतर माध्य एक उपयुक्त केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है। तथा कुछ स्थितियों में बहुलक उपयुक्त केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है।

एक अन्य उदाहरण पर विचार करते हैं—

एक फ़ैक्ट्री में नौ कर्मचारियों का वेतन निम्नानुसार है।

3300, 4200, 5000, 3500, 4300, 3500, 4400, 3500, 5500

यदि हम वेतन के आधार पर कर्मचारियों को दो समूहों में बाँटता चाहते हैं तो इस स्थिति में समांतर माध्य या बहुलक क्या उचित प्रतिनिधि मान होगा ? इन आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर—

3300, 3500, 3500, 3500, 4200, 4300, 4400, 5000, 5500

हम देखते हैं कि उपर्युक्त आँकड़ों में 4200 ऐसी संख्या है जिसके दोनों ओर 4-4 संख्याओं के समूह हैं। अर्थात् चार कर्मचारियों का वेतन 4200 से कम है तथा चार कर्मचारियों का वेतन 4200 से अधिक है। इस प्रकार संख्याओं को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर ठीक मध्य में आने वाली संख्या को हम "माध्यिका" या माध्यक कहते हैं।

यदि आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए जो मध्य में आने वाले पद का मान माध्यिका कहलाता है।

उदाहरण 8 निम्नांकित आँकड़ों की माधिका ज्ञात कीजिए –

0, 47, 35, 20, 30, 40, 50

हल आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है

0, 20, 30, 35, 40, 47, 50

उपर्युक्त आँकड़ों में कुल 7 पद हैं जिनका मध्य पद ज्ञात करने के लिए उसमें 1 जोड़कर 2 का भाग दिया जाता है। (जब पदों की संख्या विषम हो)

अर्थात् उपर्युक्त आँकड़ों का माधिका पद चौथा है, जो 35 है। अतः उपर्युक्त आँकड़ों की माधिका 35 है।

इसी प्रकार यदि पदों की संख्या सम हो तो आरोही क्रम में जमाने के पश्चात् मध्य के दो पदों का माध्य ही माधिका होती है।

$$\text{माधिका पद} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} \text{ चौथा पद}$$

करो और सीखो

1. आरोही क्रम में व्यवस्थित प्रेक्षण निम्नानुसार है –
8, 11, 12, 16, $16 + x$, 20, 25, 30
यदि माधिका 18 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
2. ज्योति के विभिन्न विषयों में अंक (10 में से) निम्नानुसार आए –
5, 7, 0, 3, 5, 8
ज्योति ने 0 को छोड़ कर शेष अंकों से माध्य, माधिका तथा बहुलक निकाला। क्या उसने सही किया ?

प्रश्नावली 17.3

1. निम्न आँकड़ों से बहुलक ज्ञात कीजिए।
7, 6, 4, 5, 6, 4, 6, 3, 2, 7, 8, 6, 4, 6, 5
2. वंदना ने एक पासा लिया। उसने पासे को 20 बार उछाला और प्रत्येक बार प्राप्त संख्या को निम्न प्रकार लिखा –
3, 4, 6, 3, 5, 2, 2, 3, 5, 4
5, 6, 6, 1, 5, 6, 3, 5, 2, 4
उपर्युक्त आँकड़ों की सहायता से माधिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।
3. एक फैक्ट्री में काम करने वाले 40 मजूदारों के वजन (किग्रा में) निम्नांकित है –
60, 65, 70, 65, 60, 70, 65, 70, 75, 80, 75, 60, 65, 70, 65, 65
70, 65, 60, 70, 65, 75, 80, 75, 80, 65, 60, 65, 70, 80
उपर्युक्त आँकड़ों की सहायता से माधिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

4. निम्न चरों की माधिका ज्ञात कीजिए।

37, 31, 42, 43, 46, 25, 39, 45, 32

5. एक कक्षा की 21 व्यक्तियों की ऊँचाई निम्न प्रकार से है –

147, 149, 150, 152, 148, 151, 148, 150, 151, 149

152, 151, 152, 151, 150, 148, 149, 152, 153, 151, 152

(i) उपर्युक्त आँकड़ों की माधिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

(ii) क्या उपर्युक्त आँकड़ों के एक से अधिक बहुलक है।

6. एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार है –

105, 47, 0, 36, 50, 16, 7, 70, 65, 36, 52

उपर्युक्त आँकड़ों से माध्य, माधिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान है ?

हमने सीखा

1. एकत्रित किए गए आँकड़ों को बारम्बारता बंटन सारणी की सहायता से दण्ड आलेखों के रूप में दर्शाया जा सकता है। दंड आलेख संख्याओं का समान चौड़ाई वाले दंडों द्वारा एक चित्र निरूपण है।
2. एक दोहरा दंड आलेख एक ही निरीक्षण में प्रेक्षणों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक होता है।
3. आँकड़ों के संग्रहण, सारणीयन एवं प्रस्तुतीकरण से हमें अपने अनुभवों को संग्रहित करने तथा निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।
4. आँकड़ों को एकत्रित करने से पूर्व यह जानना आवश्यक है कि उनका उपयोग किन कार्यों में किया जाता है।
5. एकत्रित आँकड़ों को सारणीबद्ध किया जाना आवश्यक है ताकि इनको सरलता से समझा जा सके और व्याख्या की जा सके।
6. समांतर माध्य, बहुलक तथा माधिका आँकड़ों के प्रतिनिधि मान है।
7. आँकड़ों के समूह को जोड़कर आँकड़ों की संख्या से भाग देने पर माध्य प्राप्त होता है। जो आँकड़ों के न्यूनतम एवं अधिकतम मान के मध्य होता है।
8. आँकड़ों के समूह में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं। यह एक या एक से अधिक हो सकता है।
9. यदि आँकड़ों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए तो मध्य में आने वाले पद का मान माधिका कहलाता है।

